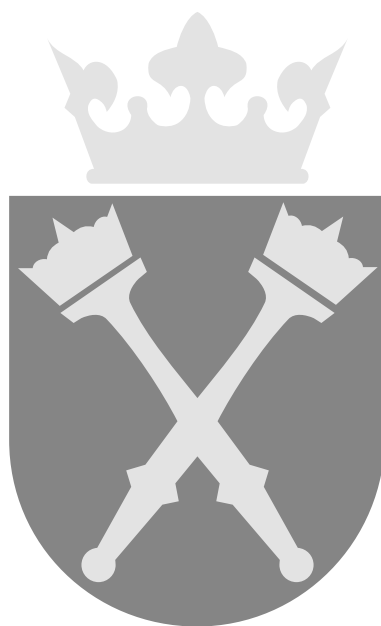


Benedykt Jany  
IV rok Fizyka Jądrowa  
e-mail:jany@if.uj.edu.pl

Kraków 2005

# Entropia Tsallis'a – możliwe uogólnienie statystyki Boltzmann-Gibbsa



INSTYTUT FIZYKI  
UNIwersytet Jagielloński

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Struktura statystyki Boltzmann-Gibbsa</b>	<b>3</b>
2.1	Formalizm równań różniczkowych . . . . .	3
2.2	Wartości średnie . . . . .	4
2.3	Prawo składania entropii – ekstensywność . . . . .	5
2.4	Concavity (wklęsłość) . . . . .	5
2.5	Stabilność . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Entropia Tsallis’a jako uogólnienie statystyki BG</b>	<b>6</b>
3.1	Formalizm równań różniczkowych – uogólnienie . . . . .	6
3.2	Wartości średnie . . . . .	7
3.3	Prawo składania entropii – nieekstensywność . . . . .	7
3.4	Concavity (wklęsłość) . . . . .	7
3.5	Stabilność . . . . .	7
3.6	Konkluzje, łączność z termodynamiką (kanoniczny ensemble) . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Entropia Tsallis’a – zastosowania do ekonomii</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>10</b>

# 1 Wstęp

Wiadomo nie od dziś że rozkłady nie Gaussowskie powszechnie występują w naturze. Jako przykład można przytoczyć algebraiczne rozkłady w procesach fragmentacji [6], gdzie takiemu procesowi w którym dokonujemy podziału fragmentów mogą ulegać jądra atomowe, DNA, nawet na co dzień mamy do czynienia z fragmentacją, ileż to razy zdarzyło się nam zbić szklankę, pewnie nie zastanawialiśmy się nad tym że rozkład fragmentów ma postać potęgową. Rozkładą potęgowym podlega także globalny terroryzm [7], gdzie ostrość ataków terrorystycznych mierzona jako liczba kontuzji i śmierci ofiar ataków terrorystycznych w latach 1968-2004 jest dobrze modelowana przez właśnie rozkłady algebraiczne postaci  $P(x) \sim x^{-\gamma}$ . Można przytoczyć jeszcze wiele innych przykładów systemów gdzie obserwowane rozkłady nie należą do basenu atrakcji rozkładu Gaussa.

Chcąc teraz zajmować się termodynamiką takich układów pierwszą rzeczą którą naturalnie chcemy zrobić to w sposób “klasyczny” podejść do sprawy, tak jak nas tego uczono, korzystając z mechaniki statystycznej jaką znamy Boltzmann-Gibbsa. Ale już na początku naszej pracy natrafiamy na problem, otóż nie jesteśmy w stanie z klasycznej definicji entropii BG ( $S_{BG} = -k \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i$ ) wygenerować innych rozkładów niż te wpadające do basenu atrakcji rozkładu Gaussa (asymptotycznie prawa eksponencjalne). No i mamy problem, bo nie jesteśmy w ten sposób opisywać w ten sposób naszych układów. Statystyka BG nie nadaje się do opisu układów w których mamy do czynienia z długozasięgowymi oddziaływaniami ani też układów nie markowskich tzw. z długą pamięcią. Potrzebujemy więc innego podejścia. Uogólnienia statystyki Boltzmannowskiej na klasę tych rozkładów (układów o takich własnościach). Następnym pytaniem jest “Jak to zrobić?”. Nie ma jakiejś jednej metody, schematu postępowania którego można by zaadoptować celem uogólnienia statystyki BG.

Zanim jednak będziemy chcieli coś uogólnić, przyjrzyjmy się temu co już wiemy o statystyce BG.

## 2 Struktura statystyki Boltzmann-Gibbsa

### 2.1 Formalizm równań różniczkowych

Na początek rozważmy najprostsze równanie różniczkowe jakie można sobie wyobrazić

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (1)$$

którego rozwiązaniem (przy warunku  $y(0) = 1$ ) jest  $y = 1$ . Następne pod względem trudności będzie

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad (2)$$

którego rozwiązaniem (przy takim samym warunku) jest  $y = x + 1$ . Następnym w kolejności będzie

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (3)$$

którego rozwiązaniem jest

$$y = e^x, \quad (4)$$

a funkcją odwrotną do niego

$$y = \ln x, \quad (5)$$

która odpowiada znanej nam formule Boltzmannowskiej na entropię



$$S_{BG} = k \ln W, \quad (6)$$

gdzie  $k$  – jest stałą Boltzmanna a  $W$  – prawdopodobieństwem termodynamicznym. Chcąc teraz wprowadzić fizyczny wymiar dla “ $x$ ” musimy rozważyć równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} = ay, \quad (7)$$

gdzie  $ax$  jest bezwymiarowe, a rozwiązaniem takiego równania jest

$$\underline{y = e^{ax}}. \quad (8)$$

To co zrobiliśmy to powiązaliśmy rozwiązania pewnych równań różniczkowych z statystyką Boltzmanna-Gibbsa i odpowiednią entropią  $S_{BG}$ .

Te równanie różniczkowe (7) a także jego rozwiązanie (8) mają pewne kluczowe interpretacje fizyczne w Mechanice Statystycznej BG.

- m.i. **rozkład energii dla stanów stacjonarnych**, gdy rozważymy  $(x, y, a) \rightarrow (E_i, Zp_i, -\beta)$ , co nam daje

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \quad \left( Z \equiv \sum_{j=1}^W e^{-\beta E_j} \right), \quad (9)$$

gdzie  $E_i$  – jest wartością własną  $i$ -tego stanu Hamiltonianu,  $p_i$  – jest prawdopodobieństwem zajmowania  $i$ -tego stanu gdy system jest w równowadze z termostatem o temperaturze  $T \equiv 1/k\beta$  (kanoniczny ensemble).

Taką samą postać funkcji wykładniczej (9) otrzymamy z maksymalizacji entropii

$$\boxed{S_{BG} = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i}, \quad (10)$$

przy warunkach  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$  oraz  $\sum_{i=1}^W p_i E_i = U$ , wtedy funkcjonal którego będziemy maksymalizować będzie mieć postać

$$J = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i + \alpha \sum_{i=1}^W p_i + \beta \sum_{i=1}^W p_i E_i \quad (11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_j} = 0 \quad (12)$$

## 2.2 Wartości średnie

Entropia BG może być zapisana jako

$$S_{BG} = k \left\langle \ln \frac{1}{p_i} \right\rangle. \quad (13)$$

Można zauważyć że ta wartość średnia (13) ma taką samą postać funkcyjną jak entropia dla przypadku równych prawdopodobieństw (mikrokanoniczny ensemble), gdzie  $1/p_i$  pełni rolę  $W$ .



## 2.3 Prawo składania entropii – ekstensywność

Wyobraźmy sobie dwa systemy  $A$  i  $B$  statystycznie niezależne takie że mamy faktoryzację  $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B \quad \forall(i, j)$  wtedy dla entropii (10) możemy napisać

$$S_{BG}(A + B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B) \quad (14)$$

Ta własność jest nazywana ekstensywnością lub czasami addytywnością.

## 2.4 Concavity (wkłęsłość)

Rozważmy dwa rozkłady  $\{p_i\}$ ,  $\{p'_i\}$  dla danego systemu ( $i = 1, 2, \dots, W$ ). Zdefiniujmy teraz pośredni rozkład

$$p''_i = \mu p_i + (1 - \mu) p'_i \quad (0 < \mu < 1) \quad (15)$$

Mówimy że funkcjonał  $S(\{p_i\})$  jest wypukły (concave) wtedy i tylko wtedy gdy

$$S(\{p''_i\}) \geq \mu S(\{p_i\}) + (1 - \mu) S(\{p'_i\}) \quad \forall \{p_i\}, \{p'_i\}, \mu \quad (16)$$

Można pokazać że  $S_{BG}$  jest wypukła (concave). Ta własność dla mechaniki statystycznej BG prowadzi wprost do termodynamicznej stabilności ze względu na perturbacje energii.

## 2.5 Stabilność

Konieczny warunek dla (dodatniego) statystycznego funkcjonału  $O(\{p_i\})$  ażeby był wielkością fizyczną jest aby pod wpływem małych wariacji  $\{p_i\}$  jego względna wariacja pozostała mała, to wtedy mówimy że  $O(\{p_i\})$  jest stabilny.

Miarę deformacji definiujemy jako

$$\|p - p'\| = \sum_{i=1}^W |p_i - p'_i|, \quad (17)$$

wtedy możemy warunek zapisać jako

$$\|p - p'\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow R \equiv \left| \frac{O(p_i) - O(p'_i)}{O_{max}} \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad (18)$$

gdzie  $O_{max} = \max(O(p_i))$ .

To w szczególności prowadzi do

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{W \rightarrow \infty} R = \lim_{W \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R = 0 \quad (19)$$

Można pokazać że  $S_{BG}$  (dla której  $O_{max} = k \ln W$ ) spełnia warunek stabilności.

### 3 Entropia Tsallis'a jako uogólnienie statystyki BG

Spróbujmy teraz, po uprzednim omówieniu struktury statystyki BG, znaleźć sposób ażeby uogólnić ją na szerszą klasę systemów, pamiętając jednak o tym iż nie istnieje jeden określony sposób aby to uczynić.

#### 3.1 Formalizm równań różniczkowych – uogólnienie

Zadajmy sobie najpierw pytanie “Czy możemy uogólnić wszystkie te trzy równanie różniczkowe (1), (2), (3)?”

Tak, oczywiście przez

$$\frac{dy}{dx} = a + by \quad (20)$$

Czy możemy to zrobić minimalnie, tylko z jednym parametrem ? Tak, ale poza liniowością ☹ przez

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (q \in \mathbb{R}), \quad (21)$$

równania (1), (2), (3) są odtwarzane odpowiednio dla  $q \rightarrow -\infty$ ,  $q = 0$ ,  $q = 1$ .

Rozwiązanie równania (21) z warunkiem  $y(0) = 1$  ma postać

$$y = \underbrace{[1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}}_{q\text{-exponenta}} \equiv e_q^x \quad (e_1^x = e^x). \quad (22)$$

Funkcją odwrotną do  $q$ -exponenty jest  $q$ -logarytm ☺ zdefiniowany jako

$$y = \underbrace{\frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}}_{q\text{-logarytm}} \equiv \ln_q x \quad (\ln_1 x = \ln x) \quad (23)$$

Na tej podstawie możemy wnioskować jakie może być uogólnienie wzoru Boltzmannna dla równych prawdopodobieństw

$$S_q(p_i = \frac{1}{W} \quad \forall i) = k \ln_q W = k \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (24)$$

Chcąc teraz wprowadzić wymiar fizyczny dla “ $x$ ” musimy rozważyć równanie

$$\frac{dy}{dx} = a_q y^q \quad (a_1 = a), \quad (25)$$

i jego rozwiązanie

$$y = e_q^{a_q x}. \quad (26)$$

Zastanówmy się w takiej sytuacji jak będzie wyglądał rozkład energii dla stanu stacjonarnego. Przyjmuje on w tym wypadku postać

$$p_i = \frac{e_q^{-\beta_q E_i}}{Z_q} \quad Z_q = \sum_{j=1}^W e_q^{-\beta_q E_j}. \quad (27)$$



### 3.2 Wartości średnie

Korzystając z poprzedniego rezultatu (13), chcąc to uogólnić w sposób naturalny zamieniamy logarytm na  $q$ -logarytm

$$S_q = k \left\langle \ln_q \frac{1}{p_i} \right\rangle, \quad (28)$$

co prowadzi prosto używając (23) do wyniku ☺

$$\left\{ \underbrace{S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1}}_{\text{Entropia Tsallis'a}} \quad (q \in \mathbb{R}) \right\} \quad (S_1 = S_{BG}). \quad (29)$$

Index “ $q$ ” charakteryzuje statystykę z którą mamy do czynienia, dobrze jest myśleć o nim jak o parametrze bajasującym, dla  $q < 1$  uprzywilejowane są rzadkie zdarzenia podczas gdy dla  $q > 1$  preferowane są “pospolite” zdarzenia. Natomiast dla  $q = 1$  dostajemy zwykłą statystykę BG czyli niezbiasowaną.

Wróćmy jeszcze na chwilę do poprzedniego punktu; taką samą postać funkcji (27) ( $q$ -exponenty) otrzymamy z maksymalizacji entropii (29) przy warunkach  $\sum_{i=1}^W p_i = 1$  oraz  $\sum_{i=1}^W \frac{p_i^q E_i}{p_i^q} = U_q$ , wtedy nasz funkcjonał będzie mieć postać

$$J = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q-1} + \alpha \sum_{i=1}^W p_i + \beta \sum_{i=1}^W \frac{p_i^q E_i}{p_i^q}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_j} = 0 \quad (31)$$

### 3.3 Prawo składania entropii – nieekstensywność

Jeżeli rozważymy tak jak poprzednio dwa statystycznie niezależne systemy  $A$  i  $B$  to dla entropii Tsallis’a (29) dostaniemy

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (32)$$

Ta własność jest nazywana nieekstensywnością, stąd właśnie nazwa statystyka nieekstensywna.

$S_q$  jest zawsze nieujemna i tak mamy

$$\begin{aligned} q < 1 &\Rightarrow S_q(A+B) > S_q(A) + S_q(B) \Rightarrow \text{superextensywność} \\ q > 1 &\Rightarrow S_q(A+B) < S_q(A) + S_q(B) \Rightarrow \text{subextensywność} \end{aligned}$$

### 3.4 Concavity (wkłęsłość)

Można pokazać że  $S_q(\{p_i\})$  jest wkłęsła (concave) dla dodatnich wartości  $q$  i odpowiednio wypukła (convex) dla ujemnych wartości  $q$ .

### 3.5 Stabilność

Można pokazać [2, 3] że entropia Tsallis’a (29) jest stabilna dla każdej pozytywnej wartości  $q$ .



### 3.6 Konkluzje, łączność z termodynamiką (kanoniczny ensemble)

Jak pokazaliśmy powyżej dobrym kandydatem na uogólnioną entropię może być  $S_q$  (29) spełnia bowiem ona wszystkie cechy dobrego funkcjonału entropicznego. Zastanówmy się więc, skoro jest to dobra entropia jak możemy uprawiać mechanikę statystyczną przy jej pomocy. Pokazaliśmy już że maksymalizacja przy zadanych warunkach (kanoniczny ensemble) (30) prowadzi do rozkładów równowagowych postaci

$$p_i = \frac{e_q^{-\beta_q E_i}}{Z_q} \quad Z_q = \sum_{j=1}^W e_q^{-\beta_q E_j}. \quad (33)$$

gdzie  $e_q^x$  jest  $q$ -exponentą (22).

Oczywiście cała struktura transformacji Legendre'a pozostaje  $q$ -niezmiennicza i można pokazać że

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= k\beta = \frac{\partial S_q}{\partial U_q} \\ F_q &= U_q - \frac{S_q}{k\beta} \\ C_q &= T \frac{\partial S_q}{\partial T} = \frac{\partial U_q}{\partial T} \end{aligned} \quad (34)$$

W podobny sposób jak uogólniliśmy funkcje wykładniczą możemy uogólnić rozkład Gaussa [5, 4] dostając tzw.  $q$ -Gaussa ☺

$$P_q(x) = [1 - (1 - q)\beta x^2]^{1/(1-q)} / Z_q \quad (5/3 < q < 3, \beta > 0) \quad (35)$$

gdzie

$$Z_q = \sqrt{\frac{\pi}{\beta(q-1)}} \Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right). \quad (36)$$

Przypomnijmy że rozkład *Lévy'ego* można zapisać jako

$$L_\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \cos(kx) e^{-\alpha|k|^\gamma} \quad (0 < \gamma < 2, \alpha > 0) \quad (37)$$

Można także pokazać [5, 4] że parametry  $(q, \gamma)$  są związane ze sobą przez

$$q = \frac{\gamma + 3}{\gamma + 1}, \quad (38)$$

tak że ogony (ciężkie ogony potęgowe) obu rozkładów (35), (37) spadają z takim samym wykładnikiem potęgi.

## 4 Entropia Tsallis'a – zastosowania do ekonomii

Używanie metod zaczerpniętych z mechaniki statystycznej i termodynamiki do ekonomii okazuje się być bardzo owocne. Nawet została stworzona specjalna gałąź nauki parę lat temu zwana *Ekonofizyką* © zajmująca się właśnie tym. My jednak zastanówmy się nad kilkoma zastosowaniami nieekstensywnej statystyki do problemów w ekonomii.

- Zastosowanie w prostym modelu handlu do oceny ryzyka

Zbajasonowane średnie które naturalnie pojawiają się w nieekstensywnej mechanice statystycznej zastępują te zaproponowane w *“prospect model”* i tworzą narzędzie które w które w prosty i względnie realistyczny tworzy model wymiany papierów wartościowych (stock exchange) albo podobnej formy handlu. Można stworzyć program symulujący wymiany walutowe wśród operatorów, gdzie każdy z nich jest charakteryzowany przez parametr *“q”* który odzwierciedla jego postawę pod wpływem ryzyka, oczywiście jest to entropiczny index *“q”* który pełni zasadniczą rolę w nieekstensywnej mechanice.

- Zastosowanie do wyceny opcji

Równanie Black-Scholes'a dostarcza w jawny sposób ceny opcji. Jego główne założenie w szczególności zakłada istnienie szumu Gaussowskiego, który upraszcza rachunki matematyczne lecz może prowadzić do wyników rozbieżnych z prawdziwym rynkiem. Można uogólnić to równanie zakładając istnienie nie-Gaussowskich fluktuacji które ewoluują zgodnie z nieliniowym równaniem Fokkera-Planck'a. Taki proces może być modelowany jako standardowy Gaussowski proces z pewnym statystycznym sprzężeniem. Otóż stopień tego sprzężenia jest charakteryzowany przez nasz index *“q”*. Gdy  $q > 1$  to wtedy rzadkie zdarzenia będą prowadziły do dużych fluktuacji, natomiast *“pospolite”* zdarzenia prowadzą do umiarkowanych fluktuacji. Ten model zwrotów z papierów wartościowych (stock returns) jest konsystentny z obserwacjami rozkładów zwrotów. Zwykle równanie Black-Scholes'a jest odtwarzane dla  $q = 1$ .

- Zastosowanie do finansowych zwrotów i natężeń (volumes)

Będziemy się tutaj zajmować dwiema zmiennymi w określonym interwale czasowym: *zwrotami (retutns)* zdefiniowanymi jako logarytm z względnej zmiany ceny, *natężeniami (volumes)* zdefiniowanymi jako liczba *“shares”* wymienianych.

Rozkłady znormalizowanych zwrotów (średniej podzielonej przez odchylenie standardowe) mierzone w kilkuminutowych interwałach są dość dobrze fitowane przez rozkłady q-Gaussowskie z  $q \simeq 1.4$ . Dla dłuższych interwałów (miesiące, lata) wartość  $q$  zbliża się do granicy Gaussowskiej ( $q = 1$ ).

Podobne wyniki dostaje się dla znormalizowanych natężeń (dzielonych przez średnią) które są fitowane przez q-exponenty mnożone przez proste potęgi znormalizowanych natężeń. Jak pokazują wcześniejsze badania natężenia dla dużych wartości mają charakter praw potęgowych. Podczas gdy *volatility* dla dużych wartości ma charakter praw potęgowych a dla mniejszych wartości log-normalny.

Na podstawie tych rozważań można zaproponować nowy reżim praw potęgowych dla niskich natężeń i znaleźć formę funkcyjną która opisuje wszystkie trzy sytuacje.

## 5 Podsumowanie

Spróbujmy teraz podsumować całe to nieekstensywne podejście. Zanim to jednak nastąpi zastanówmy się “Czy wszystkie stacjonarne rozkłady które znajdziemy w naturze są typu Gaussa i Lévy?” . Bez wątpliwości TAK, ale pod jednym warunkiem, takim że dynamika pojawiająca się w naturze musiała by być dynamiką konwolucyjną, bez żadnej pamięci pomiędzy poszczególnymi krokami. Jednakże wiemy że istnieje znacznie bardziej złożona i bogatsza dynamika w naturze, choćby taka związana z bogactwem nieliniowych równań Fokkera-Planck’a która wprowadza nietrywialne korelacje, multiplikatywne szумы i inne efekty których dokładnym rozwiązaniem są akurat q-Gaussiany ☺.

W naszym konkretnym przypadku finansowych obserwacji skończonych wariacji i wykładników potęg w ciężkich ogonach tych rozkładów leżących poza stabilnym interwałem Lévy’ego  $0 < \gamma < 2$  prowadzi do wniosku iż rozkłady produkowane przez Centralne Twierdzenie Graniczne Gnedenko-Lévy’ego (Gauss i Lévy) nie są w stanie opisać zwrotów. Za to q-Gaussiany z  $1 < q < 5/3$  są konsystentne w opisie dynamiki systemów finansowych zarówno ze skończonymi wariacjami jak i obecnością czasowych autokorelacji (efektów pamięci) ☺.

## Literatura

- [1] C. Tsallis, “*What should a statistical mechanics satisfy to reflect nature?*”, Physica D 193, 3-34 (2004)
- [2] S. Abe, “*Tsallis entropy: How unique?*”, arXiv: cond-mat/0305087 (2003)
- [3] W. Tatsuaki, “*On the thermodynamic stability conditions of Tsallis entropy*”, Phys. Lett. A 297, 334-337 (2002)
- [4] D. Prato, C. Tsallis, “*Nonextensive foundation of Lévy distributions*”, Phys. Rev. E 60, 2398 (1999)
- [5] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. M. C. Souza, R. Maynard, “*Statistical-Mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature*”, Phys. Rev. Lett. 75, 3589 (1995)
- [6] P. L. Krapivsky, I. Grosse, E. Ben-Naim, “*Scale invariance of self-averaging in fragmentation*”, Phys. Rev. E 61, 993 (2000)
- [7] A. Clauset, M. Young, “*Scale Invariance in Global Terrorism*”, arXiv: physics/0502014 (2005)
- [8] C. Tsallis, C. Anteneodo, R. Borland, R. Osorio, “*Nonextensive statistical mechanics and economics*”, arXiv: cond-mat/0301307 (2003)