

ZESTAW 1

fizyka I rok, wszystkie grupy

1 Definicje

Jeżeli wektory dane są przez współrzędne $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$, $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ to:

- iloczyn skalarny
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$,
- iloczyn wektorowy
 $\vec{a} \times \vec{b} = [a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x]$.

Związek współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich) z innymi układami współrzędnych:

- układ biegunowy (2 wymiarowy) - r, φ
 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$,
- układ cylindryczny (walcowy) - r, φ, z
 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$,
- układ sferyczny - r, φ, θ
 $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.

Pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x nazywamy granicę ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (1)$$

Podstawowe wzory na różniczkowanie:

- $c' = 0$,
- $(x^n)' = nx^{n-1}$,
- $(cu)' = cu'$,
- $(u + v)' = u' + v'$,

- $(uv)' = u'v + uv'$,
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\ln x)' = 1/x$.

Jeżeli $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$, to y nazywa się funkcją złożoną zmiennej x .
 Wtedy $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ czyli $y' = f'(u)u'$.

Przykład: $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

2 Zadania

1. Dane są wektory $\vec{a} = [3, 4, 0]$, $\vec{b} = [2, 2, 1]$, $\vec{c} = [4, 2, 4]$. Oblicz:
 - (a) długości wektorów \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ,
 - (b) sumę $\vec{a} + \vec{b}$,
 - (c) różnicę $\vec{a} - \vec{b}$,
 - (d) $3\vec{a} - 7\vec{b} + 2\vec{c}$,
 - (e) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{c}$,
 - (f) iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$,
 - (g) kąt pomiędzy wektorami \vec{a} i \vec{c} ,
 - (h) rzut wektora \vec{c} na kierunek wyznaczony przez wektor \vec{a} .
2. Niech $\vec{a} = [1, 0, 0]$, $\vec{b} = [0, 1, 0]$, $\vec{c} = [0, 0, 1]$. Obliczyć: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$.
3. Obliczyć współrzędne Krakowa w układzie kraterzjańskim (dobrać rozsądnie osie). Szerokość geograficzna Krakowa wynosi $50^\circ N$ a długość $20^\circ E$.
4. Łódź płynie z prądem rzeki z przystani A do B w czasie $3h$, a z B do A w czasie $6h$. Ile czasu trzeba, aby łódź spłynęła z przystani A do B z wyłączonym silnikiem?

5. Każdego dnia o tej samej godzinie z portu A do portu B wyrusza statek i przebywa odległość AB w ciągu 6 dni. Równocześnie z portu B do A, także co dzień i o tej samej porze wyrusza statek i przebywa tę odległość w ciągu 4 dni. Ile statków spotka po drodze pasażer płynący na jednym z nich? Zadanie rozwiązać graficznie.
6. Położenie ciała poruszającego się wzdłuż osi Ox zmienia się w czasie według równania $x(t) = \frac{3t}{1+t}$. Obliczyć:
- (a) maksymalną odległość x_m na którą oddali się ciało od położenia początkowego,
 - (b) maksymalną prędkość ciała v_m ,
 - (c) początkowe przyśpieszenie a_0 .