

Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak
Semestr zimowy 2024/2025

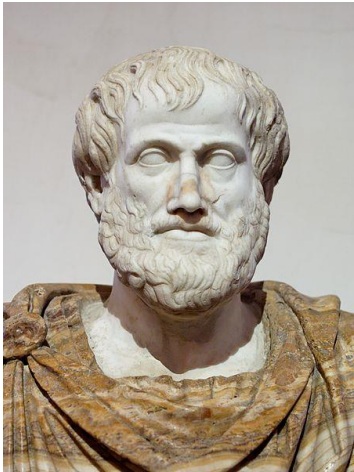
Wykład nr 2

Na pierwszym wykładzie podane zostały wielkości służące do opisu ruchu oraz przykłady ruchów.

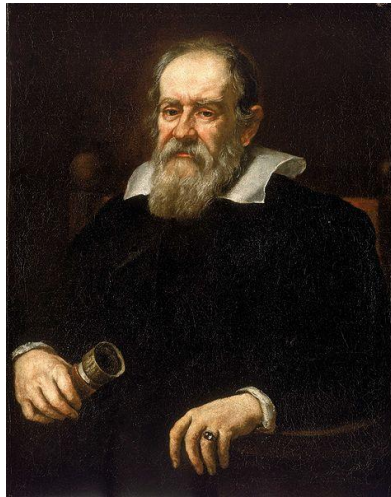
Teraz zastanowimy się nad prawami rządzącymi ruchem (na razie dla przypadku pojedynczego punktu materialnego).

Trzeba mieć świadomość, że odkrywanie tych praw nie było sprawą prostą i ciągnie się przez tysiąclecia.

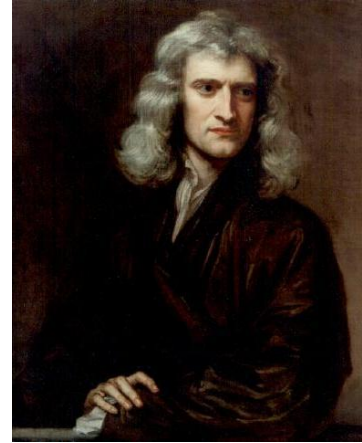
To oczywiście tylko
najważniejsze postaci.



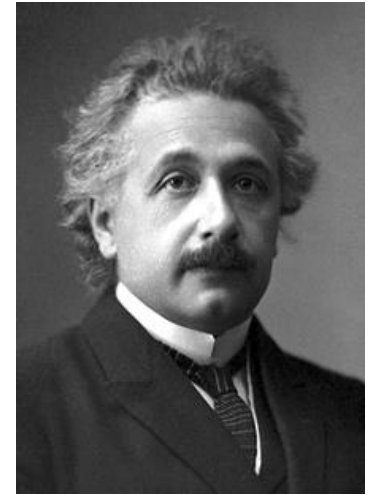
Arystoteles
(384 BC – 322 BC)



Galileusz
(1564-1642)



Sir Isaac Newton
(1643-1727)



Albert Einstein
(1879-1955)

Wielu innych matematyków
i fizyków wniosło istotny
wkład do mechaniki !

Z historii fizyki

Arystoteles

Twierdził, że każde ciało ma swoje właściwe miejsce we Wszechświecie i chce w nim pozostać, bądź dąży do swego naturalnego stanu. Aby utrzymać ciało w ruchu jednostajnym po linii prostej potrzebna jest stale działająca siła.

Galileusz

Wprowadził pojęcie bezwładności: twierdził, że ciało wprawione w ruch ma tendencję do pozostania w ruchu. Wykonywał eksperymenty z równią pochyłą i stwierdził na ich podstawie, że siła jest potrzebna, by zmienić prędkość ciała, a nie po to, by utrzymać je w ruchu. Stworzył podwaliny metody naukowej, przyjętej przez wszystkie nauki przyrodnicze.

Newton

Trzy zasady dynamiki. Absolutna przestrzeń i absolutny czas.

Einstein

STW i OTW

Pytanie:

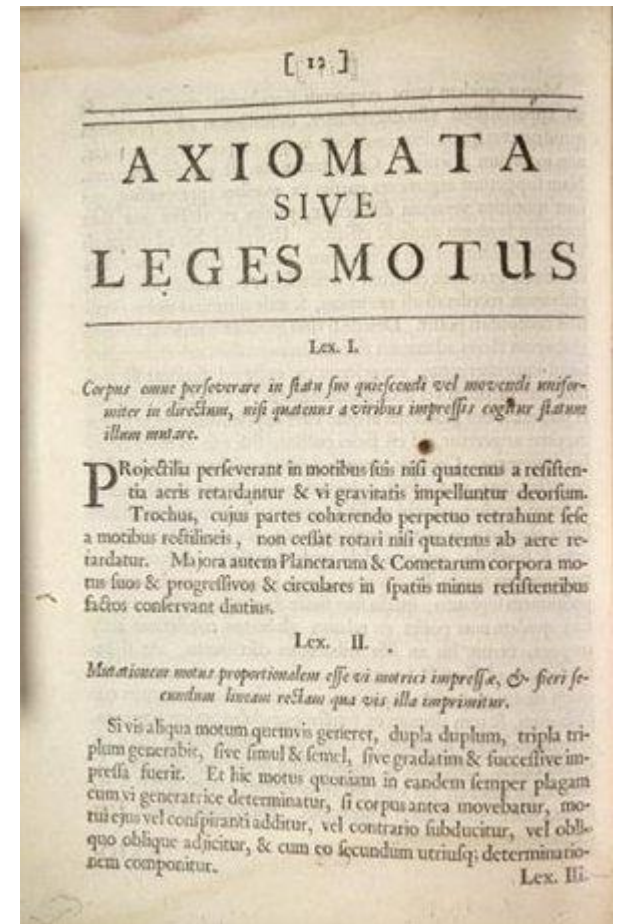
Czy możliwa jest sytuacja, gdy dane ciało nie oddziałuje z innymi obiektami we Wszechświecie ? Czy wówczas istniałaby możliwość obserwacji takiego obiektu ?

Doświadczenie pokazuje, że w miarę oddalania się ciała od innych obiektów, ich oddziaływanie na to ciało staje się coraz słabsze. Na ekstrapolacji tego faktu doświadczalnego bazuje fizyka !

I prawo ruchu (I zasada dynamiki Newtona)

Jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się, to istnieje układ odniesienia (zwany **układem inercjalnym**), w którym ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Jeśli w tym układzie będziemy rozpatrywali układy odniesienia, które poruszają się po linii prostej ze stałą prędkością lub spoczywają, to te układy też będą inercjalne. Jeśli istnieje jeden układ inercjalny, to jest ich nieskończenie wiele !



Isaac Newton,
*Philosophiæ Naturalis
Principia
Mathematica*, 1687
(Wikipedia)

Jak w praktyce znaleźć układ inercjalny ?

Często w prostych problemach mechanicznych (ruch mas zawieszonych na bloczku, ruch pod wpływem sił sprężystych, ruch w obecności oporów ośrodka, sił tarcia, ...) albo przy badaniu zjawisk z dziedziny fizyki atomowej, jądrowej i cząstek elementarnych Ziemia jest dobrym przybliżeniem układu inercjalnego.

Niekiedy jednak trzeba uwzględnić ruch obrotowy Ziemi wokół własnej osi oraz ruch Ziemi po orbicie wokół Słońca.

Słońce z kolei porusza się po orbicie wokół środka Galaktyki itd.

Próbowano powiązać idealny układ inercjalny z tzw. gwiazdami stałymi. Dla tych obiektów przez długie stulecia nie wykryto żadnego ruchu. Obecnie wiadomo, że całe galaktyki i ich gromady poruszają się względem siebie z olbrzymimi prędkościami.

II prawo ruchu (II zasada dynamiki Newtona)

Jeśli cząstka porusza się z przyspieszeniem \mathbf{a} w układzie inercyjnym, to działa na nią siła \mathbf{F} równa iloczynowi masy bezwładnej tej cząstki i jej przyspieszenia:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Czym jest siła ? Jest to wyraz oddziaływania cząstki z resztą Wszechświata. Zależć może od właściwości fizycznych cząstki, jej masy, ładunku elektrycznego, momentu magnetycznego, ...
W makroświecie oddziaływanie to może być wyrazem oddziaływania fundamentalnego (na przykład siła grawitacyjna lub kulombowska) lub też wynikiem uśrednienia bardzo wielu oddziaływań molekularnych, których źródłem jest oddziaływanie elektromagnetyczne (siła sprężysta, siła tarcia, opór ośrodka, ...)

Oddziaływania fundamentalne

Wszystkie siły występujące w przyrodzie są przejawem czterech podstawowych rodzajów oddziaływań, a mianowicie oddziaływania **grawitacyjnego, elektromagnetycznego, silnego oraz słabego**.

Oddziaływanie grawitacyjne

odgrywa decydującą rolę w ruchach planet, gwiazd i galaktyk, a także w powszechnie znanych ruchach zachodzących w pobliżu powierzchni Ziemi ze stałym przyspieszeniem. Oddziaływanie to można opisać dość dobrze za pomocą prawa powszechnego ciężenia sformułowanego przez Newtona. Współczesną teorią grawitacji jest ogólna teoria względności Einsteina. Grawitacja nie odgrywa w zasadzie żadnej roli w świecie cząstek elementarnych.

Oddziaływanie elektromagnetyczne

odpowiedzialne jest za wiązanie jąder atomowych i elektronów w trwałe układy (atomy, cząsteczki, kryształy itp.). Decyduje o przebiegu procesów chemicznych i biologicznych oraz procesów emisji i absorpcji promieniowania elektromagnetycznego. Do XIX wieku elektryczność i magnetyzm uważano za całkowicie niezależne od siebie. Klasyczna teoria elektromagnetyzmu sformułowana została przez Maxwella, który połączył w czterech eleganckich równaniach znane wcześniej i odkryte przez siebie związki między natężeniem pola elektrycznego i natężeniem pola magnetycznego. Współczesną teorią elektromagnetyzmu jest kwantowa elektrodynamika (QED).

Oddziaływanie silne

powoduje wiązanie się kwarków w hadrony (bariony i mezony) oraz nukleonów w trwałe jądra atomowe. Jest odpowiedzialne za niektóre reakcje jądrowe oraz reakcje pomiędzy cząstkami elementarnymi i ich rozpady. Współczesną podstawową teorią oddziaływań silnych jest kwantowa chromodynamika (QCD), opisująca oddziaływania kwarków i gluonów.

Oddziaływanie słabe

nie tworzy żadnych stanów związanych. Przeciwnie, odpowiada za wiele rozpadów i łamie symetrie zachowywane przez oddziaływania elektromagnetyczne i silne. Neutrino oddziałują słabo i ... grawitacyjnie, skoro odkryto u nich masę (patrz Nobel z fizyki w 2015 roku). Właśnie oddziaływanie słabe odpowiada za rozpady β neutronu i wielu jąder atomowych.

Obecnie wiemy, że oddziaływanie elektromagnetyczne i oddziaływanie słabe są przejawem jednego oddziaływania zwanego elektroslabym.

Prowadzone są prace teoretyczne mające na celu **unifikację** wszystkich czterech oddziaływań.

Co oznacza, że oddziaływanie jest słabe lub silne ?

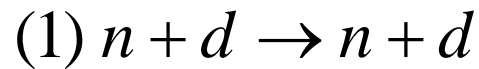
Można na przykład łatwo porównać siłę kulombowską i siłę oddziaływania grawitacyjnego między protonem i elektronem w atomie wodoru (ćwiczenia).

Można porównać energie wiązania atomu wodoru składającego się z protonu i elektronu (13.6 eV) oraz energię wiązania układu proton-neutron (2.2 MeV = 2200000 eV).

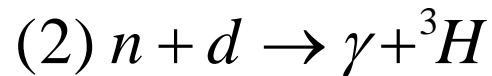
Wreszcie można porównać prawdopodobieństwa zajścia reakcji w świecie cząstek elementarnych. Im większe jest prawdopodobieństwo procesu, tym silniejsze jest oddziaływanie odpowiedzialne za ten proces.

Dwa przykłady (z mojego podwórka reakcji z kilkoma nukleonami)

Przykład I



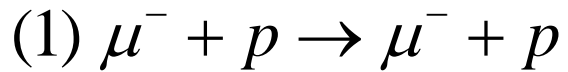
elastyczne rozpraszanie
neutron-deuteron \rightarrow proces silny



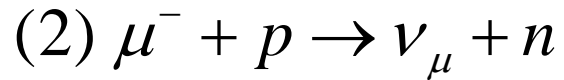
radiacyjny wychwyt neutronu
na deuteronie \rightarrow proces
elektromagnetyczny

**Reakcja nr 2 jest znacznie mniej prawdopodobna, choć
sytuacja początkowa jest identyczna !**

Przykład II



elastyczne rozpraszanie
mion-proton \rightarrow proces elektromagnetyczny



wychwył mionu na protonie \rightarrow
proces słaby

**Reakcja nr 2 jest znacznie mniej prawdopodobna, choć
sytuacja początkowa jest identyczna !**

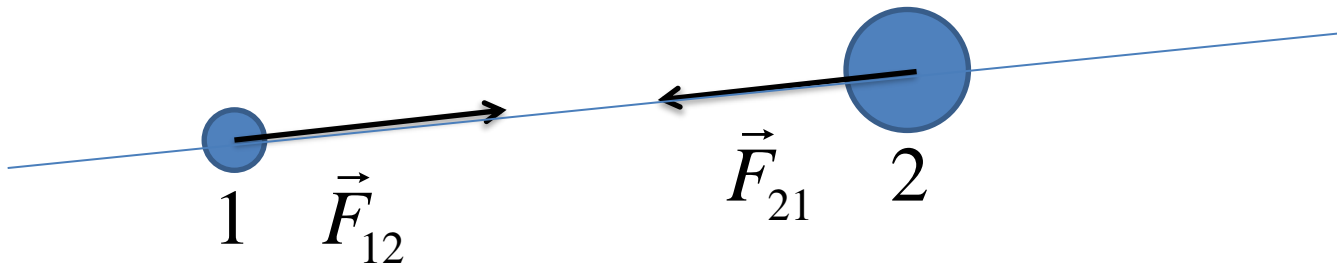
III zasada dynamiki Newtona (zasada akcji i reakcji)

Jeśli ciało nr 1 działa siłą \mathbf{F}_{21} na ciało nr 2, to również ciało nr 2 działa na ciało nr 1 siłą \mathbf{F}_{12} , która ma tę samą wartość i kierunek, ale jest przeciwnie skierowana.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Uwaga: każda z tych dwóch sił działa na inne ciało ! Dlatego te siły nie równoważą się !

Dobry przykład: oddziaływanie grawitacyjne dwóch mas



Ciekawostka: trzy zasady dynamiki w sformułowaniu samego Newtona (tłumaczenie z łaciny W. Natanson)

I zasada dynamiki

Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają tego ciała do zmiany tego stanu.

II zasada dynamiki

Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i odbywa się w kierunku prostej, wzdłuż której siła jest przyłożona.

III zasada dynamiki

Względem każdego działania istnieje przeciwdziałanie skierowane przeciwnie i równe, tj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie:

$$\vec{F} + \vec{F}_R = 0$$

„Newton przyjmował, że istnieje czas absolutny, który płynie sam przez się i dzięki swej naturze, jednostajnie, a niezależnie od jakiegokolwiek przedmiotu zewnętrznego. Newton przyjmował też, że istnieje przestrzeń absolutna, a więc i ruch absolutny. Czas absolutny i przestrzeń absolutna były niezależne od siebie.”

A.K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki, tom 1

Ten pogląd przetrwał do początku XX wieku !

A. Einstein wykazał (STW, OTW), że czas absolutny i przestrzeń absolutna nie istnieją, chociaż w warunkach „życia codziennego” są dobrym przybliżeniem.

Wnioski z zasad dynamiki

- Definicja jednostki siły przez jednostki masy i przyspieszenia. W układzie SI jest to niuton (N)
- Zasadnicze prawo rządzące ruchem cząstki (równanie ruchu Newtona) ma postać wektorowego równania różniczkowego

$$N = \text{kg} \frac{m}{s^2}$$

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right),$$

gdyż w ogólnym przypadku siła może zależeć w sposób jawny od czasu, a także od prędkości i położenia.

(Zakładamy, że nie zależy już od przyspieszenia, ani dalszych pochodnych wektora położenia.)

Niewiadomą jest $\vec{r}(t)$

Równanie wektorowe jest we współrzędnych kartezjańskich równoważne trzem równaniami dla poszczególnych składowych:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F_x(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t)$$

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = F_y(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t)$$

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = F_z(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t)$$

Na ogół równania są sprzężone, co oznacza, że nie można niezależnie rozwiązać równania na współrzędną x , y i z .

Problem jest bardzo trudny z matematycznego punktu widzenia.

W bardzo niewielu przypadkach mamy analityczne rozwiązania.

Najczęściej niebanalne rozwiązania są uzyskiwane za pomocą komputera.

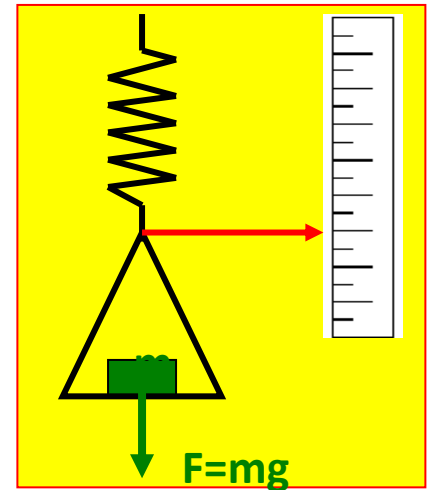
Konkretne rozwiązanie równania wektorowego (lub układu równań skalarnych) wymaga podania warunków początkowych:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

Znając warunki początkowe, w przypadkach określonych przez teorię równań różniczkowych, możemy podać jednoznaczną postać rozwiązania dla dowolnej chwili $t > t_0$.

Dalsze wnioski z zasad dynamiki

- zasadnicza różnica między masą i ciężarem. Masa jest wewnętrzną własnością każdego ciała. Jest ona taka sama na powierzchni Ziemi, na Księżycu, satelicie, czy też w przestrzeni międzygwiazdnej. Masa ciała może zostać wyznaczona przez porównanie ze standardem masy. Masa jest skalarem, a jej jednostką w układzie SI jest kilogram (kg). Ciężar jest siłą z jaką Ziemia przyciąga masę m . Do wyznaczenia ciężaru można posłużyć się sprężyną.



Dalsze wnioski z zasad dynamiki

- Inny sposób zapisu równania ruchu w przypadku stałej masy m

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{r}(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d \vec{r}(t)}{dt} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \equiv \frac{d \vec{p}}{dt}\end{aligned}$$

$$\vec{p} = m \vec{v} = m \frac{d \vec{r}}{dt}$$

pęd cząstki
Jednostką pędu jest $\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Siła jest równa pochodnej pędu po czasie, czyli decyduje o szybkości zmian pędu !

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

To nowe równanie jest bardziej ogólne; pozwala opisać ruch układu o zmiennej masie oraz zachowuje ważność w STW, gdzie zmienia się definicja pędu.

Policzmy całkę po czasie obu stron tego równania w granicach od t_1 do t_2

$$\vec{I}(t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) \equiv \Delta\vec{p}$$

↑
popęd siły

↑
całka z pochodnej

↑
zmiana
pędu ciała

Więzy

Dotychczas rozważaliśmy cząstkę, która w inercyjnym układzie współrzędnych mogła poruszać się w całej przestrzeni pod wpływem przyłożonej siły. Taka cząstka posiada trzy stopnie swobody – do jednoznacznego określenia jej położenia wymagane są trzy parametry (na przykład trzy współrzędne kartezjańskie)

Jeżeli cząstka podczas ruchu pozostaje stale na powierzchni danej równaniem:

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

to liczba stopni swobody takiej cząstki wynosi 2.

Przykład: cząstka poruszająca się po powierzchni kuli:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R_0^2 = 0, \quad R_0 = \text{const}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (R_0 + \alpha t)^2 = 0, \quad R_0, \alpha = \text{const}$$

powierzchnia
kuli o stałym i
zmieniającym
się w czasie
promieniu

Jeżeli cząstka porusza się po krzywej danej przez przecięcie się dwóch powierzchni jej liczba stopni swobody wynosi 1. Wspomniana krzywa może być dana równaniami

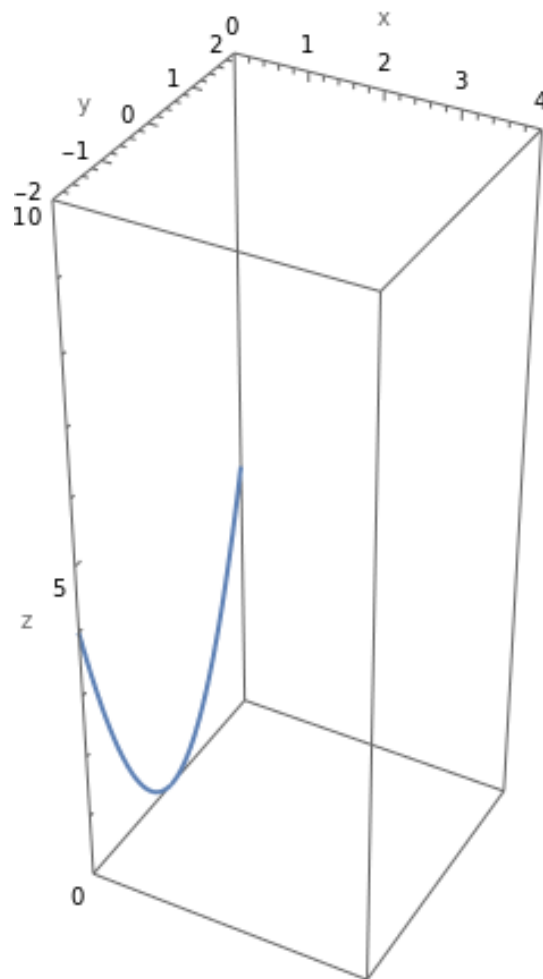
$$f_1(x, y, z, t) = 0$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0$$

Przykład:

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

$$x - \alpha t = 0$$



przecięcie paraboloidy
obrotowej i płaszczyzny
o równaniu $x = \alpha t$

Krzywa może też być zadana w postaci parametrycznej.

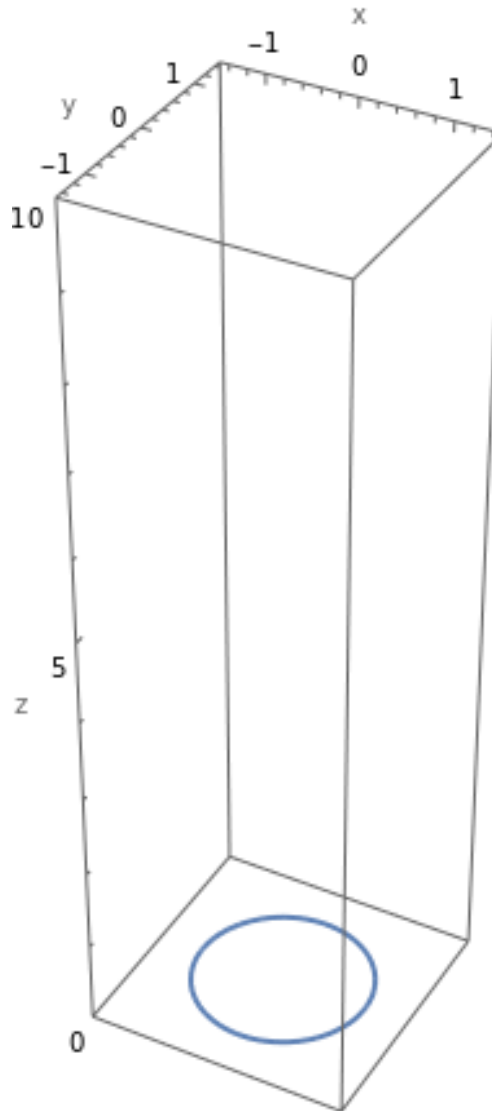
Przykład:

$$x = R \cos(\omega s)$$

$$y = R \sin(\omega s)$$

$$z = k s t,$$

$$R, \omega = \text{const}, s \in [s_1, s_2]$$



spirała o stałym promieniu i powiększającym się skoku

Przyczyny ograniczające ruch cząstki nazywamy **więzami**.
Cząstkę poruszającą się zgodnie z tymi więzami nazywamy cząstką nieswobodną.

Odpowiednie równania powierzchni lub krzywych nazywamy równaniami więzów.

Jeżeli powierzchnia lub krzywa więzów zmienia się w czasie, więzy nazywamy reonomicznymi, czyli niestacjonarnymi.

Jeżeli więzy nie zmieniają się w czasie, więzy nazywamy skleronomicznymi, czyli stacjonarnymi.

Przykłady ruchów w obecności więzów:

ruch koralika nanizanego na drut w kształcie spirali,

ruch po równi pochyłej,

wahadło matematyczne lub sferyczne, ...

Doświadczenie uczy nas, że istnienie więzów oznacza konieczność wprowadzenia w równaniach ruchu, oprócz siły zewnętrznej będącej przyczyną ruchu, także dodatkowej siły, którą więzy działają na poruszającą się cząstkę nieswobodną.

Siłę tą nazywamy również reakcją więzów.

Równanie ruchu cząstki poddanej więzom zapiszemy następująco:

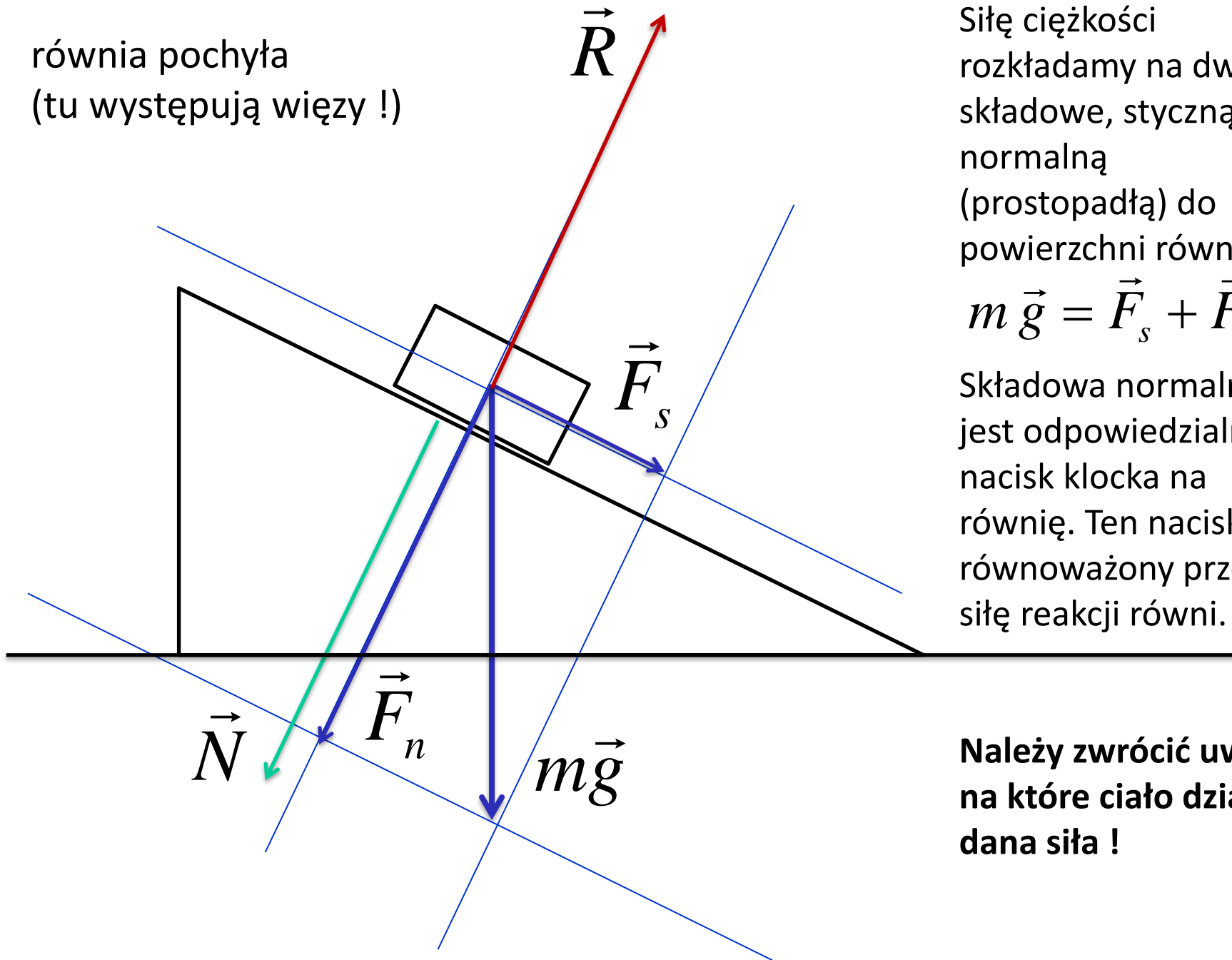
$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{F}_R$$

Z doświadczenia wiemy, że siły reakcji więzów mają kierunek prostopadły do krzywej lub powierzchni definiującej więzy.

W przypadku równowagi ciała w układzie inercyjnym suma wszystkich sił działających na ciało jest równa zeru.

$$\vec{F} + \vec{F}_R = \mathbf{0}$$

równia pochyła
(tu występują więzy !)



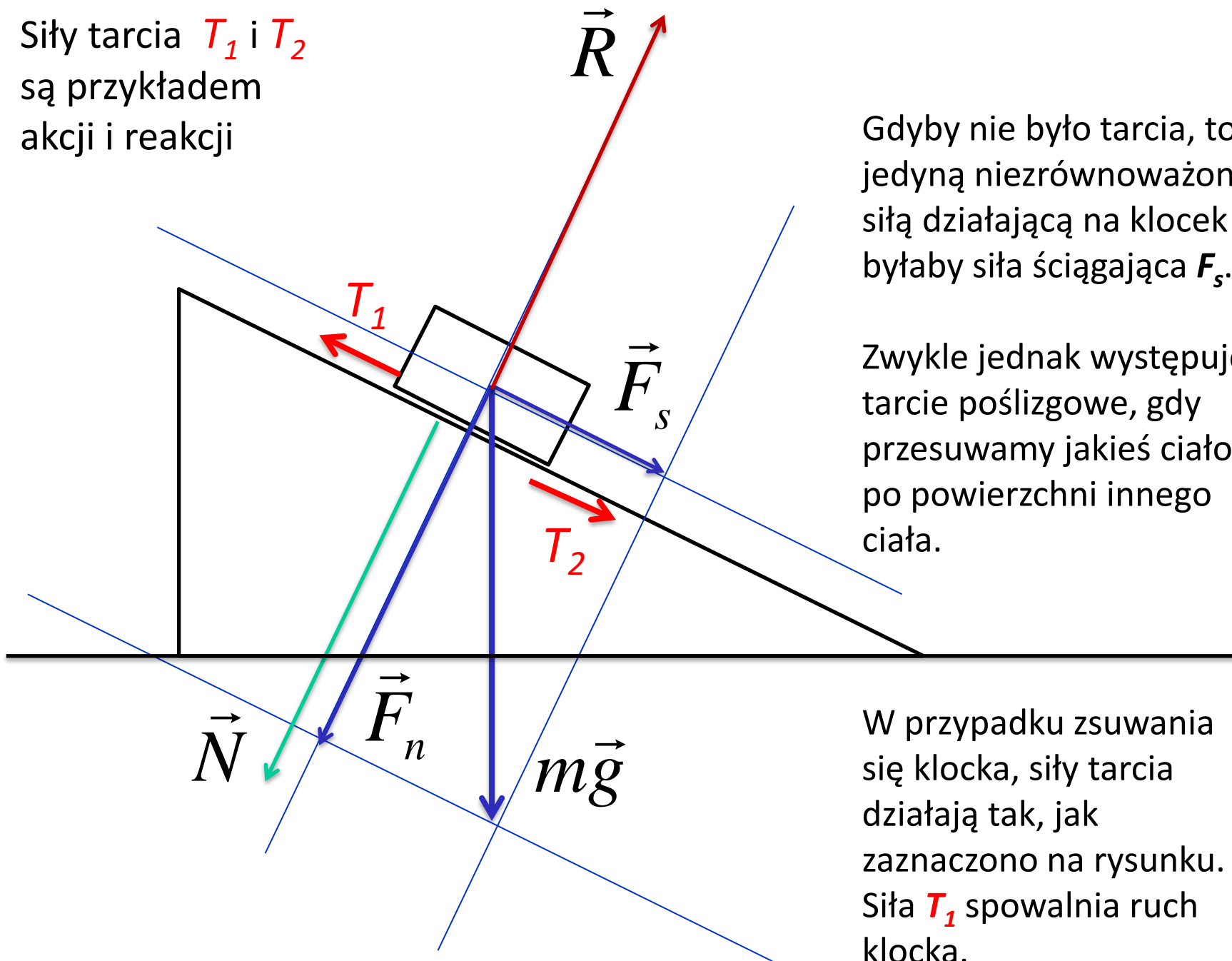
Siłę ciężkości
rozkładamy na dwie
składowe, styczną i
normalną
(prostopadłą) do
powierzchni równi:

$$m \vec{g} = \vec{F}_s + \vec{F}_n$$

Składowa normalna
jest odpowiedzialna za
nacisk klocka na
równię. Ten nacisk jest
równoważony przez
siłę reakcji równi.

**Należy zwrócić uwagę,
na które ciało działa
dana siła !**

Siły tarcia T_1 i T_2
są przykładem
akcji i reakcji



Gdyby nie było tarcia, to
jedyną niezrównoważoną
siłą działającą na klocek
byłaby siła ściągnająca F_s .

Zwykle jednak występuje
tarcie poślizgowe, gdy
przesuwamy jakieś ciało
po powierzchni innego
ciała.

W przypadku zsuwania
się klocka, siły tarcia
działają tak, jak
zaznaczono na rysunku.
Siła T_1 spowalnia ruch
klocka.

Tarcie poślizgowe

Prawa opisujące to zjawisko mają charakter czysto empiryczny – otrzymano je na drodze doświadczalnej.

I prawo

Wartość siły tarcia między dwoma ciałami jest proporcjonalna do wartości siły normalnej utrzymującej te ciała w zetknięciu.

wartość siły tarcia $\longrightarrow T = \mu N$ \longleftarrow wartość siły normalnej

\nwarrow współczynnik tarcia

$\vec{T} \neq \mu \vec{N} !$

Zwrot siły tarcia jest przeciwny do zwrotu wektora prędkości !

Siła normalną, dociskającą ciało do powierzchni, może być ciężar ciała (na powierzchni poziomej) lub jego składowa (na równi).

Tarcie poślizgowe c.d.

II prawo

Przy danej sile normalnej utrzymującej ciała w zetknięciu, siła tarcia poślizgowego nie zależy od powierzchni zetknięcia między dwoma ciałami.

Z doświadczenia wiadomo, że należy wprowadzić dwa rodzaje współczynnika tarcia. Współczynnik tarcia statycznego daje wartość siły, którą należy przewyciężyć, by wprowadzić ciało w ruch. Współczynnik tarcia kinetycznego pomnożony przez wartość siły normalnej daje wartość siły niezbędnej do utrzymania ciała w ruchu jednostajnym.

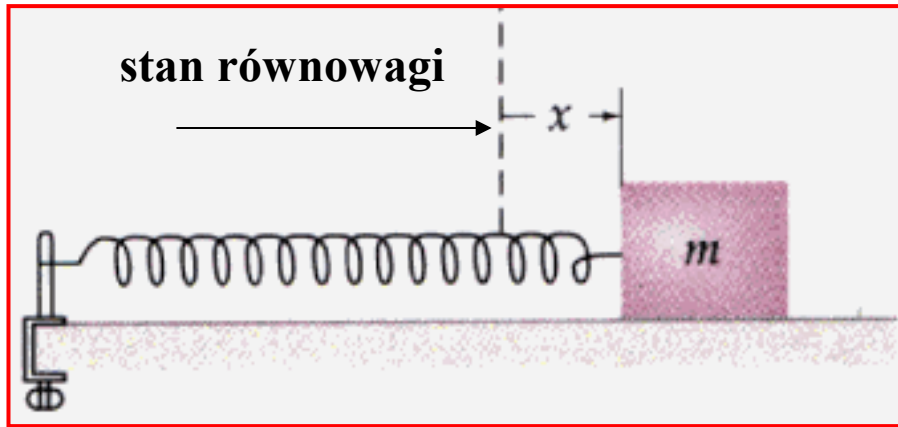
Uwaga: $\mu_s > \mu_k$

III prawo

Dla niezbyt dużych prędkości współczynnik tarcia kinetycznego pozostaje stały.

Przykłady rozwiązywania równań ruchu

Oscylator harmoniczny prosty (masa na sprężynie bez tarcia)



W kierunku pionowym też występują siły, ale siła ciężkości mg jest równoważona przez siłę reakcji podłoża. Dlatego rozpatrujemy tylko ruch w kierunku poziomym !

Przyczepiona do sprężyny masa m zostaje odsunięta z położenia równowagi na odległość x . Rozciągnięcie sprężyny powoduje pojawienie się siły powrotnej, która kieruje masę do położenia równowagi.

$$\vec{F} = -k x \hat{x} \rightarrow F_x = -k x$$

$$m x'' = -k x$$

Ruch w jednym wymiarze:
przykład siły, która zależy
tylko od położenia

Równanie różniczkowe jest bardzo proste – szukamy funkcji, której druga pochodna jest proporcjonalna do samej funkcji, a współczynnik proporcjonalności jest ujemny.

Rozwiązanie ogólne można zapisać na przynajmniej trzy różne sposoby:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$x(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Stałe $((A_1, \phi_1)$ lub (A_2, ϕ_2) lub $(A, B))$ wyznaczamy z warunków początkowych $x(t=0)=x_0$, $x'(t=0)=v_0$.



Oscylator harmoniczny prosty z realistycznym tarciem

Rozważamy klocek, który porusza się w jednym wymiarze pod wpływem dwóch sił:

- (1) siły pochodzącej od sprężyny o stałej sprężystości k ,
- (2) siły tarcia o własnościach znanych z codziennego doświadczenia. Ta siła tarcia "dopasowuje się" do siły sprężyny i nie pozwala ruszyć klocka z miejsca, jeśli $|k x| \leq T_s$. Gdy klocek się porusza, siła tarcia jest oczywiście skierowana przeciwnie do kierunku prędkości i ma wartość $T_k < T_s$.

Rozwiązanie (numeryczne !) podałem w notatniku

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/oscylator_harmoniczny_prosty_z_realistycznym_tarciem.nb



Oscylator przestrzenny

(masa na sprężynie o zaniedbywalnej długości i masie, której drugi koniec jest przymocowany w początku układu współrzędnych)

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

$$m x'' = -k x$$

$$m y'' = -k y$$

$$m z'' = -k z$$

W każdym punkcie przestrzeni na punkt materialny działa siła skierowana do początku układu współrzędnych. Jest to przykład **siły centralnej**, a początek układu stanowi w danym przypadku **centrum siły**.

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

częstość oscylatora,
taka sama w każdym
kierunku → oscylator
izotropowy

Rozwiązanie w każdym wymiarze ma tę samą postać

$$x(t) = A_x \cos(\omega t) + B_x \sin(\omega t),$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega t) + B_y \sin(\omega t),$$

$$z(t) = A_z \cos(\omega t) + B_z \sin(\omega t)$$

Aby wprowadzić warunki początkowe, wygodniej jest ten wynik zapisać w postaci wektorowej:

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{A} + \sin(\omega t) \vec{B} \rightarrow \vec{r}(t=0) = \vec{A} = \vec{r}_0$$

$$\vec{v}(t) = -\omega \sin(\omega t) \vec{A} + \omega \cos(\omega t) \vec{B} \rightarrow \vec{v}(t=0) = \omega \vec{B} = \vec{v}_0$$

$$\rightarrow \vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{r}_0 + \sin(\omega t) \frac{\vec{v}_0}{\omega}$$

Ruch jest płaski i odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory położenia początkowego i prędkości początkowej. Można pokazać, że jest to ruch po elipsie, która ma środek w początku układu współrzędnych !

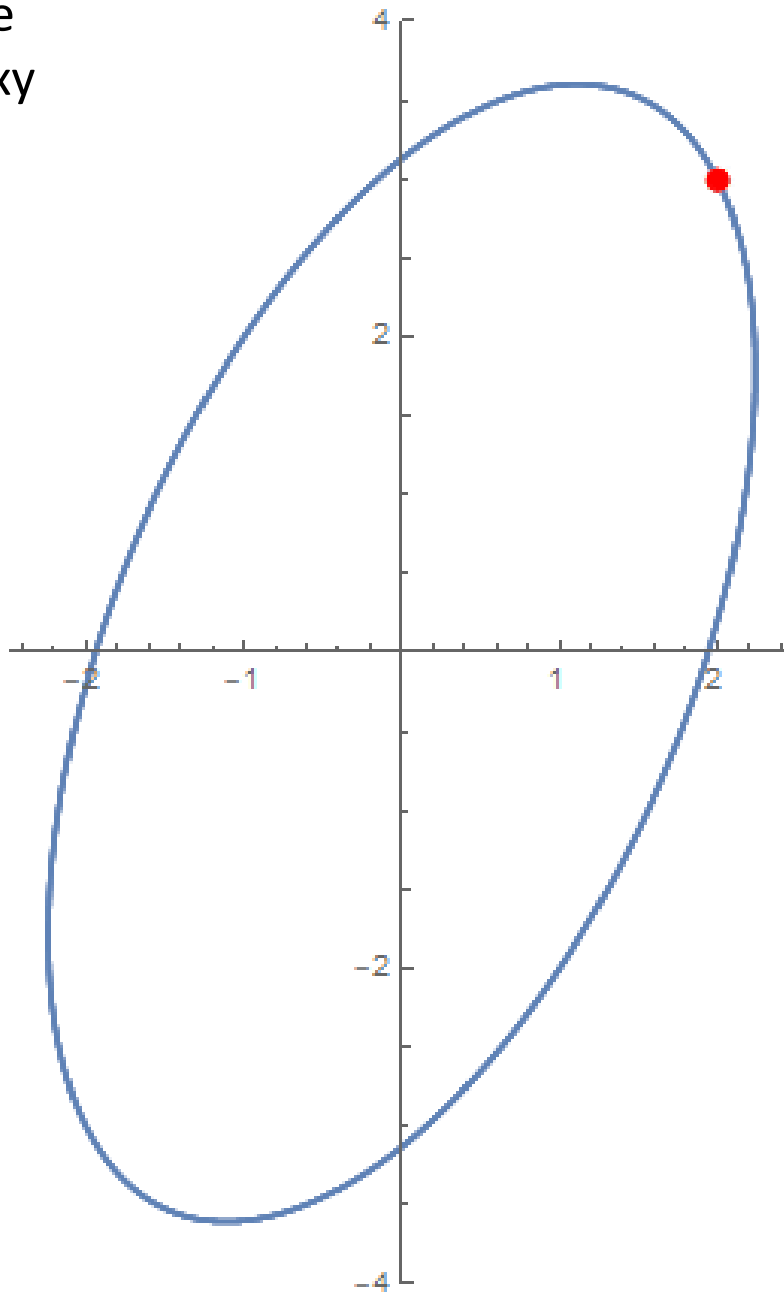
Ruch jest płaski, więc w tym przykładzie wybieram oba wektory w płaszczyźnie xy

$$\vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{r}_0 + \sin(\omega t) \frac{\vec{v}_0}{\omega}$$

$$\vec{r}_0 = (2, 3)$$

$$\vec{v}_0 = (1, -2)$$

$$\omega = \pi$$



Rzut ukośny z wysokości H z prędkością początkową v_0 pod kątem Θ do poziomu bez oporu powietrza

Ten przypadek jest szczególnie prosty, bo trywialne równania różniczkowe na każdą ze współrzędnych rozwiązujemy niezależnie od siebie.

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

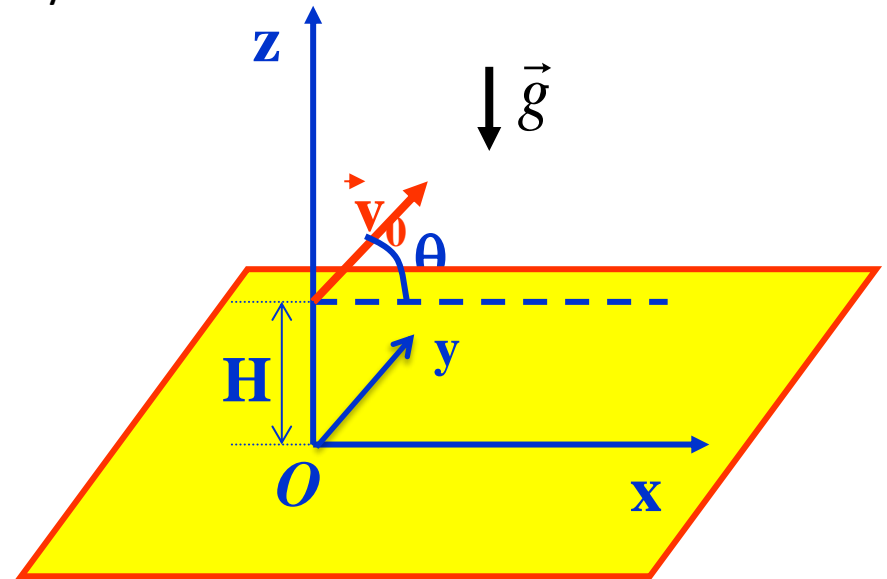
$$\vec{g} = (0,0,-g) = \text{const}, g > 0$$

$$(x'', y'', z'') = (0,0,-g)$$

$$x'' = 0 \rightarrow x = c_1 t + c_2$$

$$y'' = 0 \rightarrow y = c_3 t + c_4$$

$$z'' = -g \rightarrow z = c_5 t + c_6 - \frac{1}{2} g t^2$$



Rozwiązanie ogólne zależy od stałych c_1, c_2, \dots, c_6 .

Nie zależy w ogóle od masy m ! Gdyby nie było oporu powietrza ruch ciała nie zależałby od jego masy.

Warunki początkowe dla rzutu ukośnego w płaszczyźnie xz:

$$x(t = 0) = c_2 = 0$$

$$x'(t = 0) = c_1 = v_0 \cos(\theta)$$

$$y(t = 0) = c_4 = 0$$

$$y'(t = 0) = c_3 = 0$$

$$z(t = 0) = c_6 = H$$

$$z'(t = 0) = c_5 = v_0 \sin(\theta)$$

Rozwiązanie szczególne, uwzględniające warunki początkowe:

$$x = c_1 t + c_2 = v_0 \cos(\theta) t$$

$$y = c_3 t + c_4 = 0$$

$$z = c_5 t + c_6 - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin(\theta) t + H - \frac{1}{2} g t^2$$

Rzut ukośny z wysokości H z prędkością początkową v_0 pod kątem Θ do poziomu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości

Teraz mamy do czynienia z równaniami różniczkowymi liniowymi o stałych współczynnikach, które wciąż można rozwiązać stosunkowo łatwo, niezależnie dla każdej współrzędnej z osobna.

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

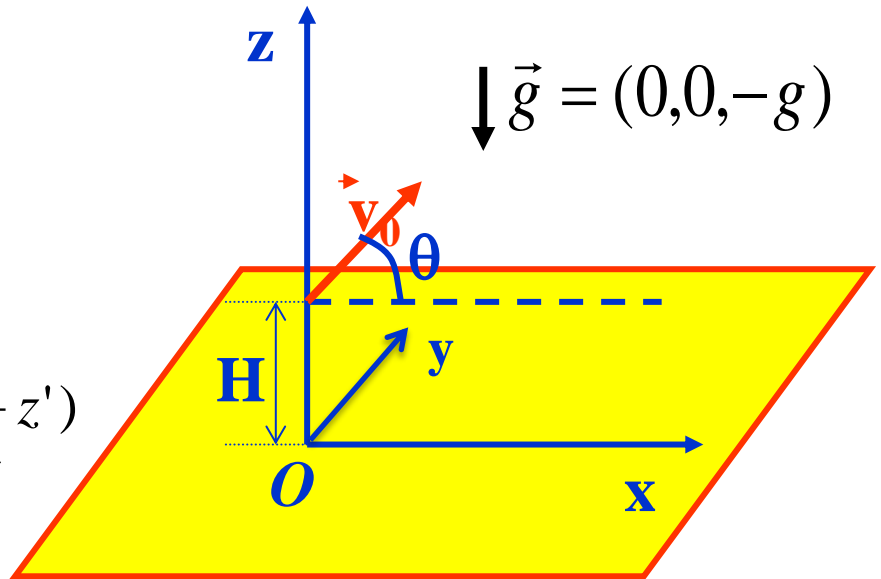
$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

$$(x'', y'', z'') = \left(-\frac{k}{m}x', -\frac{k}{m}y', -g - \frac{k}{m}z'\right)$$

$$x'' = -\frac{k}{m}x' \rightarrow x = -\frac{m}{k}c_1 e^{-\frac{kt}{m}} + c_2$$

$$y'' = -\frac{k}{m}y' \rightarrow y = -\frac{m}{k}c_3 e^{-\frac{kt}{m}} + c_4$$

$$z'' = -g - \frac{k}{m}z' \rightarrow z = -\frac{gm}{k}t - \frac{m}{k}c_5 e^{-\frac{kt}{m}} + c_6$$



Rozwiązanie ogólne zależy od stałych c_1, c_2, \dots, c_6 .

Zależy także od masy m !

Nie zmieniają się warunki początkowe dla rzutu ukośnego w płaszczyźnie xz, ale stałe c_1, c_2, \dots, c_6 trzeba wyznaczyć z innych równań:

$$x(t=0) = c_2 - \frac{m}{k} c_1 = 0$$

$$x'(t=0) = c_1 = v_0 \cos(\theta)$$

$$y(t=0) = c_4 - \frac{m}{k} c_3 = 0$$

$$y'(t=0) = c_3 = 0$$

$$z(t=0) = c_6 - \frac{m}{k} c_5 = H$$

$$z'(t=0) = c_5 - \frac{g m}{k} = v_0 \sin(\theta)$$

Rozwiązanie szczególne, uwzględniające warunki początkowe:

$$x = -\frac{m}{k} c_1 e^{-\frac{kt}{m}} + c_2 = \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \frac{m}{k} v_0 \cos(\theta)$$

$$y = -\frac{m}{k} c_3 e^{-\frac{kt}{m}} + c_4 = 0$$

$$z = -\frac{gm}{k} t - \frac{m}{k} c_5 e^{-\frac{kt}{m}} + c_6 =$$

$$H - \frac{gm}{k} t + \frac{m}{k^2} (m g + k v_0 \sin(\theta))$$

$$- \frac{m}{k^2} e^{-\frac{kt}{m}} (m g + k v_0 \sin(\theta))$$

Te wyniki mają zupełnie inny charakter niż poprzednie, uzyskane bez oporu powietrza. W szczególności zasięg w kierunku x jest ograniczony, a prędkość spadku w dół zmierza do pewnej wartości granicznej !

$$0 < x < \frac{m}{k} v_0 \cos(\theta) \equiv x_{\max}$$

$$z' \equiv v_z \rightarrow -\frac{m g}{k} \equiv v_{gr}$$

Rzut ukośny z wysokości H z prędkością początkową v_0 pod kątem Θ do poziomu z oporem powietrza proporcjonalnym do $|\vec{v}|^{(\gamma+1)}$, czyli do dowolnej potęgi wartości wektora prędkości

(dla $\gamma=0$ mamy poprzedni przypadek oporu proporcjonalnego do prędkości)

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k|\vec{v}|^\gamma \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{k}{m}|\vec{v}|^\gamma \vec{v} = \vec{g} - \frac{k}{m} \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} \vec{v}$$

$$x'' = -\frac{k}{m} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} x'$$

$$y'' = -\frac{k}{m} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} y'$$

$$z'' = -g - \frac{k}{m} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} z'$$

Teraz mamy do czynienia z nieliniowym układem sprzężonych równań różniczkowych, który w ogólnym przypadku można rozwiązać tylko numerycznie. Rozwiązanie analityczne (w postaci jawnego wzoru) nie jest znane !

Polecam notebook z rozwiązaniami analitycznymi i numerycznymi dla różnych przypadków rzutu ukośnego:

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/rzut_ukosny.nb

Polecam także notebook z rozwiązaniami analitycznymi dla ruchu cząstki w stałym polu magnetycznym::

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/ruch_w_stalym_polu_magnetycznym.nb