

Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 5

Na poprzednim wykładzie rozważaliśmy ważne definicje oraz prawa zachowania, najpierw dla pojedynczego punktu materialnego, potem dla układu punktów materialnych.

Tak się składa, że specjalną rolę w dynamice grają dwa przypadki

(1) dwa oddziałujące punkty materialne

Pokażemy, że ten przypadek da się sprowadzić do przypadku jednego punktu materialnego, na który działa siła zewnętrzna

(2) bryła sztywna, czyli taki układ (nieprzeliczalnie wielu) punktów materialnych, których wzajemne odległości są stałe

Tu konieczne będzie wprowadzenie dodatkowych wielkości charakteryzujących rozkład przestrzenny masy → moment bezwładności

Problem dwóch oddziałujących punktów materialnych izolowanych od reszty wszechświata

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

III zasada dynamiki Newtona

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = 0$$

$$\rightarrow M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0, \quad M \equiv m_1 + m_2, \quad \vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0$$

równanie jak dla cząstki o masie M,
na którą nie działa żadna siła
Rozwiązanie to ruch jednostajny
prostoliniowy !

$$\rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t, \quad \vec{R}_0 = \vec{R}(t = 0), \quad \vec{V}_0 = \vec{V}(t = 0)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{\vec{F}_{21}}{m_1}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_{21} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right)$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

masa
zredukowana

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

wektor położenia
względego

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}$$

równanie jak dla cząstki o masie μ ,
na którą działa siła \vec{F}_{21} !

Problem dwóch oddziałujących punktów materialnych sprowadziliśmy
do problemu jednej cząstki !

Zamiast rozwiązywać $m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{F}_{21},$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21},$$

rozwiązujemy znacznie prostsze równania $M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0,$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}.$$

Jest to ogólniejszy fakt: problem znalezienia wektorów położenia N oddziałujących cząstek (izolowanych od reszty wszechświata) sprowadza się do znalezienia $(N-1)$ wektorów opisujących względne położenie N cząstek.

Jeśli znajdziemy rozwiązanie dla wektora \vec{r} ,
wtedy z układu równań

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M},$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

dostajemy

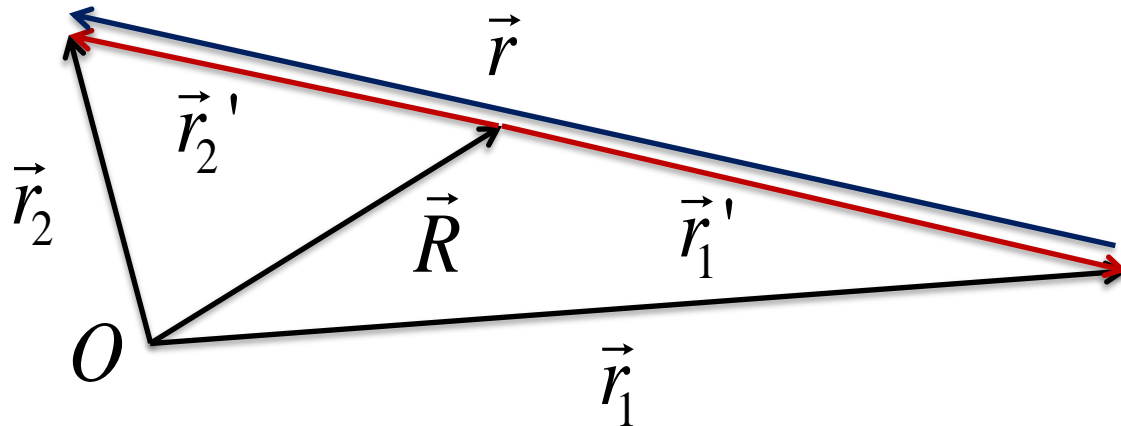
$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2 \vec{r}}{M},$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1 \vec{r}}{M}.$$

Z tych wyrażeń łatwo dostajemy wektory położenia względem środka masy:

$$\vec{r}_1' \equiv \vec{r}_1 - \vec{R} = -\frac{m_2 \vec{r}}{M},$$

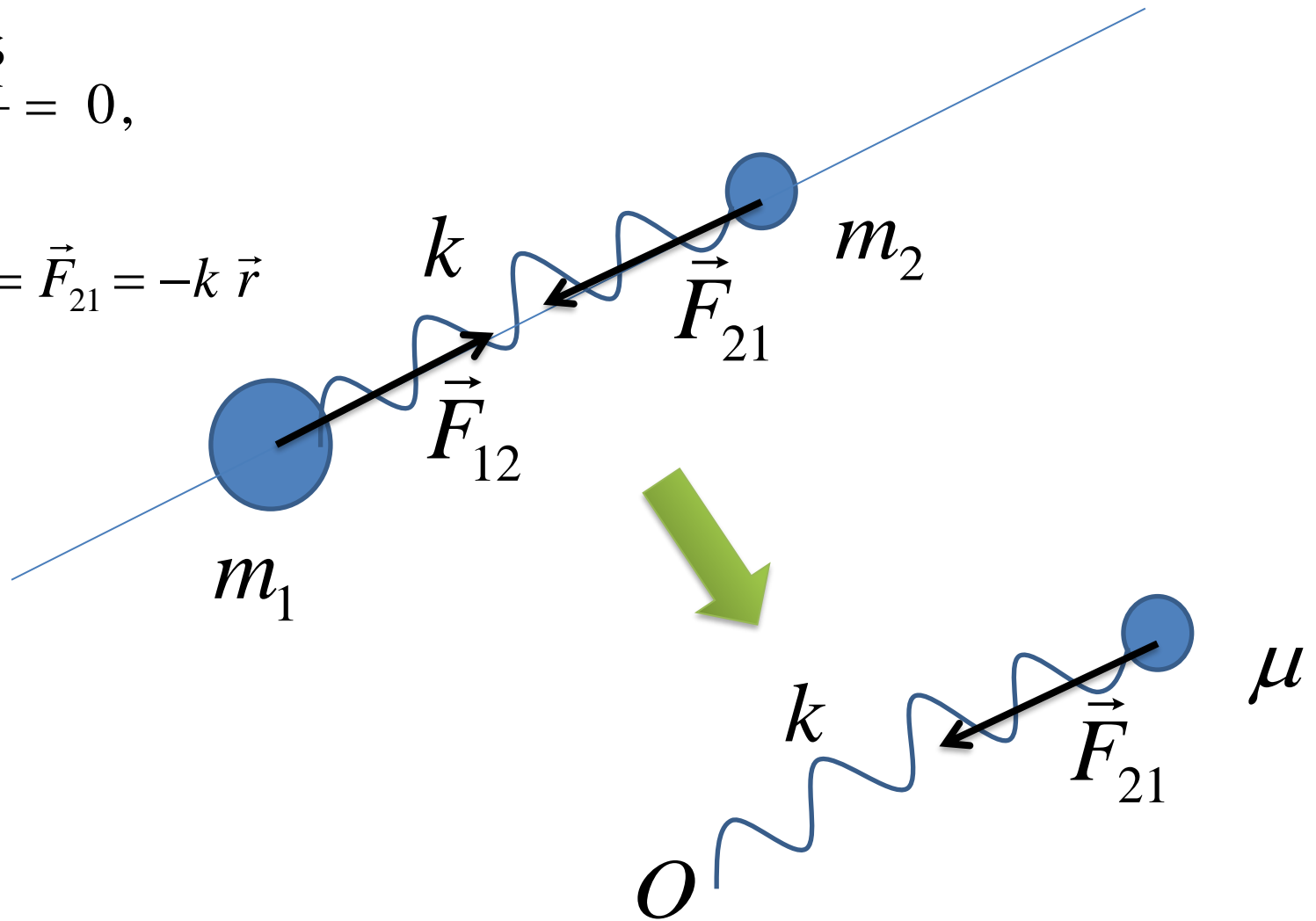
$$\vec{r}_2' \equiv \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}}{M}.$$

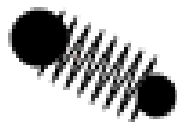


Przykład: dwie masy połączone nieważką sprężyną na gładkim stole

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0,$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -k \vec{r}$$





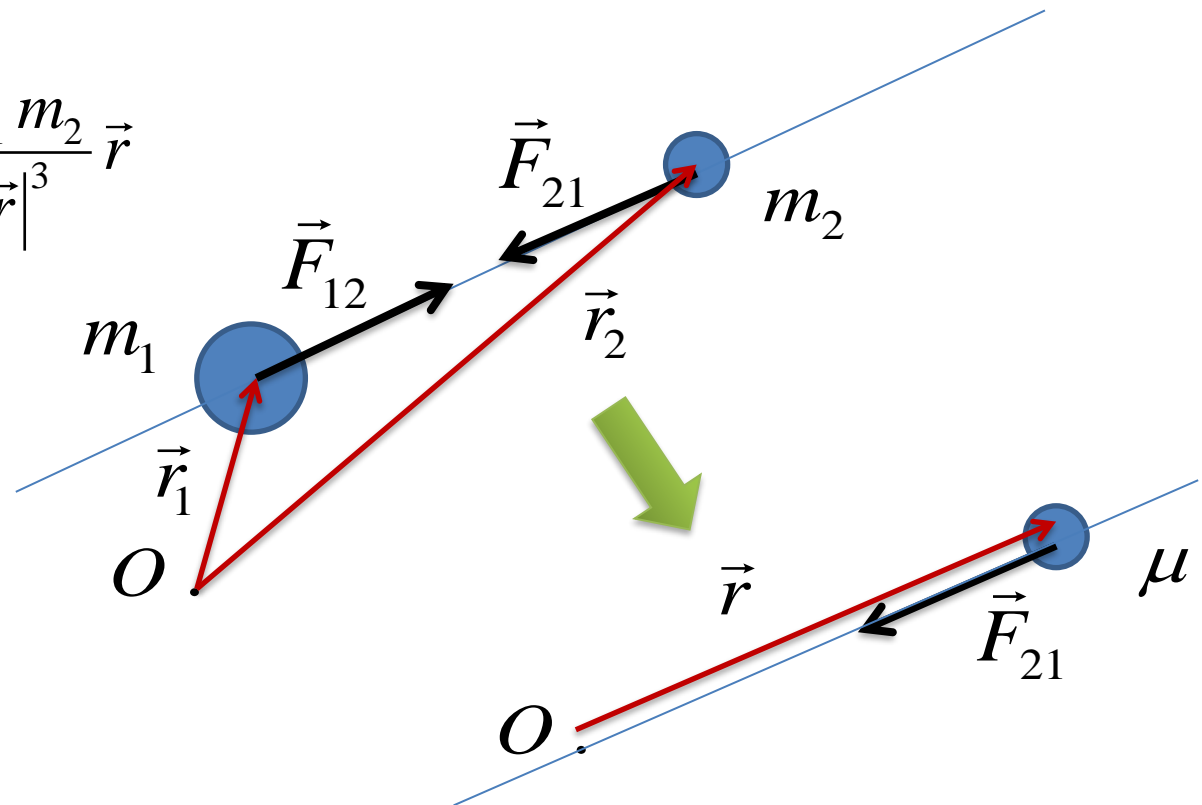
Środek masy układu
porusza się ruchem
jednostajnym po linii
prostej !

Najważniejszy przykład problemu dwóch ciał: zagadnienie Keplera

problem dwóch punktów materialnych izolowanych od reszty wszechświata i oddziałujących zgodnie z prawem powszechnego ciążenia

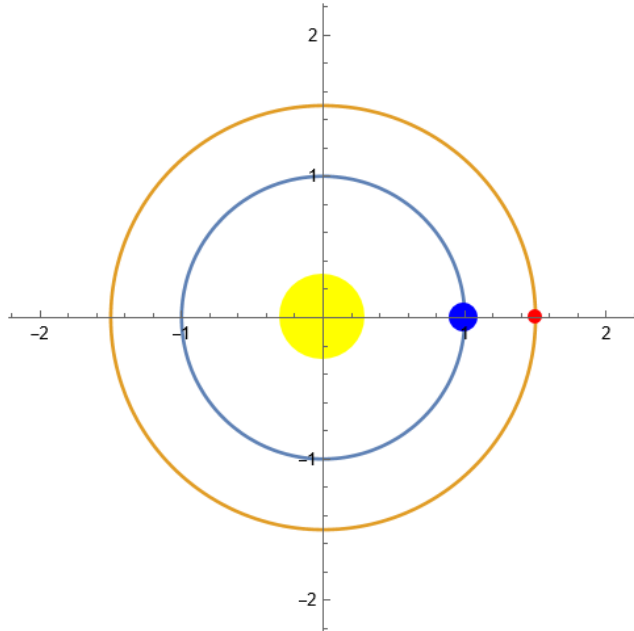
$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0,$$

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$

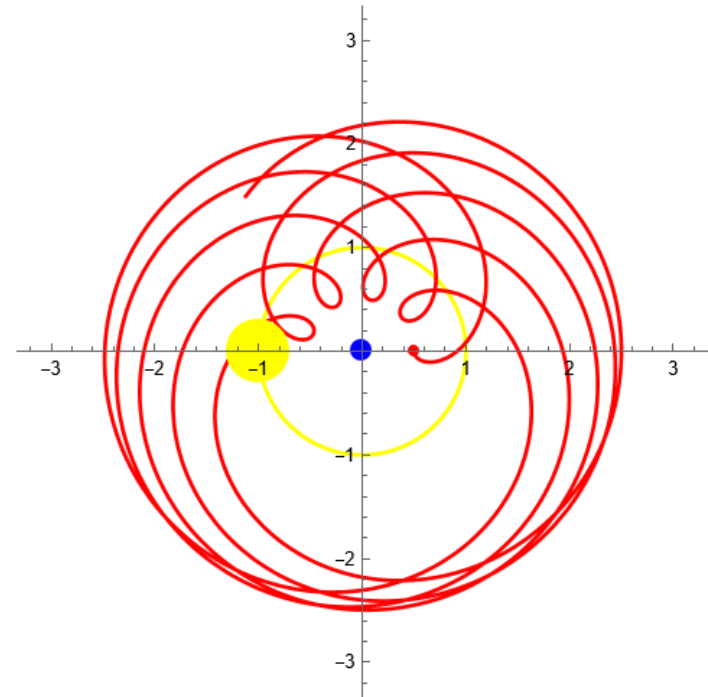


Uproszczony układ Słońce-Ziemia-Mars

(Słońce, Ziemia i Mars to punkty materialne; planety poruszają się wokół Słońca po orbitach kołowych, ...)



... widziany przez obserwatora zawieszonoego nad Układem Słonecznym

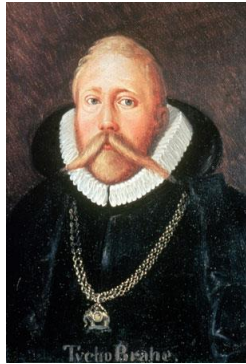


... widziany przez obserwatora związanego z Ziemią

Chcemy udowodnić trzy prawa Keplera, dotyczące ruchu planet wokół Słońca.

Uwaga: prawa te rozpatrują z osobna układ dwóch ciał, Słońce + planeta; nie traktują Układu Słonecznego jako całości. W szczególności nie uwzględniają oddziaływań grawitacyjnych między planetami.

Źródło: „Wikipedia”

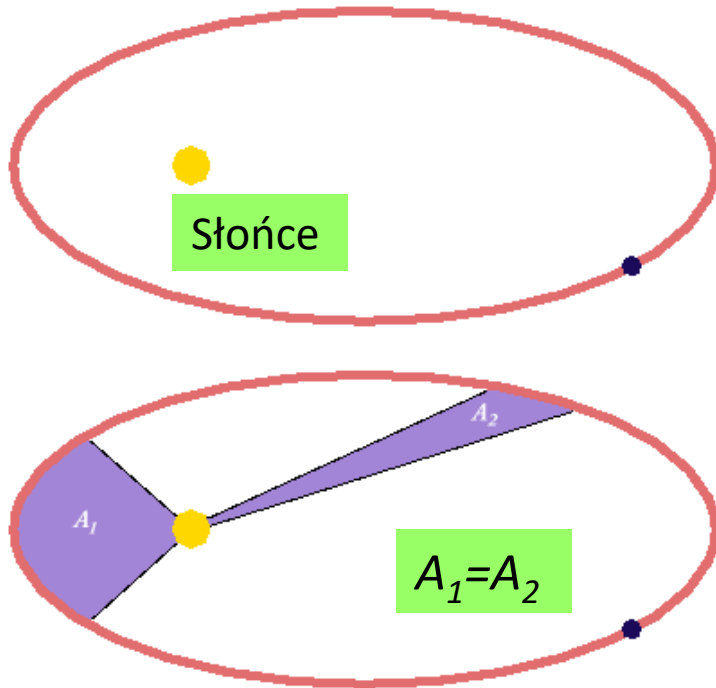


W końcu XVI wieku Tycho Brahe (1546-1601) zgromadził obszerne i pewne dane obserwacyjne dotyczące położenia planet. Pracował wiele lat w obserwatorium na wyspie Hven koło Kopenhagi.



Na początku XVII wieku jego pomocnik i uczeń, Johannes Kepler (1571 – 1630) opracował dane obserwacyjne Tycho Brahe i sformułował prawa dotyczące ruchu planet dookoła Słońca.

Prawa Keplera



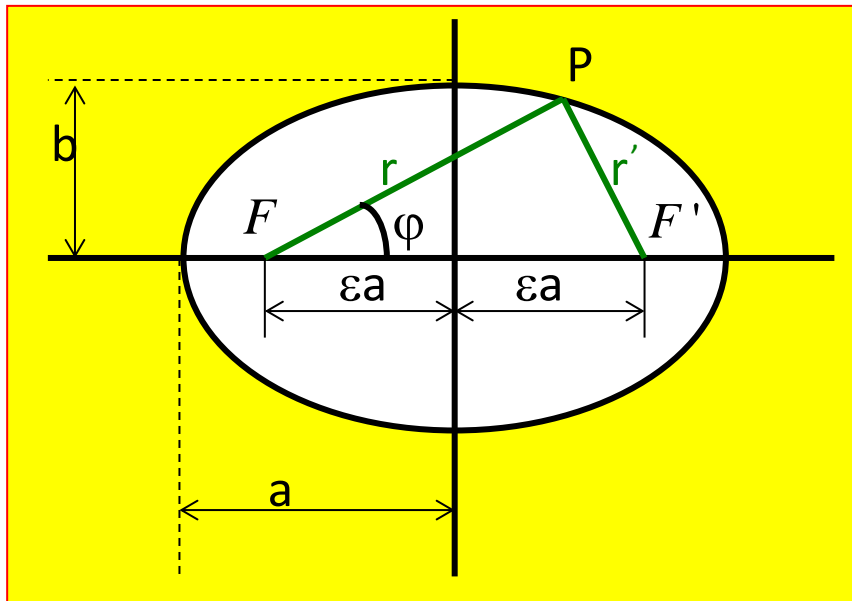
$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \dots = \text{const}$$

1. Planety poruszają się dookoła Słońca po elipsach, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.

2. Promień wodzący od Słońca do planety zatacza w tych samych odcinkach czasu te same pola powierzchni.

3. Stosunek kwadratu okresu obiegu planety dookoła Słońca do trzeciej potęgi dłuższej półosi elipsy jest równy dla wszystkich orbit planetarnych.

Własności elipsy



Dla każdego punktu elipsy
suma odległości od obu
ognisk, $r + r' = 2a = \text{const}$

ϵ to tzw. mimośród elipsy. Im jest większy, tym bardziej elipsa różni się od okręgu. Dla $\epsilon=0$ mamy okrąg. Orbity planet w naszym Układzie Słonecznym mają bardzo niewielkie mimośrody. Tylko dla Merkurego $\epsilon > 0.02$

Elipsa posiada dwie półosie, dużą i małą, oraz dwa ogniska.
W układzie biegunowym
równanie elipsy ma postać:

$$r = \frac{k}{a + \epsilon \cos \varphi}$$

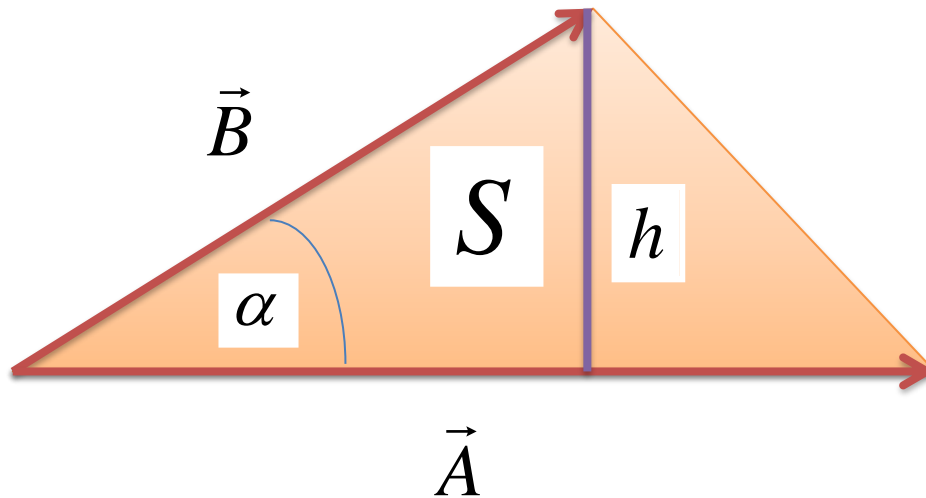
przy czym,

$$k = a(1 - \epsilon^2)$$

$$\epsilon^2 = a^2 - b^2$$

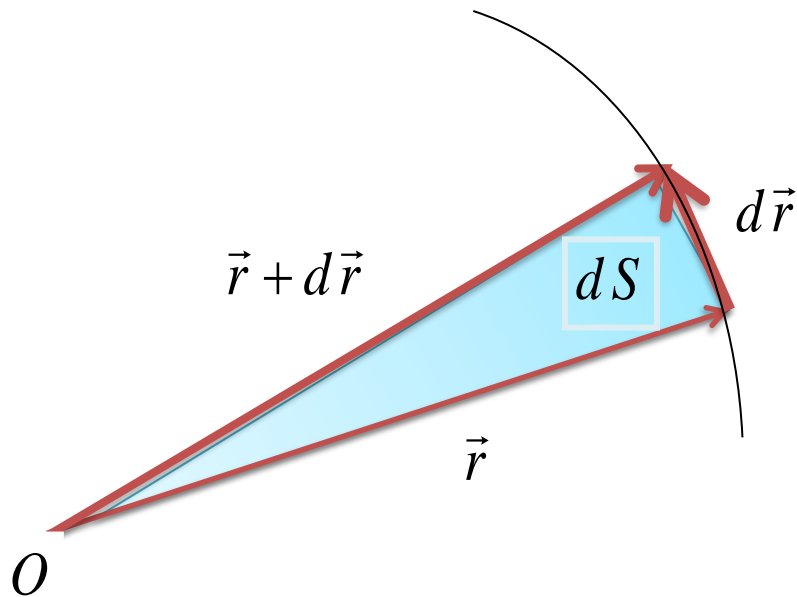
Pytanie pomocnicze do II prawa Keplera:

Ile wynosi pole powierzchni S rozpiętej na dwóch wektorach ?
(pole trójkąta)



$$S = \frac{1}{2} |\vec{A}| h = \frac{1}{2} |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

W takim razie element powierzchni dS/dt można policzyć tak:



$$\begin{aligned}
 dS &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times (\vec{r} + d\vec{r})| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| \\
 &= \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2\mu} |\vec{r} \times \vec{p} dt| \\
 \rightarrow \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2\mu} |\vec{r} \times \vec{p}| \equiv \frac{1}{2\mu} |\vec{L}| = \text{const}
 \end{aligned}$$

Udowodniliśmy ogólniejsze twierdzenie, że tzw. prędkość polowa jest stała dla ruchu pod wpływem siły centralnej!
Nie tylko dla ruchu po elipsie.

moment pędu jest stałym wektorem dla siły centralnej

Jakie inne wielkości są zachowane w zagadnieniu Keplera oprócz wektora momentu pędu ?

Siła jest zachowawcza, więc zachowana musi być całkowita energia mechaniczna:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|}$$
$$\equiv \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - G \frac{m_1 m_2}{r} = const \equiv E_0$$

Okazuje się, że w przypadku siły grawitacyjnej istnieje trzecia niezależna wielkość, która jest stała w czasie. Jest to wektor Laplace'a-Runge'go-Lenza, czyli wektor LRL:

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{\underbrace{\mu G m_1 m_2}_k} \vec{L} \times \vec{p} \equiv \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{\mu k} \vec{L} \times \vec{p}$$

Fakt, że wektor LRL jest stały w czasie wygodnie jest pokazać w układzie biegunowym. Przypomnijmy, że w tym układzie zachodzi

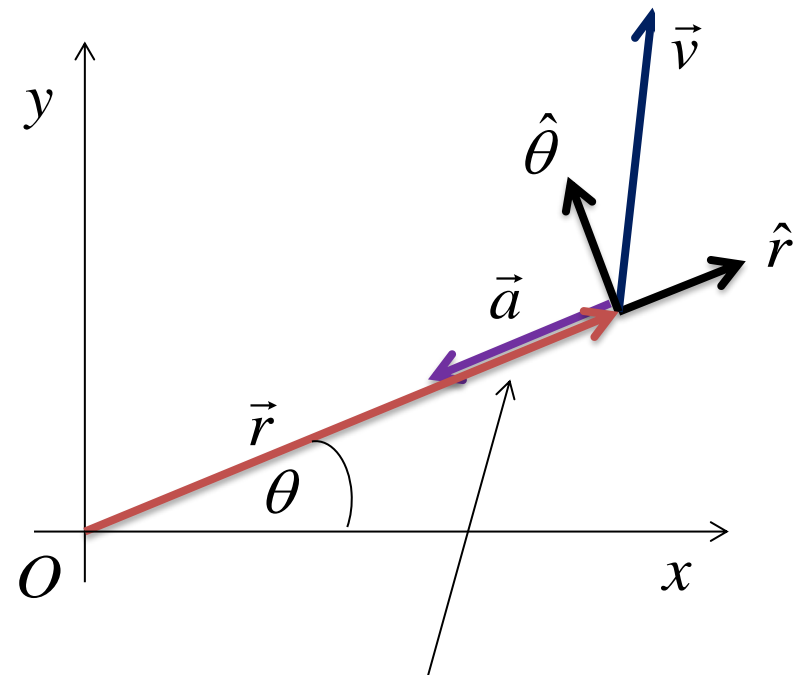
$$\vec{r} = r \hat{r},$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{r}$$

$$+ \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \hat{\theta}$$

$$\mu \vec{a} = \mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \vec{r}$$



Siła jest centralna, więc przyspieszenie ma tylko składową radialną

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r \hat{r} \times \mu \left(\frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right) = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \underbrace{\hat{r} \times \hat{\theta}}_{\hat{z}} \equiv L_0 \hat{z} = \text{const}$$

$$\mu a_r = \mu \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = F_r = -\frac{k}{r^2},$$

składowa radialna
dla II zasady dynamiki Newtona:
siła ma tylko składową radialną

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} = F_\theta = 0 \leftrightarrow \frac{1}{r\mu} \frac{dL_0}{dt} = 0$$

składowa transwersalna
dla II zasady dynamiki Newtona:
brak składowej transwersalnej siły
jest równoważny temu, że wektor
momentu pędu ma stałą wartość

Jeśli wektor LRL jest stały w czasie, to jego pochodna po czasie jest równa zero !

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{\mu k} \vec{L} \times \vec{p}, \quad k = G m_1 m_2$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{r\vec{v} - \frac{dr}{dt}\vec{r}}{r^2} + \frac{1}{\mu k} \frac{d\vec{L}}{dt} \times \vec{p} + \frac{1}{\mu k} \vec{L} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= \frac{r\left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right) - r\frac{dr}{dt}\hat{r}}{r^2} + \frac{1}{\mu k} \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \hat{z} \times \left(-\frac{k}{r^2}\right)\hat{r} \\ &= \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} - \frac{d\theta}{dt} \hat{z} \times \hat{r} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} - \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} = 0 \rightarrow \vec{A} = const \end{aligned}$$

Wektor LRL jest stały i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory położenia i prędkości. Kwadrat jego długości też musi być stały i wynosi:

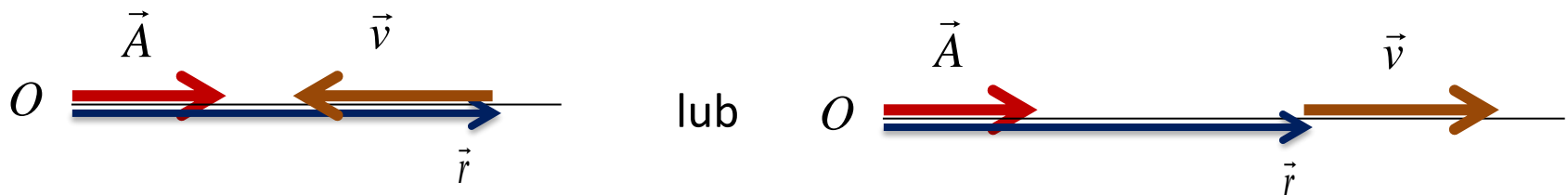
$$\vec{A}^2 = \dots = 1 + \frac{2L_0^2 E_0}{\mu k^2} \equiv \varepsilon^2 = \text{const}$$

Trzeba rozpatrzyć dwa główne przypadki:

- (1) $L_0 = 0$
- (2) $L_0 \neq 0$

Przypadek (1) oznacza ruch, w którym wektor pędu jest równoległy do wektora położenia, czyli ruch odbywa się cały czas wzdłuż jednej linii

$$\vec{A} = \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r} = \text{const}$$



W przypadku (2), gdy moment pędu jest różny od zera, możemy wyprowadzić równanie toru we współrzędnych biegunowych:

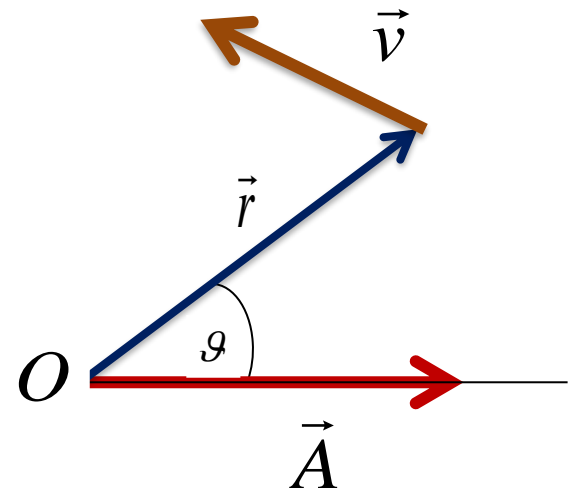
$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \frac{1}{\mu k} \vec{r} \cdot (\vec{L} \times \vec{p})$$

$$= r - \frac{1}{\mu k} \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = r - \frac{L_0^2}{\mu k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = |\vec{A}| r \cos \vartheta = \varepsilon r \cos \vartheta$$

$$\rightarrow r (1 - \varepsilon \cos \vartheta) = \frac{L_0^2}{\mu k} \equiv h$$

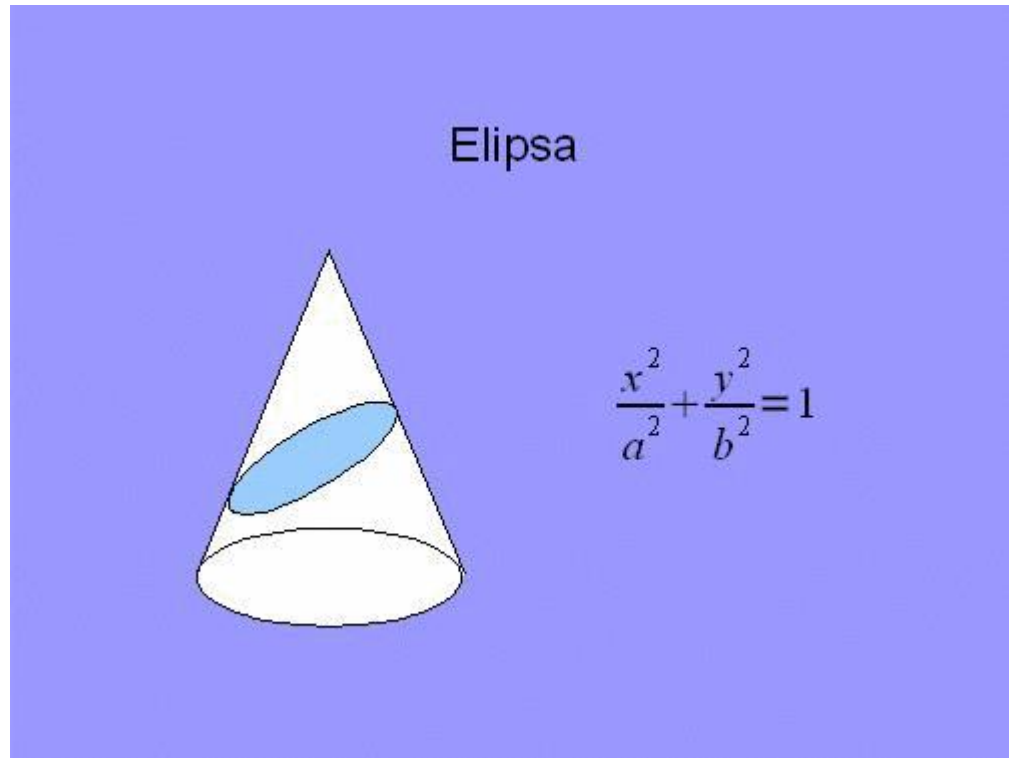
$$\rightarrow r = \frac{h}{1 - \varepsilon \cos \vartheta} \quad \leftarrow$$



równanie krzywej stożkowej we współrzędnych biegunowych, czyli krzywej, która jest częścią wspólną powierzchni bocznej stożka i płaszczyzny

Krzywe stożkowe wg strony

<http://www.zobaczycmatematyke.krak.pl/przyklady/Kukula/index.html>



„Wyróżnia się następujące krzywe stożkowe, zależnie od kąta, jaki tworzy płaszczyzna przecinająca z osią stożka i jego tworzącą:

- elipsa - gdy kąt pomiędzy płaszczyzną przecinającą a osią stożka jest większy od kąta między tworzącą a osią stożka,*
- okrąg - szczególny przypadek dla elipsy; powstaje, gdy wspomniany kąt jest prosty, czyli płaszczyzna tnąca jest prostopadła do osi stożka,*
- parabola - jeżeli kąt pomiędzy płaszczyzną tnącą a osią stożka jest równy kątowi pomiędzy osią stożka a jego tworzącą, czyli tworząca jest równoległa do płaszczyzny tnącej,*
- hiperbola - Jeżeli kąt pomiędzy płaszczyzną tnącą a osią stożka jest mniejszy od kąta pomiędzy osią stożka a jego tworzącą; powstaje również, gdy płaszczyzna tnąca jest równoległa do osi stożka, ale nie obejmuje tej osi.”*

<http://www.zobaczycmatematyke.krk.pl/przyklady/Kukula/index.html>

autor: Damian Kukuła (II rok - IM UJ)

Możliwe są różne przypadki (\rightarrow różne krzywe !)

Rodzaj krzywej stożkowej opisującej tor cząstki zależy od energii całkowitej (E_0) oraz długości wektora momentu pędu ($L_0 > 0$)

$$r = \frac{h}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E_0}{\mu k^2}}$$

$$h \equiv \frac{L_0^2}{\mu k}$$

$$k = G m_1 m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(a) $E_0 < 0 \rightarrow \varepsilon < 1$

Mamy równanie elipsy i dowód I prawa Keplera !
Punkty materialne są ze sobą związane siłami grawitacyjnymi (tworzą układ związany).

Szczególnym przypadkiem elipsy jest okrąg, gdy E_0 jest najmniejszą możliwą energią całkowitą przy ustalonej wartości L_0 :

$$1 + \frac{2L_0^2 E_0}{\mu k^2} = 0 \rightarrow E_0 = -\frac{\mu k^2}{2L_0^2}$$

$$r = \frac{h}{1 - \cos \vartheta}$$

$$\varepsilon = 1$$

$$h \equiv \frac{L_0^2}{\mu k}$$

$$k = G m_1 m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$(b) E_0 = 0 \rightarrow \varepsilon = 1$$

Teraz mamy parabolę !

Punkty materialne nie są ze sobą trwale związane siłami grawitacyjnymi (nie tworzą układu związanego) i mogą się oddalić od siebie na dowolnie dużą odległość. Przy oddalaniu się mas na „nieskończoną odległość” energia kinetyczna maleje do zera.

$$r = \frac{h}{1 - \varepsilon \cos \vartheta}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E_0}{\mu k^2}}$$

$$h \equiv \frac{L_0^2}{\mu k}$$

$$k = G m_1 m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(c) $E_0 > 0 \rightarrow \varepsilon > 1$

Teraz mamy hiperbolę !

Punkty materialne nie są ze sobą trwale związane siłami grawitacyjnymi (nie tworzą układu związanego) i mogą się oddalić od siebie na dowolnie dużą odległość. Nawet po oddaleniu się mas na „nieskończoną odległość” energia kinetyczna ruchu względnego byłaby większa od zera.

Wróćmy do przypadku elipsy, by udowodnić III prawo Keplera

$$r = \frac{h}{1 - \varepsilon \cos \mathcal{G}}, \quad 0 < \varepsilon < 1$$

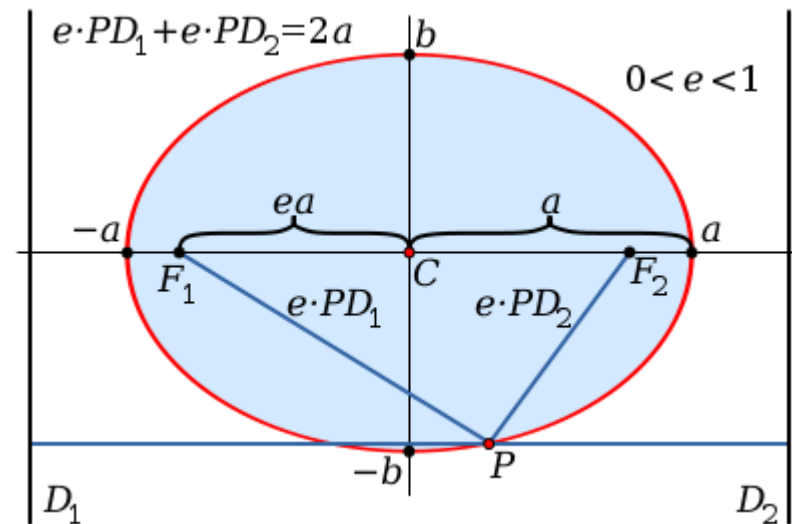
$$r_{\min} = r(\mathcal{G} = \pi) = \frac{h}{1 + \varepsilon}$$

$$r_{\max} = r(\mathcal{G} = 0) = \frac{h}{1 - \varepsilon}$$

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2h}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\rightarrow a = -\frac{k}{2E_0}$$

$$c = \varepsilon a, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{a} L_0 \frac{1}{\sqrt{\mu k}}$$



obrazek z Wikipedii

Aby obliczyć okres T obiegu planety dookoła Słońca, trzeba podzielić pole elipsy przez wartość prędkości połowej:

$$T = \frac{\text{pole}_{elipsy}}{\frac{d \text{ pole}}{dt}} = \frac{\pi a b}{\frac{L_0}{2\mu}} = 2\pi a^2 \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$= 2\pi a^2 \frac{1}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \approx 2\pi a^2 \frac{1}{\sqrt{G m_1}}$$

przybliżenie słuszne,
gdy $m_1 \gg m_2$!

$$\rightarrow \frac{T^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{G m_1}$$

prawa strona nie zależy od masy m_2 i dlatego jest taka sama dla każdej planety !

Uwagi:

1. Wyprowadziliśmy trzy prawa Keplera, opierając się na zasadach dynamiki Newtona i rozpatrując układ Słońce+planeta, a nie cały Układ Słoneczny ze Słońcem i wieloma planetami. Pozwala na to bardzo duża masa Słońca w porównaniu z masami planet !
2. Nie rozwiązaliśmy równania ruchu; w szczególności nie podaliśmy zależności wektora położenia względnego od czasu.
3. Rachunki nie powtarzają rozumowania Newtona, ale wykorzystują istnienie trzech wielkości stałych w czasie ruchu (tzw. całek ruchu): energii całkowitej, wektora momentu pędu oraz wektora LRL (Newton nie znał w ogóle pojęcia energii i musiał sobie radzić inaczej !)
4. Tak naprawdę to wiemy, jak wygląda trajektoria opisywana przez zmiany wektora wzajemnego położenia. A jak wyglądają trajektorie punktów materialnych m_1 i m_2 ?

Masy Słońca i planet w jednostkach masy Ziemi

Słońce	332946 (około 2×10^{30} kg)
Merkury	0.0553
Wenus	0.815
Ziemia	1
Mars	0.107
Jowisz	318
Saturn	95.2
Uran	14.5
Neptun	17.2

Źródło: Wikipedia

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2 \vec{r}}{M} \approx \vec{R}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1 \vec{r}}{M} \approx \vec{R} + \vec{r}$$

$$\vec{r}'_1 \equiv \vec{r}_1 - \vec{R} = -\frac{m_2 \vec{r}}{M} \approx 0$$

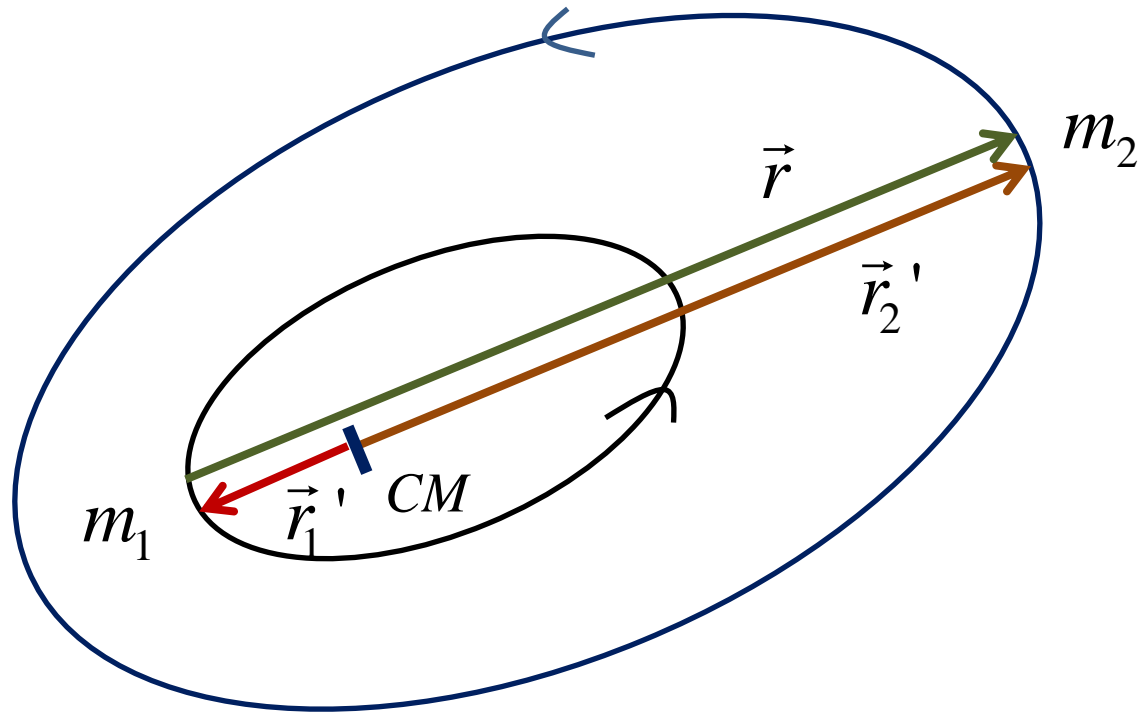
$$\vec{r}'_2 \equiv \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}}{M} \approx \vec{r}$$

wektory położenia poszczególnych punktów materialnych wyrażone przez położenie środka masy (\mathbf{R}) oraz położenie względne (\mathbf{r})

wektory położenia poszczególnych punktów materialnych względem środka masy

Z dobrym przybliżeniem Słońce znajduje się w środku masy układu Słońce+planeta, a wektor położenia względnego jest zarazem wektorem położenia planety względem środka masy !

Nie zawsze tak musi być, bo istnieją układy dwóch zbliżonych mas !



Zakładamy, że środek masy (CM) się nie porusza.

Wtedy oba punkty materialne poruszają się po elipsach. Masa m_1 znajduje się w ognisku dla elipsy opisywanej przez wektor r . Środek masy jest ogniskiem dla obu orbit opisywanych przez r_1' i r_2' .

Średnie odległości od Słońca (w AU), okres obiegu wokół Słońca (w dniach) oraz mimośród orbity eliptycznej

	„a”	T	ε	T^2/a^3
Merkury	0.39	88	0.2056	130548
Wenus	0.72	224.7	0.0068	135272
Ziemia	1	365.3	0.0167	133444
Mars	1.52	687	0.0934	134395
Jowisz	5.20	4333.3	0.0482	133545
Saturn	9.52	10756.2	0.0553	134093
Uran	19.16	30707.5	0.0478	134061
Neptun	30.07	60223.4	0.0079	133392

Źródło: <http://www.solar.po.opole.pl/>

Polecam materiały pomocnicze do zagadnienia Keplera z mojej strony:

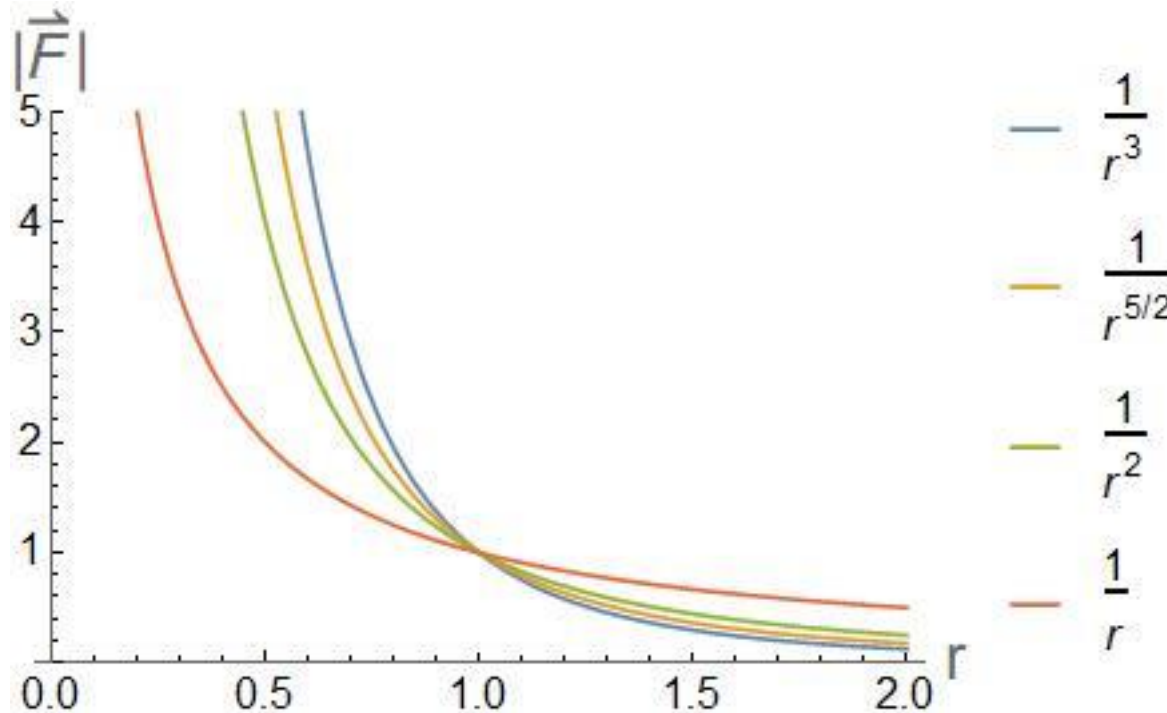
<http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/kepler.pdf>

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/zagadnienie_keplera.nb

Siła grawitacji ma kluczowe znaczenie także dla świata ożywionego – ewolucja wymaga czasu !

Czy możemy dowiedzieć się czegoś o grawitacji, rozpatrując jej różne modele ? Myślę, że tak !

Różne „siły grawitacji” $|\vec{F}| = G \frac{M m}{r^\alpha}$

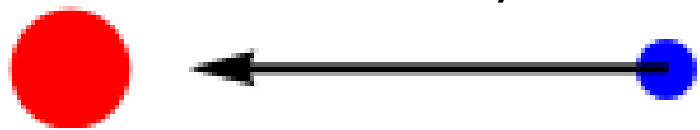


mają **te same wartości dla $r=1$** , więc **wszystkie** mogłyby utrzymywać Ziemię na orbicie kołowej wokół Słońca i to dla tej samej odległości Ziemia-Słońce oraz dla tego samego roku ziemskiego !

$$|\vec{F}| \propto \frac{1}{r}$$



$$|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^2}$$



$$|\vec{F}| \propto \frac{1}{r^3}$$

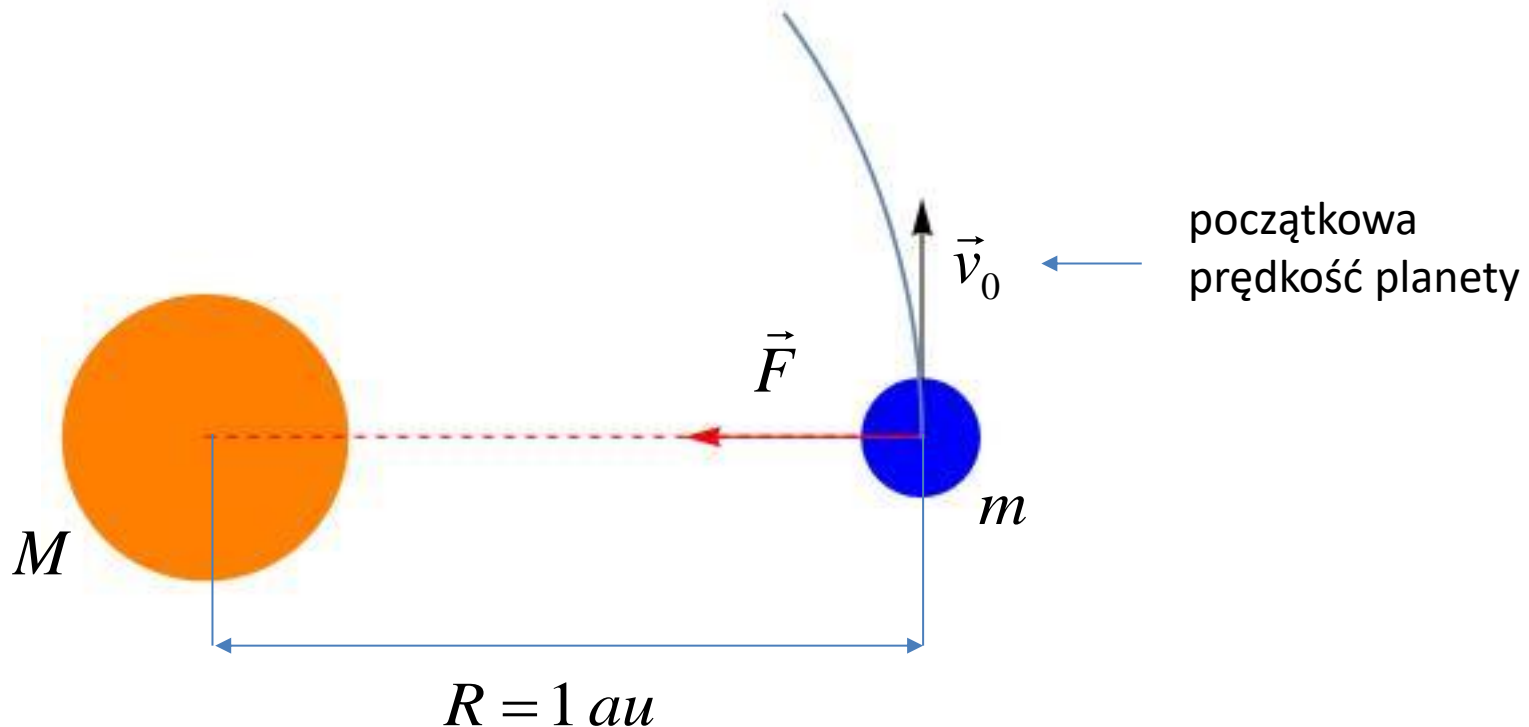


Pytanie: czy jest coś szczególnego dla siły z $\alpha=2$?
Jak zachowywałby się najprostszy układ planetarny z różnymi siłami przyciągania gwiazda-planeta ?

Odpowiemy na to pytanie, korzystając z II zasady dynamiki Newtona

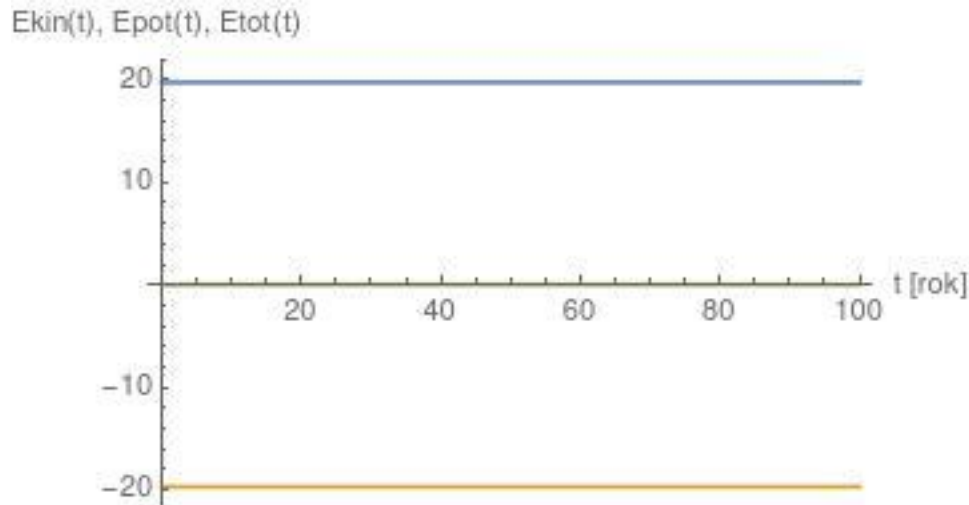
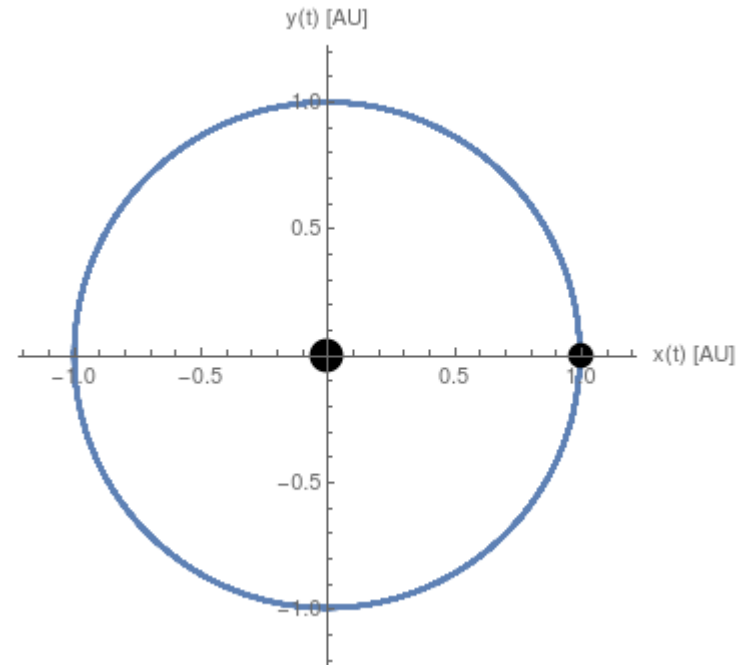
$$\vec{F} = m \vec{a}$$

i przyjmując bardzo proste warunki początkowe



Zaczyna się „science fiction” z $\alpha \neq 2$!

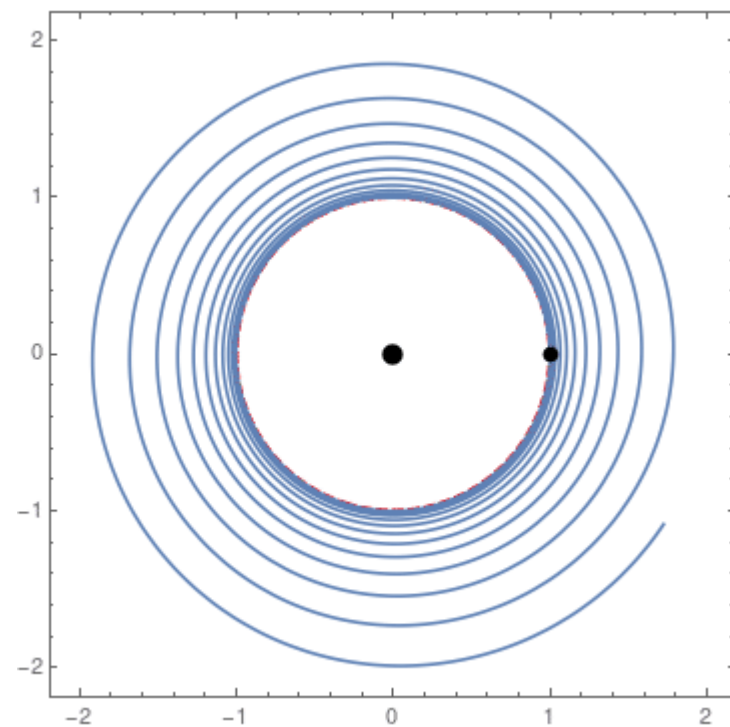
$$\alpha = 3 \quad i \quad |\vec{v}_0| = 2\pi$$



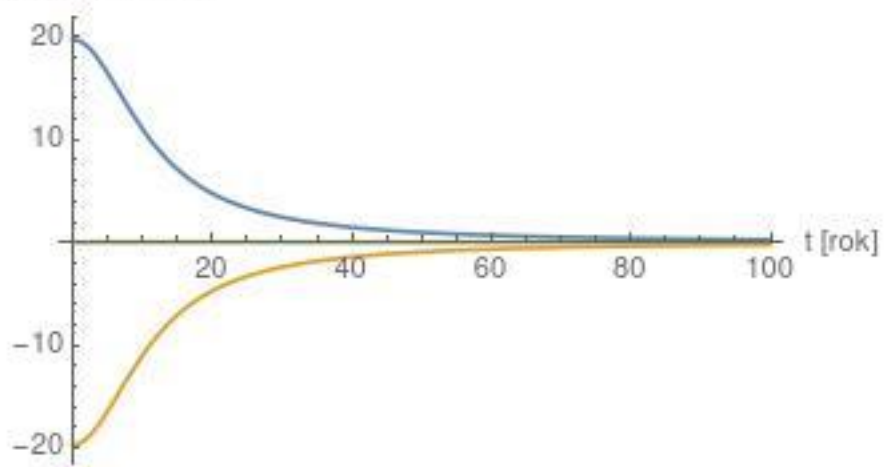
- Ekin(t)
- Epot(t)
- Etot(t)

$$\alpha = 3 \quad i \quad |\vec{v}_0| > 2\pi$$

wzrost tylko o 0.01 % !



$E_{kin}(t), E_{pot}(t), E_{tot}(t)$

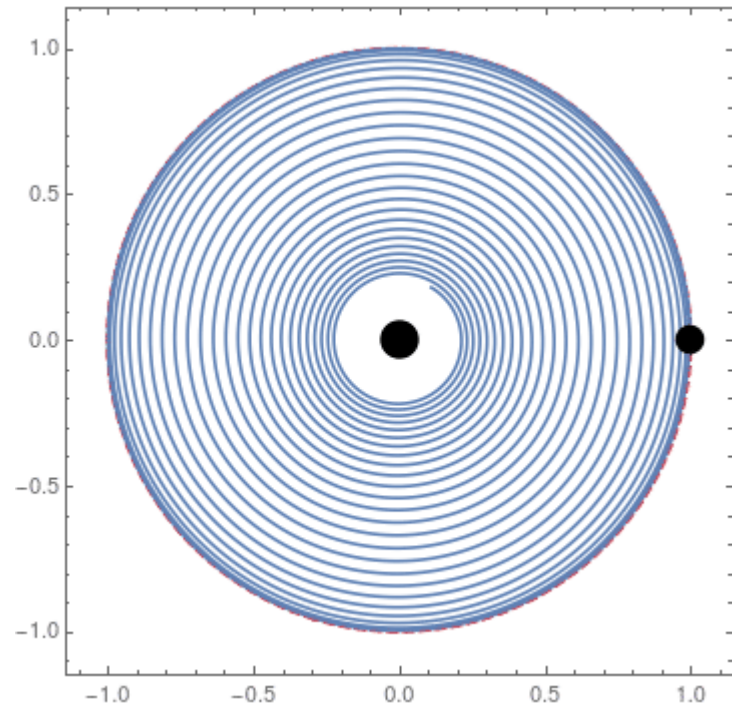


- $E_{kin}(t)$
- $E_{pot}(t)$
- $E_{tot}(t)$

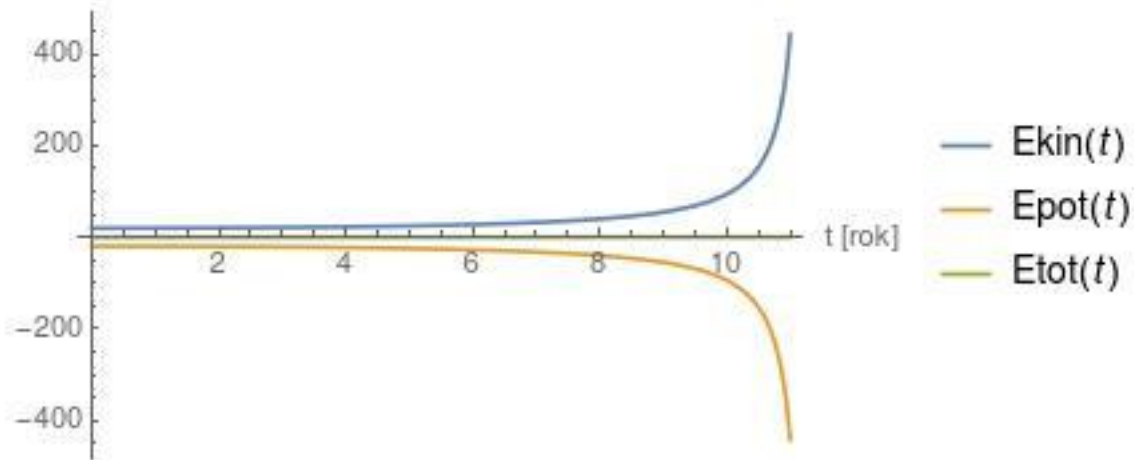
$$\alpha = 3 \quad i \quad |\vec{v}_0| < 2\pi$$

spadek tylko o 0.01 % !

Uwaga: dla $\alpha=4, 5, 6,$
itd. mamy jeszcze
większą niestabilność !

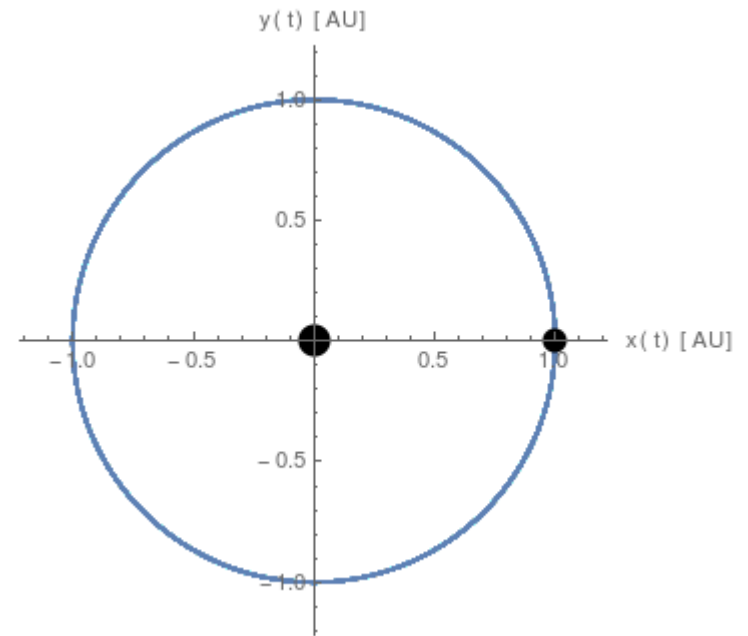


$E_{kin}(t), E_{pot}(t), E_{tot}(t)$

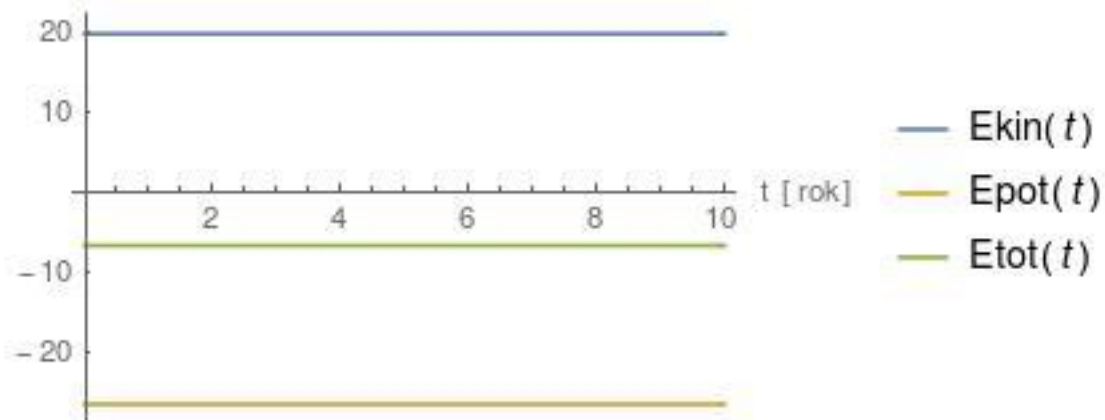


A co się dzieje dla ułamkowych α ?

$$\alpha = 2.5 \quad i \quad |\vec{v}_0| = 2\pi$$

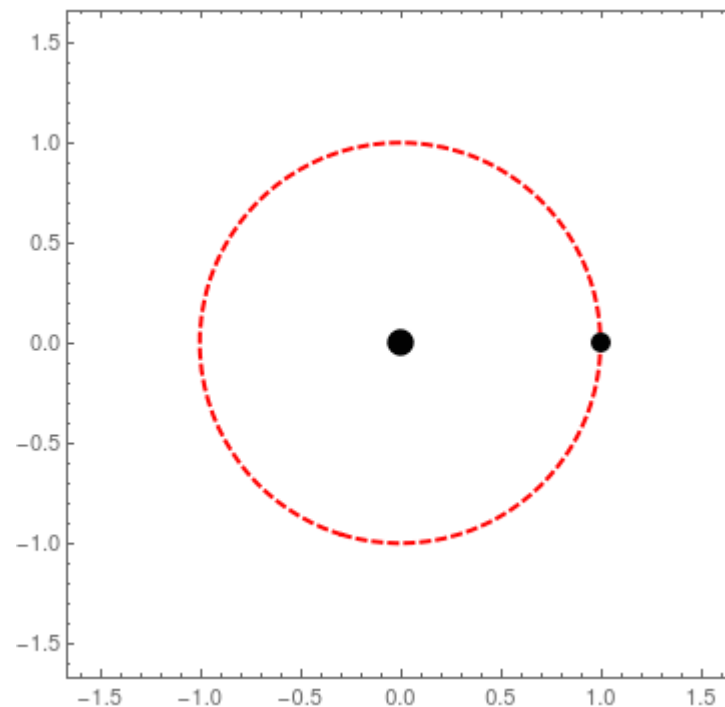


$E_{kin}(t)$, $E_{pot}(t)$, $E_{tot}(t)$

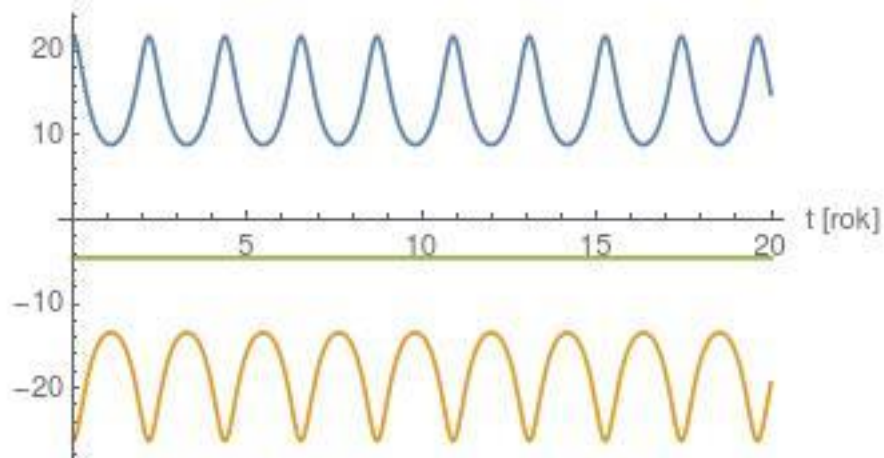


$$\alpha = 2.5 \quad i \quad |\vec{v}_0| > 2\pi$$

wzrost o 5 %



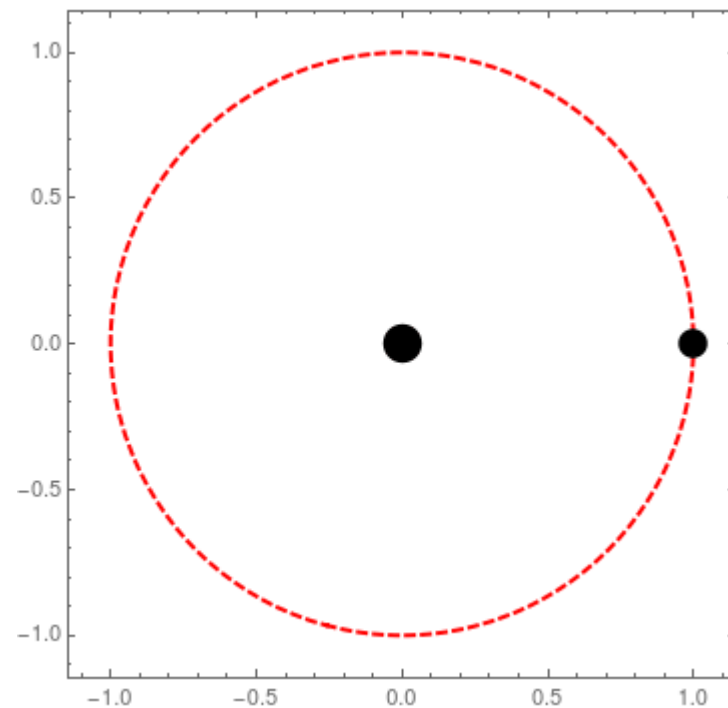
$E_{kin}(t)$, $E_{pot}(t)$, $E_{tot}(t)$



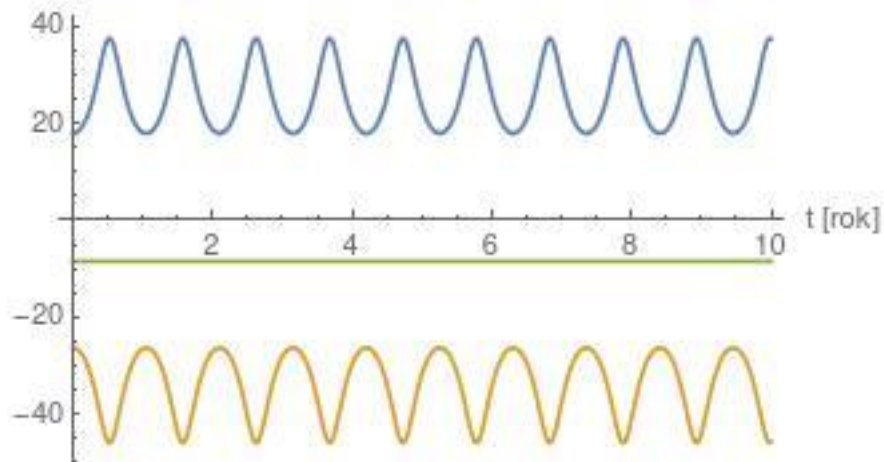
- $E_{kin}(t)$
- $E_{pot}(t)$
- $E_{tot}(t)$

$$\alpha = 2.5 \quad i \quad |\vec{v}_0| < 2\pi$$

spadek o 5 %



$E_{kin}(t), E_{pot}(t), E_{tot}(t)$



— $E_{kin}(t)$
— $E_{pot}(t)$
— $E_{tot}(t)$

Poprawki do modelu z $\alpha=2$!

W końcu po Newtonie był jeszcze Einstein 😊

STW, 1905

Daje istotne poprawki, gdy prędkość obiektów zbliżona do prędkości światła $c \approx 3 \times 10^8$ m/s = 300000000 m/s.

Prędkość Ziemi w ruchu dookoła Słońca to nasze $|\vec{v}_0|$ i wynosi „tylko” około 3×10^4 m/s = 30000 m/s \approx 107000 km/h.

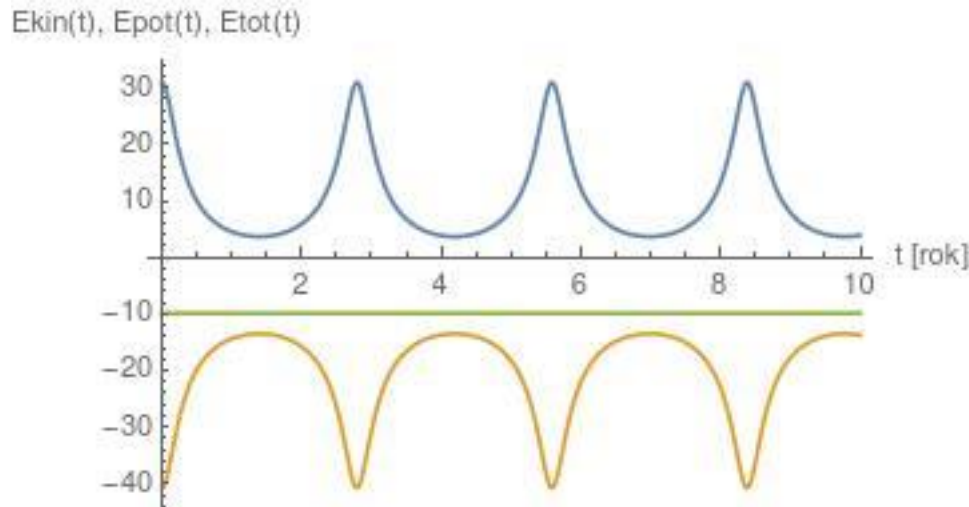
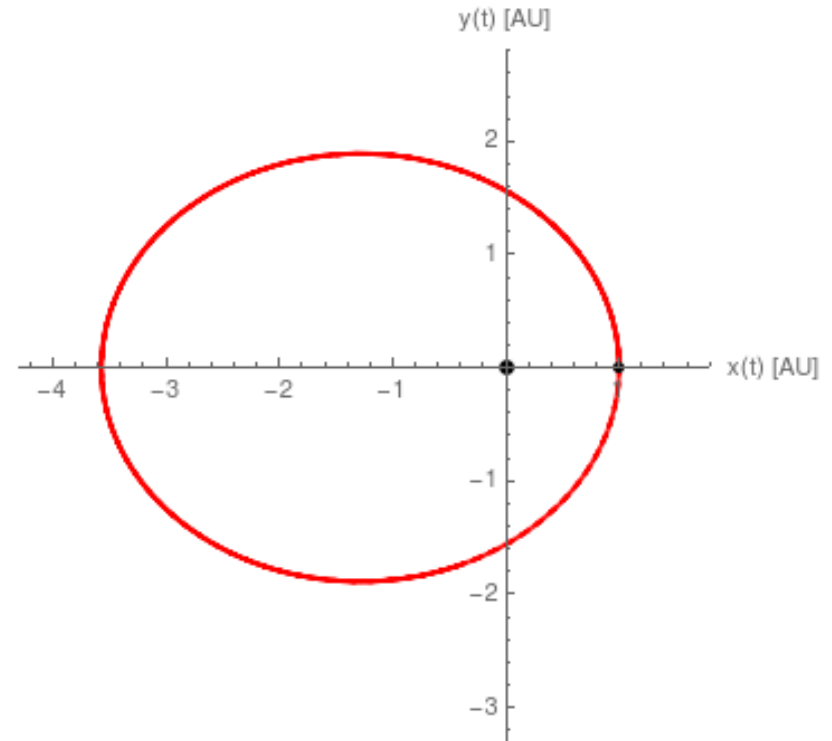
Te poprawki są raczej zaniedbywalne.

OTW, 1915-1916

Głosi zupełnie nowe podejście do grawitacji. Masa i energia powodują zmiany w przestrzeni i czasie, które z kolei wpływają na to, jak zachowuje się materia. W szczególności ta teoria przewiduje istnienie „czarnych dziur”, zakrzywianie promieni świetlnych w silnym polu grawitacyjnym, istnienie fal grawitacyjnych.

W warunkach niezbyt silnego pola grawitacyjnego gwiazdy dostajemy poprawkę do teorii Newtona

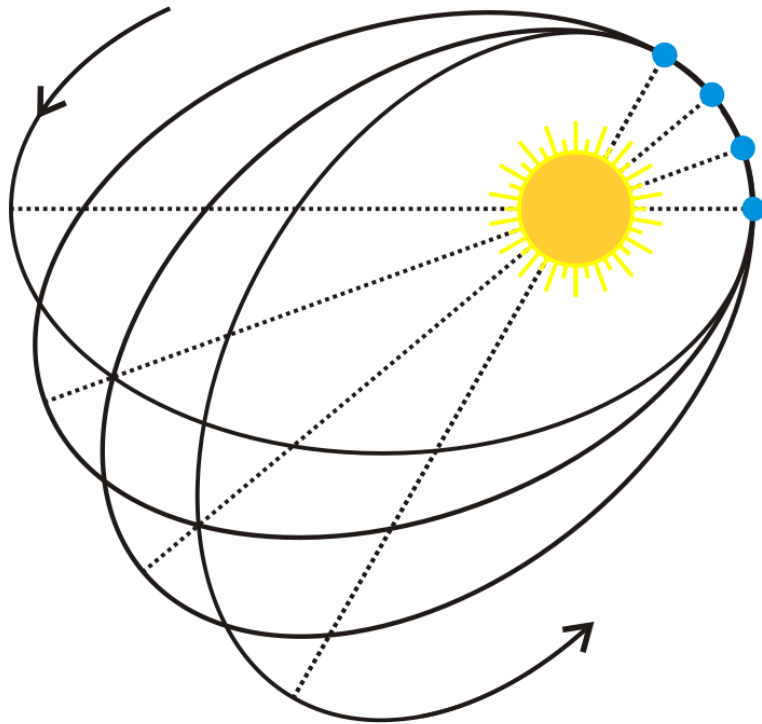
$$|\vec{F}| = G \frac{M m}{r^2} \rightarrow G \frac{M m}{r^2} \left(1 + \frac{\kappa}{r^2} \right)$$



- Ekin(t)
- Epot(t)
- Etot(t)

Uwaga: efekt poprawki OTW jest dla Ziemi bardzo niewielki; obliczenia wykonano dla orbity eliptycznej z celowo zawyżonym κ !

Poprawka prowadzi do efektu zwanego **obrotem peryhelium planety**.
W Układzie Słonecznym zaobserwowano go przede wszystkim dla
Merkurego - planety najbliższej Słońcu z orbitą najbardziej różniącą się
od okręgu.

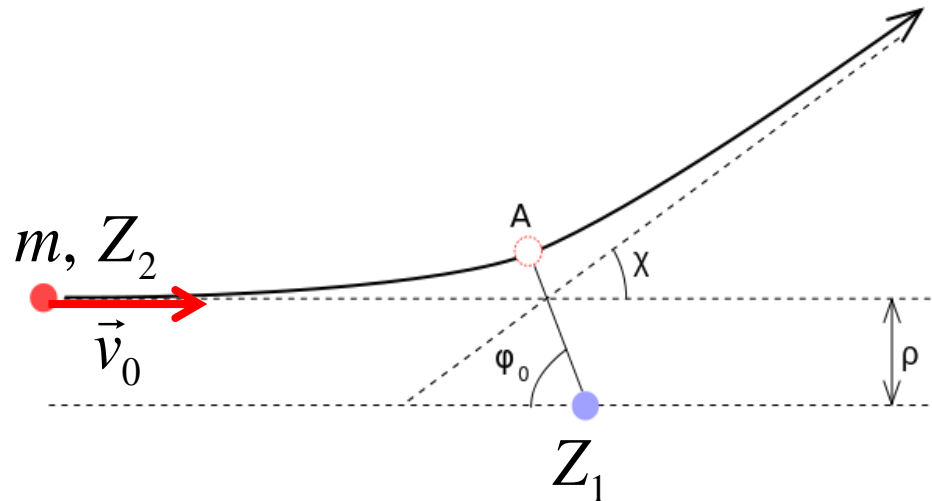


rysunek z Wikipedii

Precesję peryhelium Merkurego
zaobserwował w połowie XIX wieku
Urbain Le Verrier. Efekt wynosi około
572'' (sekundy łuku) na stulecie.
Większość tego zjawiska daje się
wytłumaczyć na podstawie mechaniki
newtonowskiej (wpływem innych planet
oraz niewielką deformacją Słońca).
Brakujące około 43'' na stulecie
dostarczyła właśnie poprawka
wyprowadzona na gruncie OTW.

Odkrycie jądra atomowego

W przypadku odpychających się elektrostatycznie cząstek, kluczową rolę odgrywa związek między kątem rozproszenia a parametrem zderzenia. Jego zrozumienie leży u podstaw odkrycia przez Rutherforda jądra atomowego, w którym skupiony jest w bardzo małej objętości cały ładunek dodatni obecny w atomie i prawie cała masa atomu.



χ - kąt rozproszenia
 ρ – parametr zderzenia
 Z_1 i Z_2 to liczby atomowe cząstek

$$\begin{aligned}\tan \frac{\chi}{2} &= \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{m v_0^2 \rho} \\ &= \frac{k Z_1 Z_2 e^2}{2 E_0 \rho}\end{aligned}$$

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \chi \rightarrow 180^\circ !$$



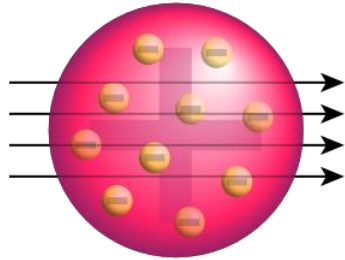
Sir Ernest Rutherford (1871 – 1937)
Nagroda Nobla 1908

W roku 1911 Rutherford zastanawiał się nad dziwnymi wynikami doświadczenia Geigera i Marsdena z rozpraszaniem cząstek α na foli ze złota.

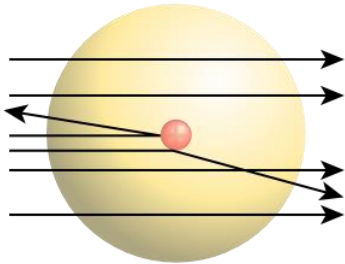
Większość cząstek rozpraszala się pod małymi kątami, ale 1 na 8000 rozpraszala się pod kątem bliskim 180 stopni.

Rutherford: ***„To było tak, jakby piętnastocalowy pocisk, wystrzelony w kawałek bibułki, odbił się od niej i trafił w strzelającego”***.

Wynik eksperymentu był zupełnie nieoczekiwany



Według wcześniejszego modelu atomu autorstwa Thomsona (tzw. „ciasto z rodzynkami”) cząstki powinny bez problemu przelecieć przez atom .



Wynik eksperymentu dowiódł, że w atomie istnieje dodatnio naładowane jądro, skupiające prawie całą masę atomu.

Podsumowanie:

1. Pokazałem, jak wygląda ruch planety wokół Słońca pod wpływem różnych sił przyciągania, rozwiązując numerycznie równania ruchu ze zmiennymi warunkami początkowymi.
2. Punktem wyjścia była „uniwersalna” orbita kołowa o parametrach zbliżonych do orbity ziemskiej.
3. „Nasza” grawitacja z $\alpha=2$ jest naprawdę wyjątkowa, bo tylko ona zapewnia stabilne (miliardy lat) trwanie układów planetarnych odpornych na zaburzenia prędkości planety !
4. Poprawki do teorii Newtona pochodzące z STW i OTW nie mają dla Ziemi istotnego znaczenia, ale wyjaśnienie (brakującej części) rotacji peryhelium Merkurego było niezwykle istotne dla przyjęcia tej teorii.
5. Istotnych różnic między teorią Newtona i Einsteina należy szukać w obszarach dużo silniejszych pól grawitacyjnych.

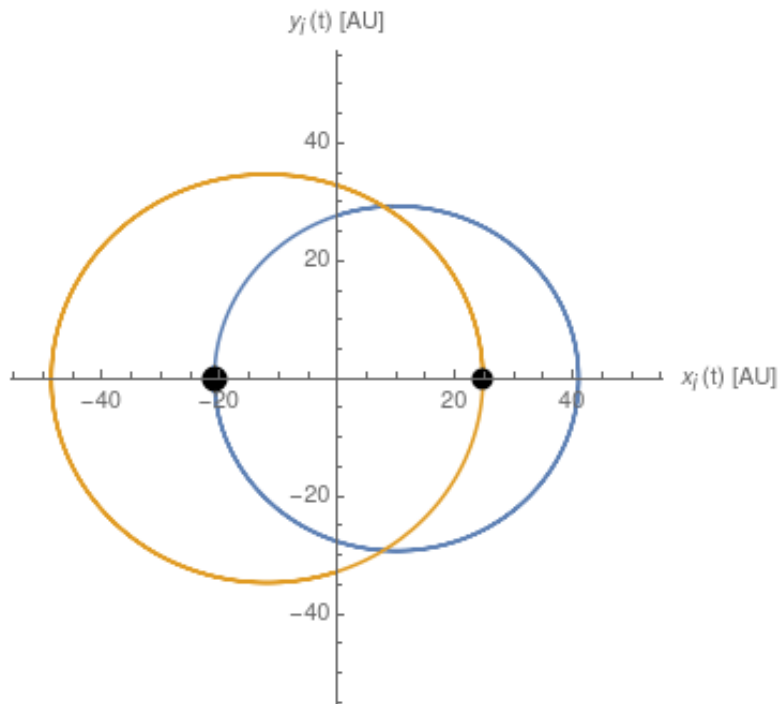
Podsumowanie (c.d.)

7. Siła grawitacyjna nie jest jedyną siłą centralną, dla której zależność od odległości ma postać $1/r^2$. Podobny charakter ma siła kulombowska opisująca oddziaływanie między dwoma ładunkami punktowymi. Dla tego przypadku możliwe jest nie tylko przyciąganie, ale i odpychanie. To oddziaływanie odgrywa kluczową rolę w budowie materii (jądra atomowe, atomy, cząsteczki, kryształy, ...)
8. Niezwykle ciekawe i bardzo trudne do zbadania są układy, w których występują więcej niż dwa obiekty oddziałujące grawitacyjnie lub siłami kulombowskimi !

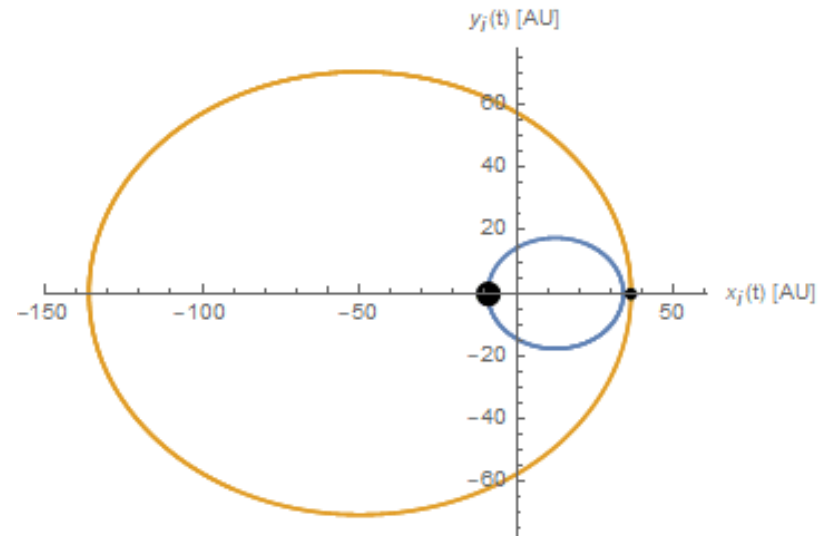
Układy z dwoma masami bardzo dobrze poznane

$$\left| \vec{F}_{12} \right| = \left| \vec{F}_{21} \right| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$m_1 \approx m_2$$

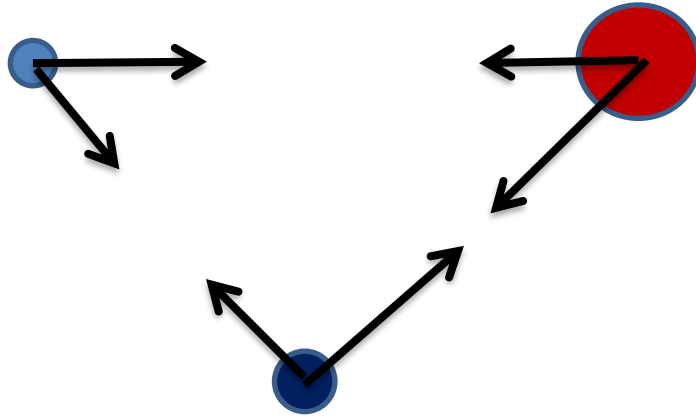


$$m_1 = 4 m_2$$



Układy z trzema masami

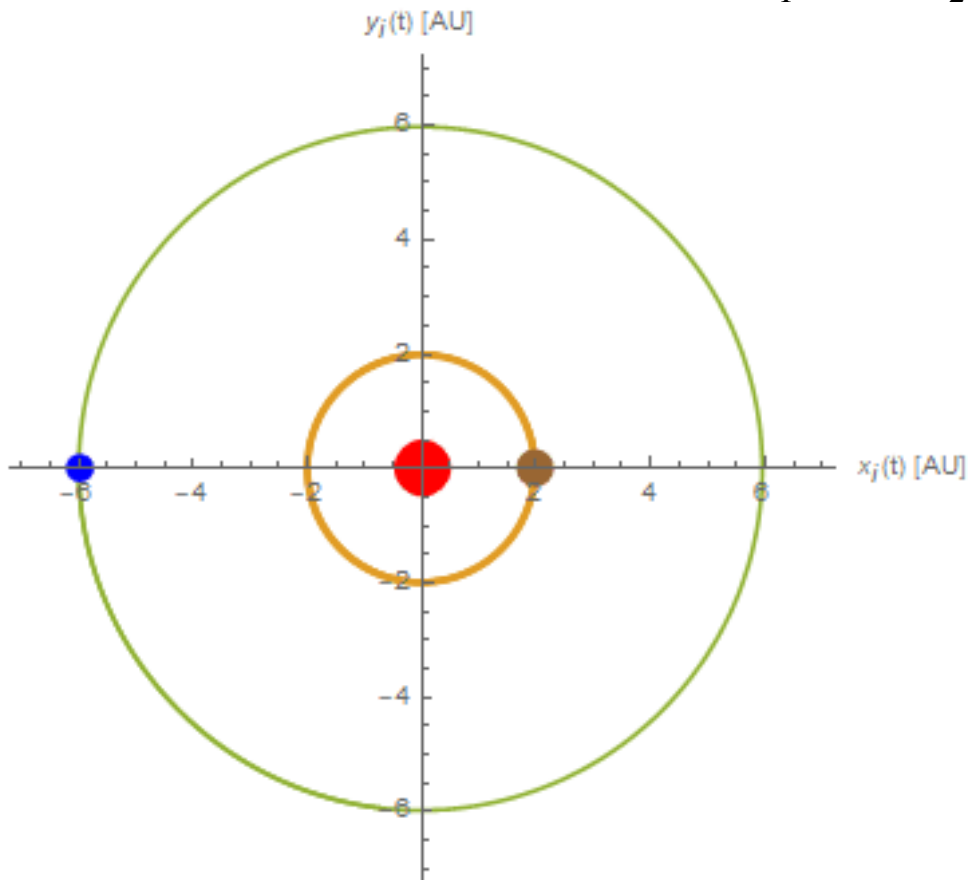
$$|\vec{F}_{ij}| = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$$



- Bardzo trudne do zbadania.
- Borykali się z nimi Newton, Euler, Lagrange i inni wielcy matematycy i fizycy.
- Nie ma ogólnego rozwiązania.
- Nawet komputery nie radzą sobie w trudnych przypadkach ze względu na niestabilności obliczeń numerycznych.
- Znane są tylko rozwiązania pewnych szczególnych przypadków, zwykle gdy trzy masy poruszają się w jednej płaszczyźnie.

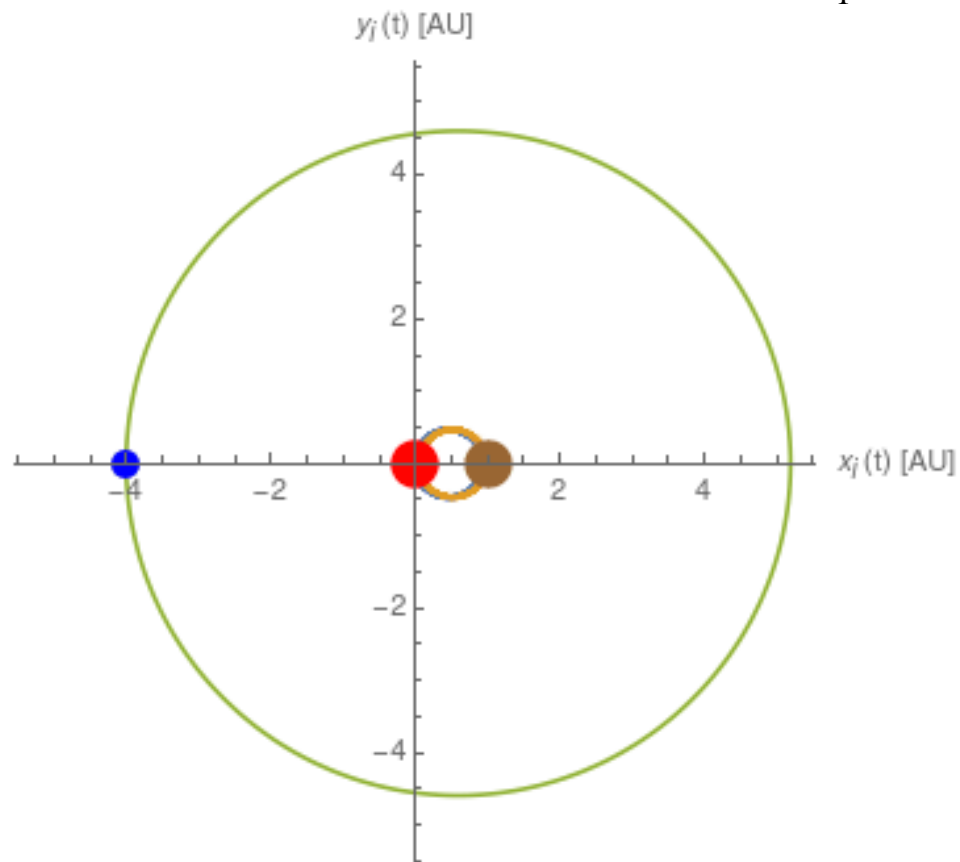
Przypadek „układu planetarnego”, w którym masa „gwiazdy” jest znacznie większa od mas „planet”.

$$m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{100}, m_3 = \frac{1}{200}$$



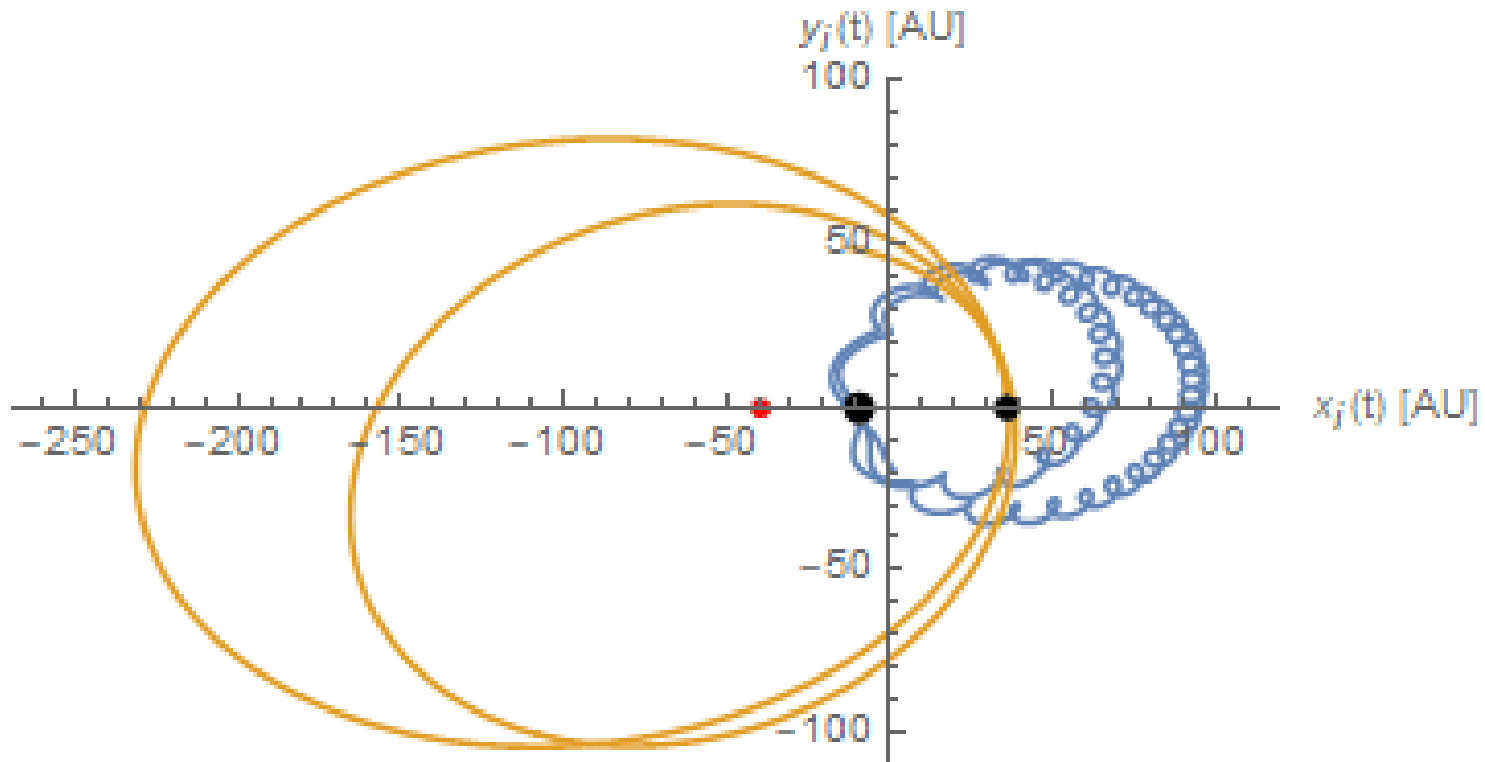
Przypadek „planety” krążącej wokół „gwiazdy podwójnej”

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = \frac{1}{200}$$



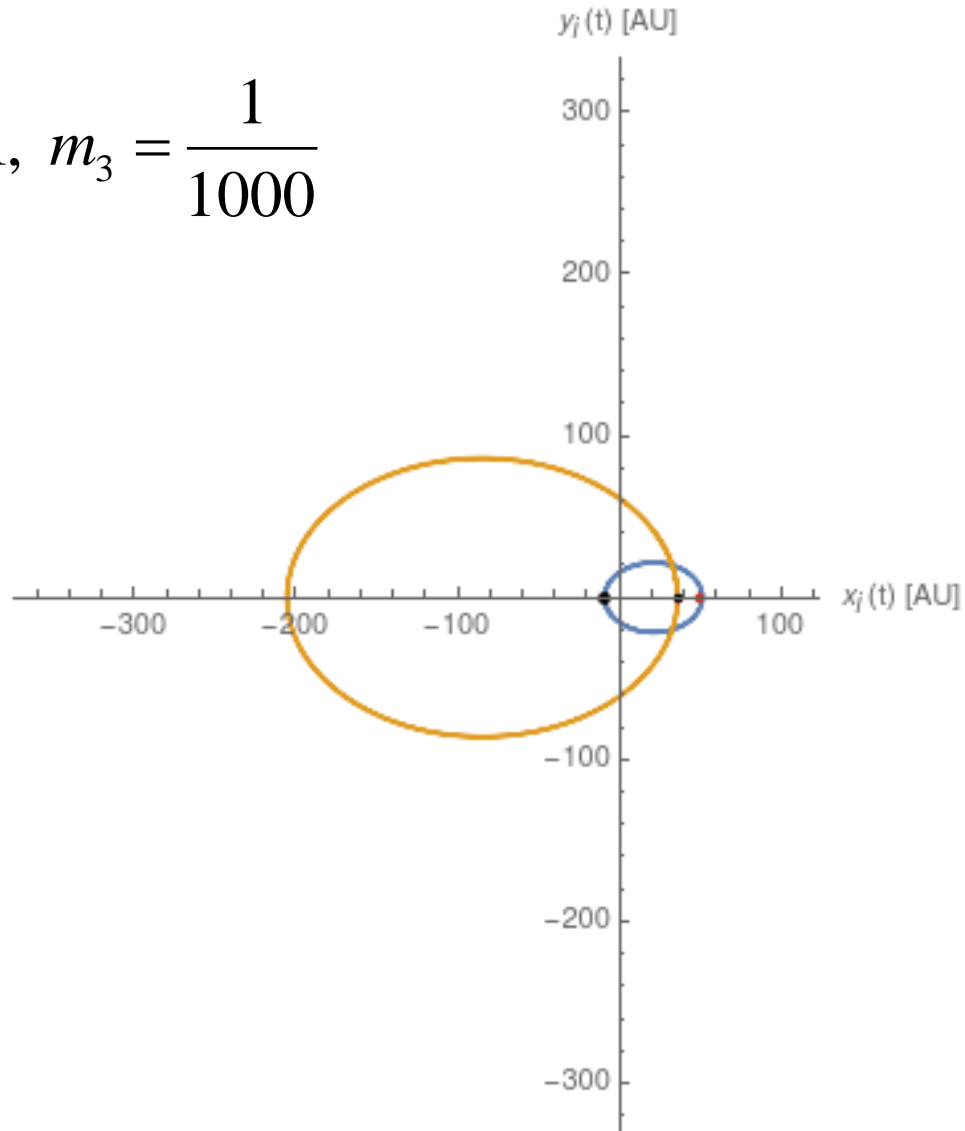
Przypadek „gwiazdy podwójnej”, w którym cięższa z „gwiazd” ma swoją całkiem ciężką „planetę”

$$m_1 = 4, m_2 = 2, m_3 = 1$$



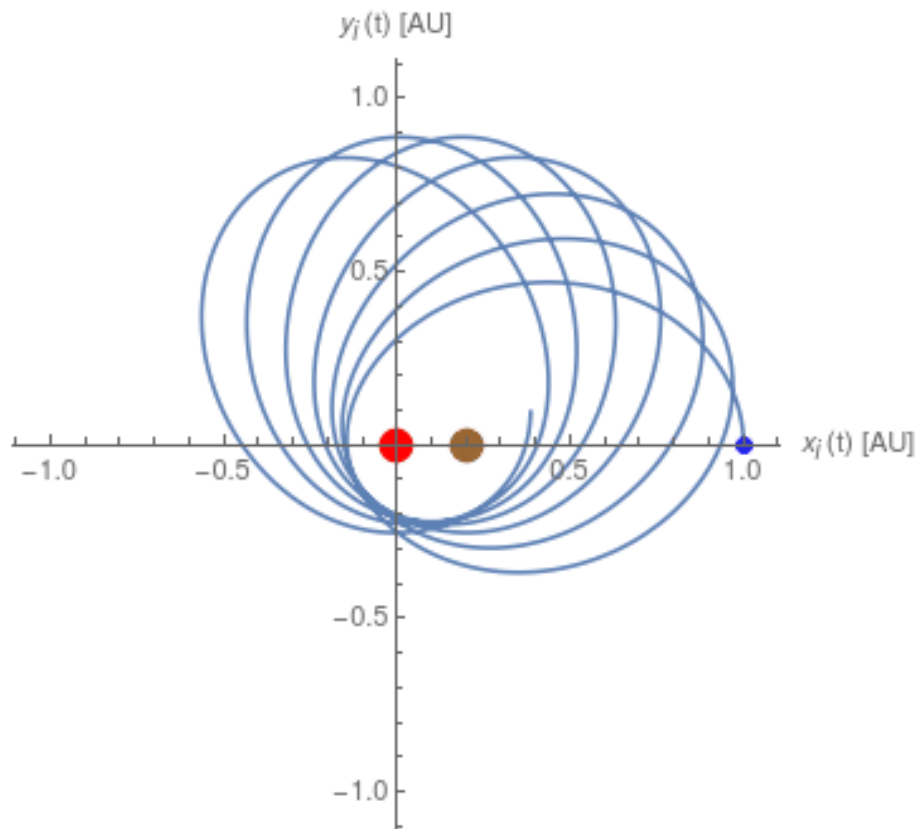
Przypadek lekkiego obiektu próbującego uciec od przyciągania dwóch znacznie cięższych obiektów

$$m_1 = 4, m_2 = 1, m_3 = \frac{1}{1000}$$

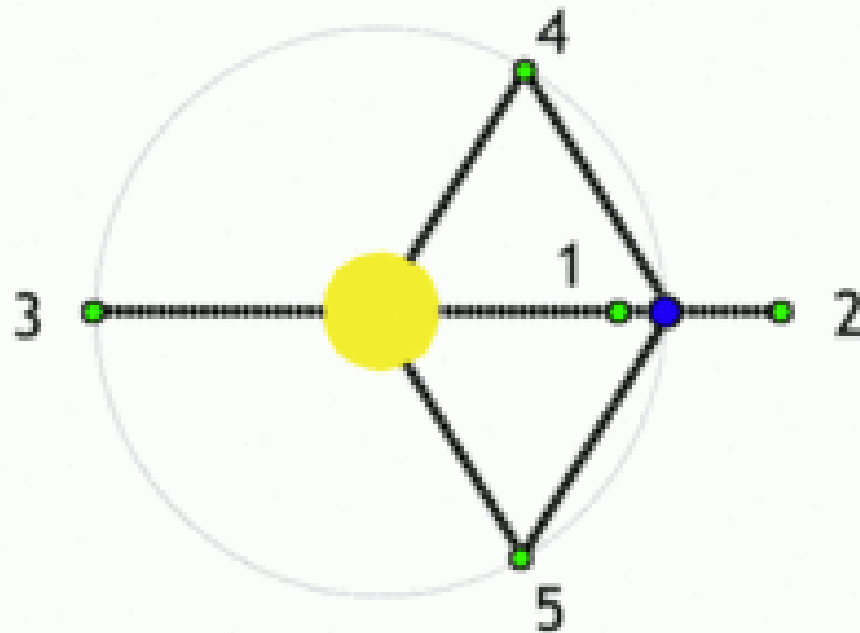


Tzw. problem Eulera z dwoma nieruchomymi „gwiazdami”
i lekką „planetą”

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = \frac{1}{200}$$



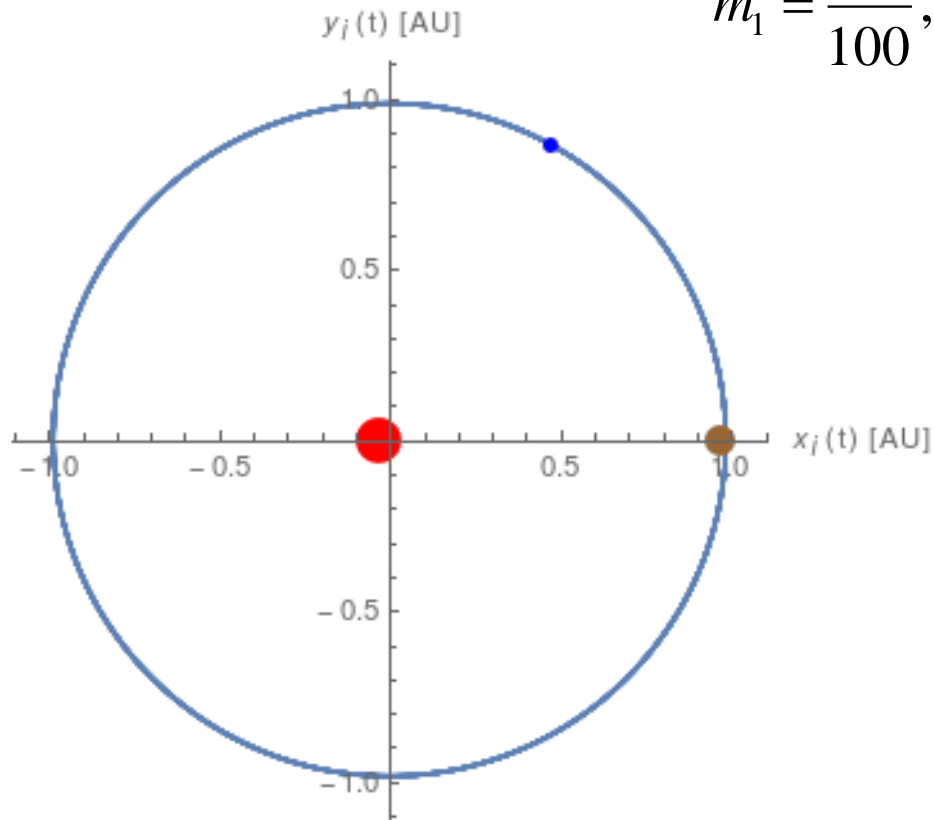
Słynne punkty Lagrange'a: dwa masywne obiekty (żółty i niebieski) rotujące po kołowych orbitach wokół wspólnego środka masy i lekka masa, która może znajdować się w równowadze w pewnych szczególnych punktach: (1, 2, 3 zawsze nietrwałej; 4, 5 niekiedy trwałe)



Źródło: Wikipedia

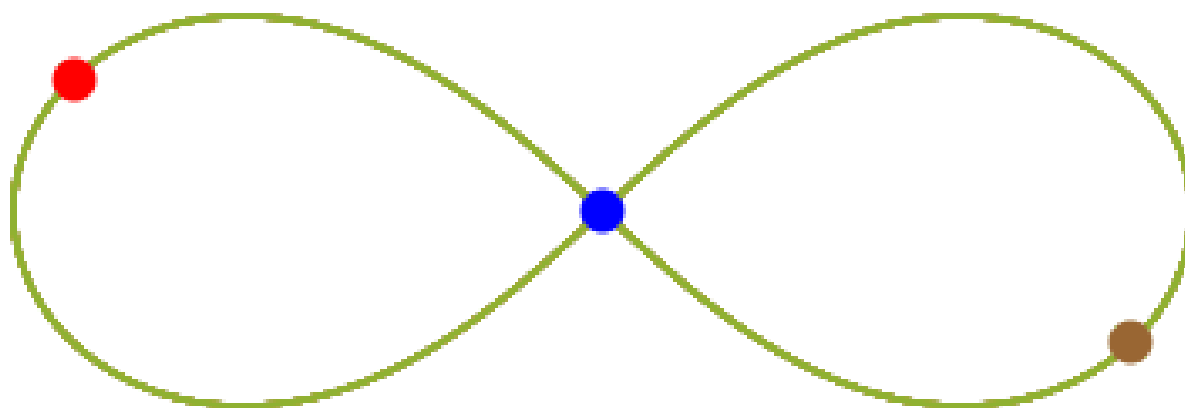
Ilustracja dla punktu Lagrange'a nr 4
niebieska masa utrzymywana przez masę czerwoną i brązową

$$m_1 = \frac{97}{100}, m_2 = \frac{3}{100}, m_3 \approx 0$$



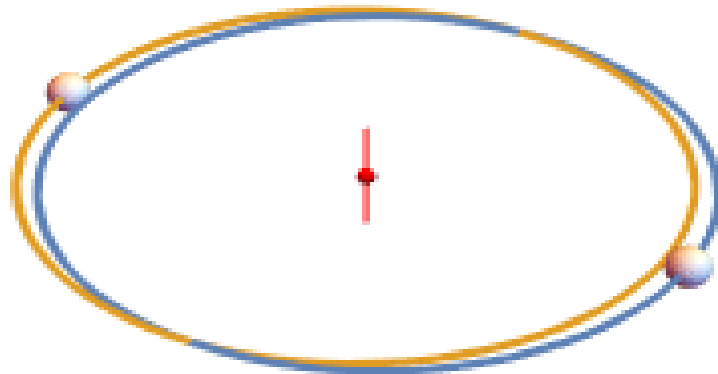
Konfiguracja odkryta numerycznie dopiero (!) w 1993 roku przez Christophera Moore'a. W 2000 roku analityczne potwierdzenie stabilności tego układu uzyskali Alain Chenciner i Richard Montgomery.

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$$



Jeden z niewielu przykładów, gdzie ruch nie odbywa się w jednej płaszczyźnie. Dwie większe masy m_1 i m_2 krążą po zbliżonych, prawie kołowych orbitach, a masa m_3 oscyluje w kierunku prostopadłym do płaszczyzny zawierającej orbity mas m_1 i m_2 . Konfiguracja zaproponowana przez A. Kołmogorowa

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1/100$$



W Internecie można znaleźć wiele stron poświęconych badaniom układów trzyciałowych. Należą do nich strony Matta Sheena:

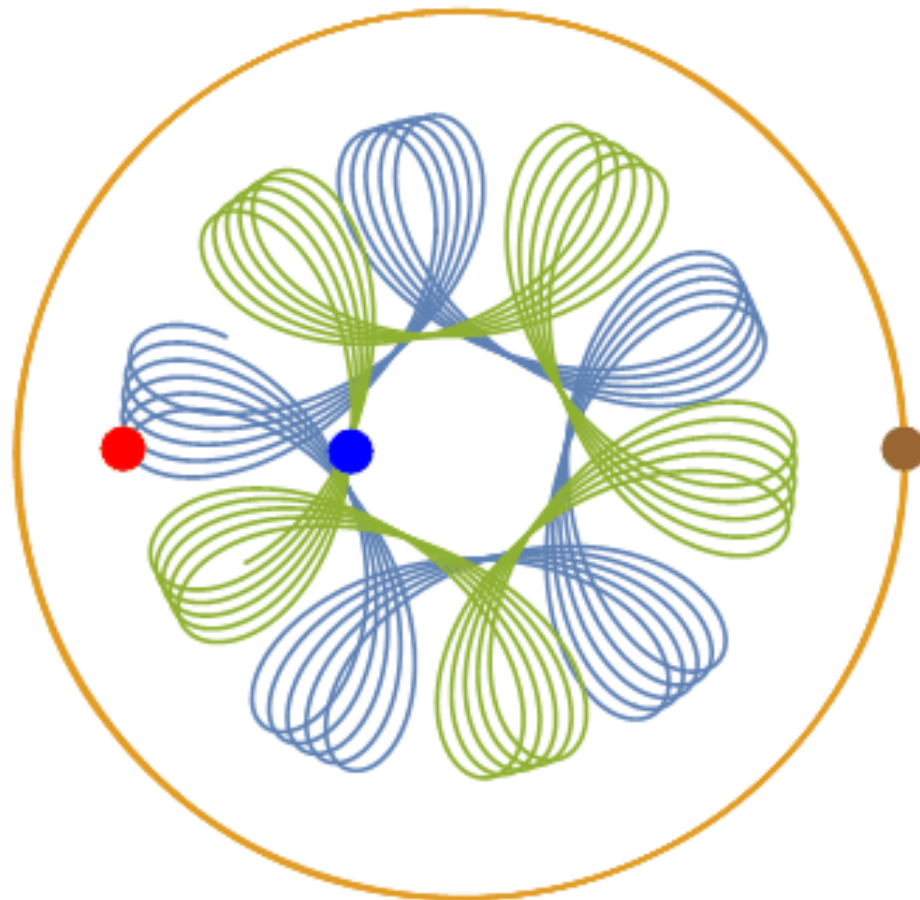
https://www.youtube.com/watch?v=8_RRZcqBEAc

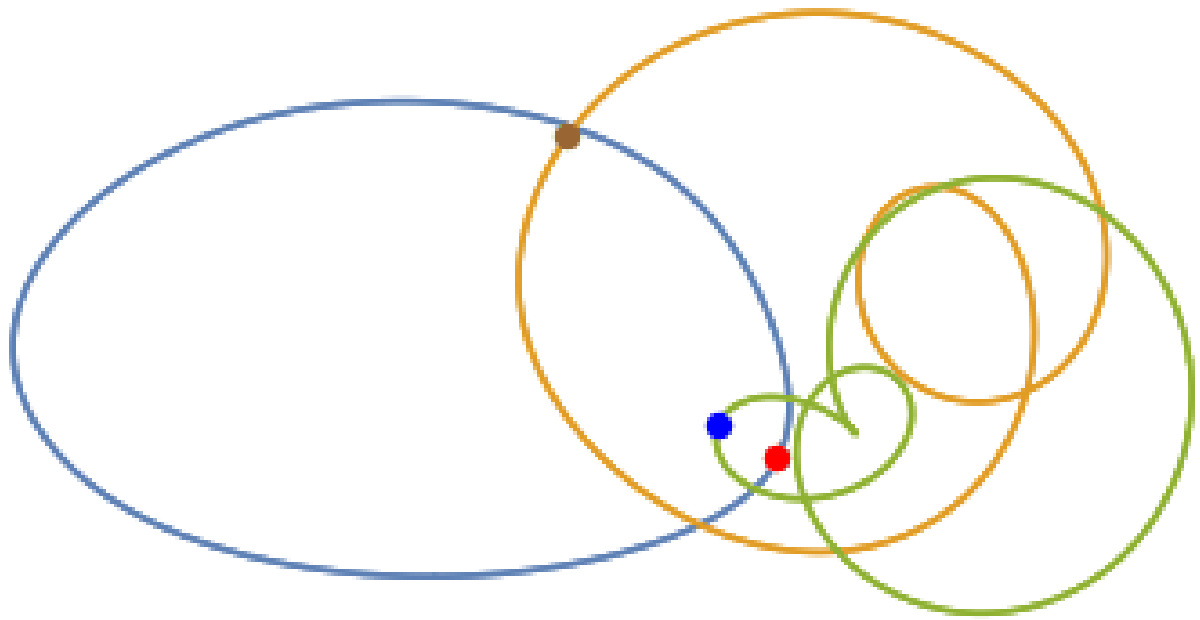
https://github.com/mws262/MAE5730_examples/tree/master/3BodySolutions

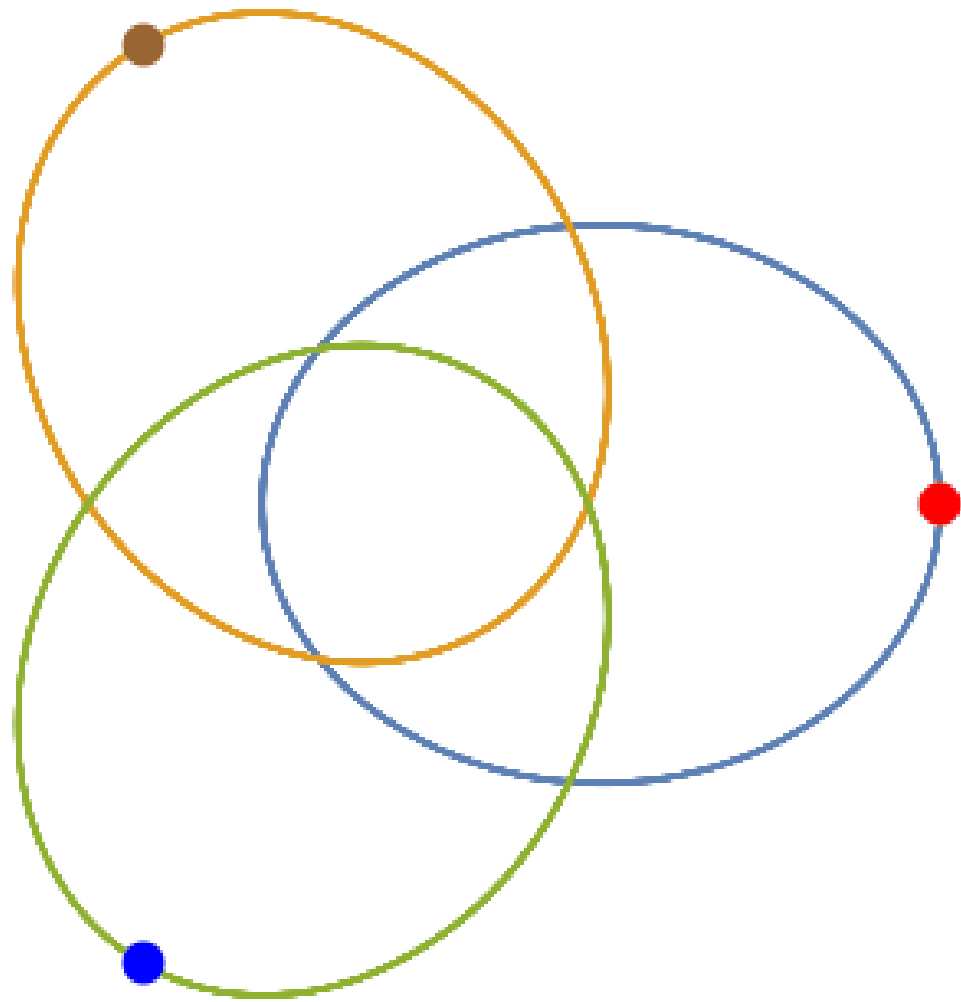
Matt znalazł numerycznie kilkanaście ciekawych konfiguracji. Ich stabilność nie została dotychczas zbadana !

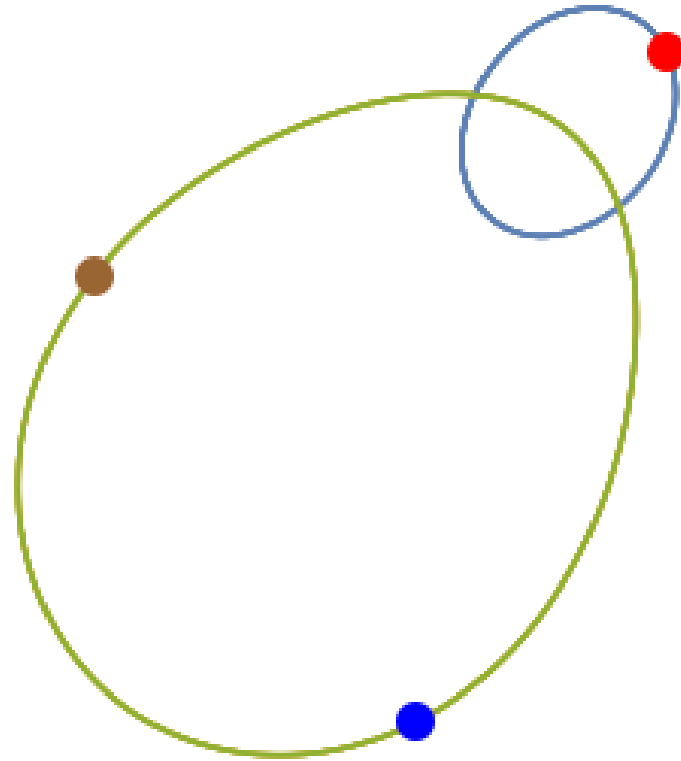
$$G = m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$$

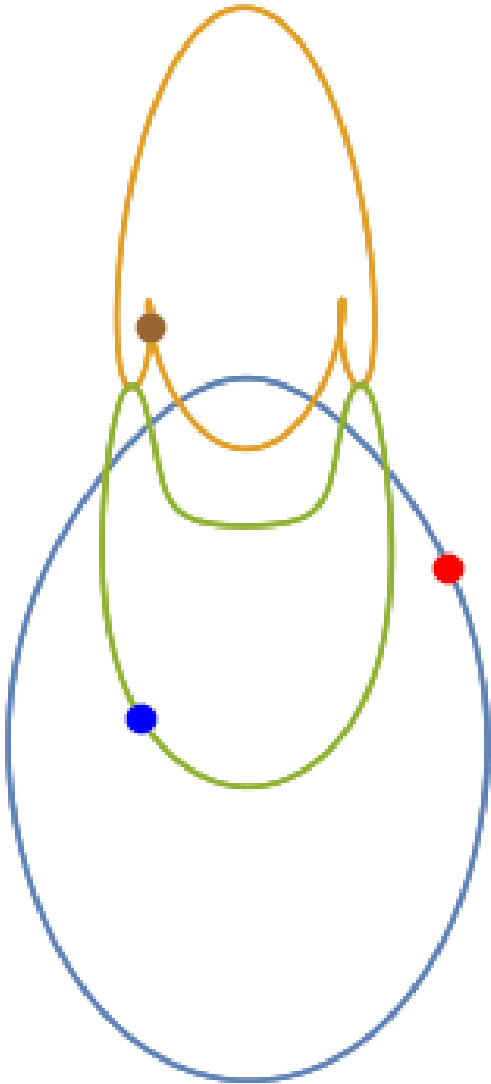














Teraz to już naprawdę koniec !

Dziękuję za uwagę !