

# Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak  
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 7

Na poprzednim wykładzie zajmowaliśmy się elementami statyki i dynamiki **bryły sztywnej**.

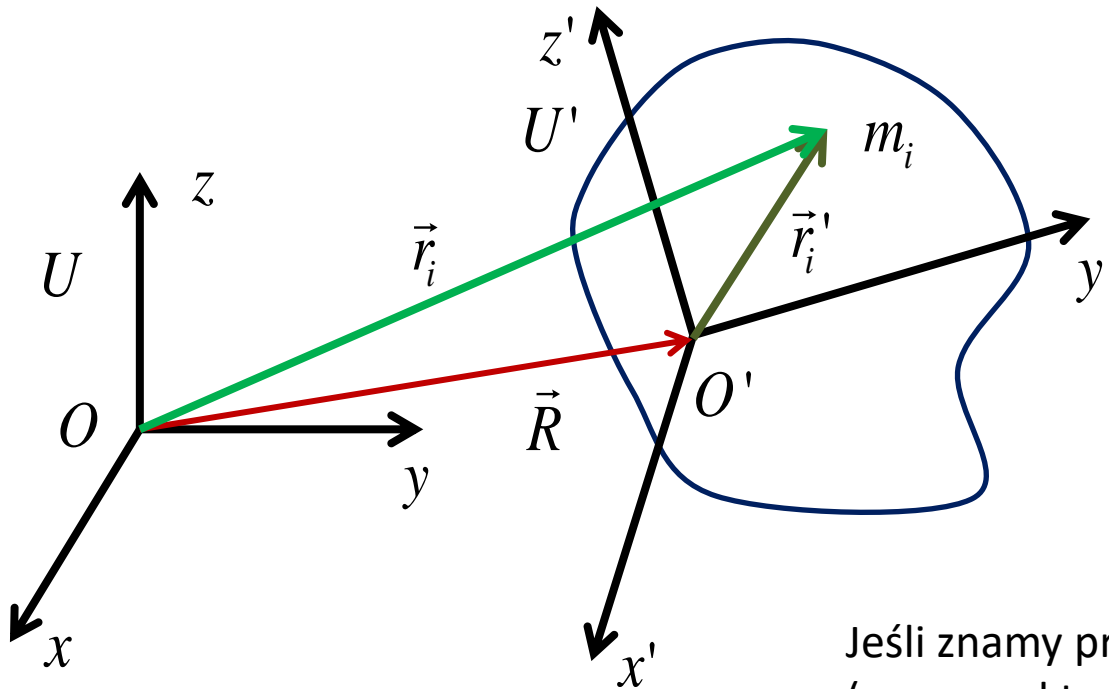
Jest to z definicji zbiór punktów materialnych o tej własności, że jego kształt się nie zmienia. Odległości między każdą parą punktów tworzących ten układ pozostają stałe w czasie.

Z myślą o dalszych zastosowaniach przypominam kilka podstawowych pojęć:

Masa całkowita układu:  $M = \sum_i m_i$        $\left( M = \int_{\Omega} dm \right)$

Środek masy układu:  $\vec{r}_{cm} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$        $\left( \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \vec{r} dm \right)$

Aby znaleźć prędkość kątową bryły sztywnej, często wygodnie jest skorzystać z zależności między prędkością w układzie inercyjnym  $U$  oraz w układzie  $U'$  sztywno związanym z bryłą. Zwykle (ale nie zawsze) początek układu  $U'$  umieszczamy w środku masy bryły sztywnej.



$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$$

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

Jeśli znamy prędkość dowolnego punktu bryły (poza punktem  $O'$ ) i jego położenie względem punktu  $O'$ , to z tego wzoru można policzyć wektor prędkości kątowej !

Energia potencjalna bryły sztywnej w jednorodnym ziemskim polu grawitacyjnym

$$\vec{g} = (0, 0, -g), \quad g > 0$$

$$E_{pot} = \int_{\Omega} g z \, dm = g \int_{\Omega} z \, dm = g M z_{cm}$$

to iloczyn całkowitej masy bryły sztywnej, wartości przyspieszenia ziemskiego oraz składowej  $z$  wektora położenia środka masy bryły. Wygląda to tak, jak energia potencjalna punktu materialnego o masie  $M$ , który znajduje się na wysokości  $z_{cm}$ .

Energia kinetyczna jest sumą (całką) po wszystkich punktach bryły sztywnej:

$$\vec{v}_{tr} \equiv \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad M \equiv \sum_i m_i \rightarrow \int_{\Omega} dm$$

$$E_{kin} = \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm \vec{v}^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{v}_{tr}^2 + (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 + 2 \vec{v}_{tr} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$$

$$= \frac{1}{2} \vec{v}_{tr}^2 \int_{\Omega} dm + (\vec{v}_{tr} \times \vec{\omega}) \cdot \int_{\Omega} dm \vec{r}' + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_{tr}^2 + (\vec{v}_{tr} \times \vec{\omega}) \cdot \int_{\Omega} dm \vec{r}' + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$$

Dwa szczególne przypadki:

- (1) Jeden punkt bryły sztywnej jest nieruchomy w układzie  $U$   
(na przykład ruch względem ustalonej osi obrotu)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_{tr}^2 + (\vec{v}_{tr} \times \vec{\omega}) \cdot \int_{\Omega} dm \vec{r}' + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$$

- (2) Zapisujemy energię kinetyczną jako sumę energii kinetycznej środka masy oraz energii kinetycznej względem środka masy  
(na przykład staczanie się bryły z równi pochyłej)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M \vec{v}_{tr}^2 + (\vec{v}_{tr} \times \vec{\omega}) \cdot \int_{\Omega} dm \vec{r}' + \frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2$$

prędkość  
środku masy

## Ruch płaski bryły sztywnej

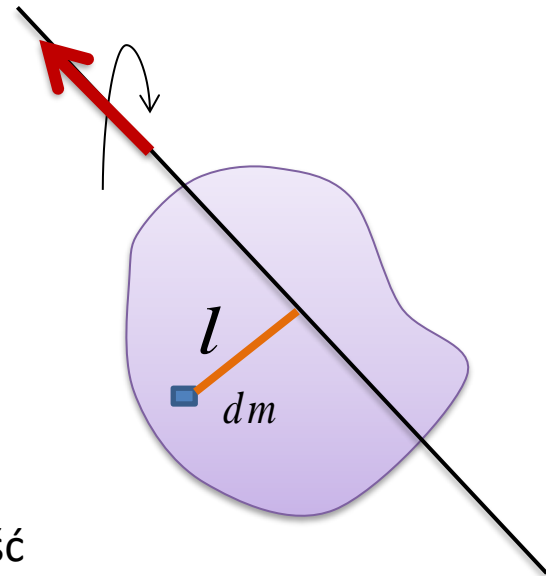
Każdy punkt bryły sztywnej porusza się stale w płaszczyźnie równoległej do pewnej ustalonej płaszczyzny w układzie odniesienia  $U$  zwanej płaszczyzną kierującą. Chwilowa oś obrotu jest stale prostopadła do płaszczyzny kierującej, podobnie jak wektor prędkości kątowej.

Wówczas nie potrzebujemy ogólnego wzoru z tensorem momentu bezwładności i wystarczy nam moment bezwładności względem ustalonej osi:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} dm (\vec{\omega} \times \vec{r}')^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \int_{\Omega} dm l^2$$

odległość  
od osi obrotu



Z punktu widzenia dzisiejszego wykładu umiejętność  
znajdowania energii kinetycznej i potencjalnej układu odgrywa  
kluczową rolę !

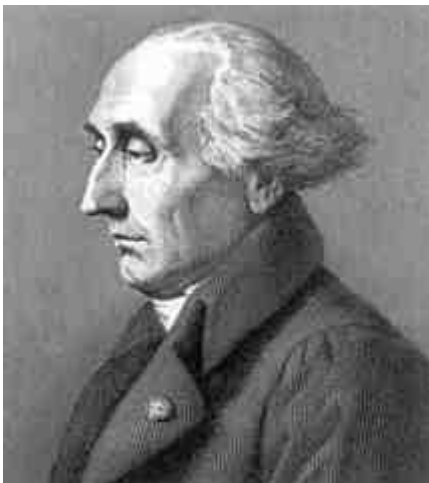


Na poprzednich wykładach poznaliśmy zasady dynamiki Newtona oraz ich konsekwencje, zwłaszcza prawa zachowania dla pojedynczego punktu materialnego i układu punktów materialnych.

Wiemy, że przy pomocy równań Newtona możemy (w zasadzie) przewidzieć, jak będzie wyglądać ruch układu punktów materialnych, jeśli znamy wszystkie działające siły i warunki początkowe.

Na tym wykładzie będziemy zajmować się elementami **formalizmu Lagrange'a** czyli innego sformułowania dynamiki, którego autorem jest włosko-francuski astronom i matematyk Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Wśród wielu osiągnięć tego człowieka należy wymienić przede

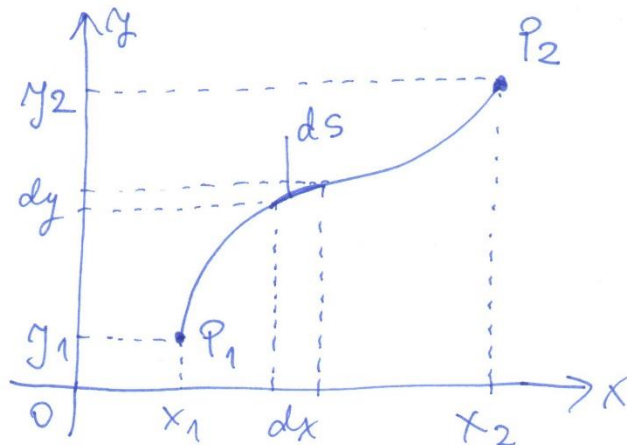
wszystkim stworzenie podstaw rachunku wariacyjnego.



W zagadnieniach wariacyjnych szukamy funkcji, dla której całka (zwana funkcjonałem) przyjmuje wartość ekstremalną.

Przykład:

Jakim wzorem powinna być dana krzywa łącząca na płaszczyźnie  $xy$  dwa ustalone punkty  $P_1(x_1, y_1)$  i  $P_2(x_2, y_2)$  ?



całka  $S(y)$  zależy od wyboru funkcji  $y(x)$

$$S(y) = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}_{\mathcal{L}(y, y', x)}$$

Aby całka  $S(y)$  (zwana funkcjonałem) przyjmowała wartość ekstremalną, funkcja  $y(x)$  musi spełniać warunek zwany równaniem Lagrange'a-Eulera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right)$$

W naszym przypadku zachodzi:

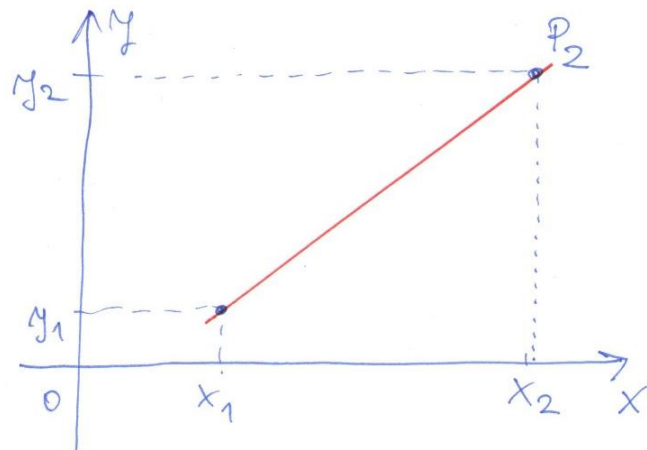
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = \frac{y''}{\left( \sqrt{1+(y')^2} \right)^3}$$

Dlatego dostajemy po prostu:

$$\frac{y''}{\left( \sqrt{1+(y')^2} \right)^3} = 0 \rightarrow y'' = 0,$$

co oznacza, że  $y(x) = ax + b$ ,

gdzie  $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  oraz  $b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$



W mechanice Lagrange'a zasadniczą rolę odgrywa funkcjonal zwany **działaniem**:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) dt \quad \left( \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} \right),$$

który jest zdefiniowany dla ruchu układu, opisanego funkcjami  $q_i(t)$ , trwającego od chwili  $t_1$  do chwili  $t_2$ . Działanie jest więc funkcjonalem ruchu. Funkcjonał jest odwzorowaniem, w którym rolę zmiennej niezależnej pełni funkcja lub zbiór funkcji (przy danym zapisie jest to  $s$  funkcji  $q_i(t)$ ), a wartością odwzorowania jest wartość całki oznaczonej z funkcji Lagrange'a, wykonanej po ustalonym przedziale czasu  $(t_1, t_2)$ .

$s$  jest minimalną liczbą parametrów potrzebnych do opisu położenia wszystkich elementów układu. Nazywamy ją liczbą stopni swobody układu. Funkcje  $q_i(t)$ , wybierane z *uwzględnieniem więzów* do opisu stanu układu, nazywamy współrzędnymi uogólnionymi. Ich pochodne po czasie to tzw. prędkości uogólnione.

Twierdzenie, które podaję bez dowodu, mówi, że funkcja Lagrange'a (lagrangian) dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \\ &= E_{kin}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \\ & - E_{pot}(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t), \end{aligned}$$

czyli jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej układu.

Z zasady najmniejszego działania (ściślej z żądania, by całka działania przyjmowała wartość ekstremalną) wynika, że funkcje  $q_i(t)$ , spełniają układ równań Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$


$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Te równania nazywamy równaniami Lagrange'a (mówiąc ściślej równaniami Lagrange'a II rodzaju, bo są jeszcze równania Lagrange'a I rodzaju). Jest to układ  $s$  równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu na  $s$  funkcji czasu  $q_i(t)$ .

Rozwiązania tych równań zależą więc od  $2s$  stałych, które są wyznaczone przez uogólnione położenia początkowe  $q_i(t=0)$  oraz uogólnione prędkości początkowe  $dq_i/dt(t=0)$ .

Przekonamy się na konkretnych przykładach, że podejście Lagrange'a posiada istotne zalety w sytuacji, gdy można zaniedbać zmiany energii układu na skutek działania sił tarcia:

- Równania Lagrange'a mają tę samą postać, niezależnie od wyboru układu współrzędnych. W podejściu Newtona jest inaczej: Nawet dla pojedynczego punktu materialnego II zasada dynamiki ma inną postać we współrzędnych kartezjańskich, we współrzędnych walcowych i we współrzędnych sferycznych.
- To podejście pozwala całkowicie wyeliminować siły reakcji więzów. Siły reakcji więzów nie zawsze łatwo jest znaleźć, a często nie jesteśmy nimi bezpośrednio zainteresowani, gdy ważna jest dla nas informacja o ruchu układu. Przykład: ruch koralika bez tarcia po drucie o zadanym kształcie.
- Daje łatwiejszy wgląd w wielkości zachowane: Jeśli na przykład zachodzi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const},$$


to taką współrzędną  $q_i$  nazywamy współrzędną cykliczną.

Integralną częścią wykładu jest tekst

<http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/lagrange.pdf>

Polecam także opracowanie doktora Sławomira Brzezowskiego dotyczące mechaniki teoretycznej dostępne na stronie:

<http://www.if.uj.edu.pl/podreczniki-i-skrypty>

W dalszym ciągu wykładu będziemy zajmować się konkretnymi przykładami opracowanymi w postaci notebooków i dostępnymi na mojej stronie.

W szczególności są to:

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo\\_matematyczne.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo_matematyczne.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/ruchoma\\_rownia.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/ruchoma_rownia.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/krzywa\\_trzeciego\\_stopnia\\_sila\\_reakcji.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/krzywa_trzeciego_stopnia_sila_reakcji.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo\\_na\\_rowni.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo_na_rowni.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo_matematyczne_o_zmiennej_dlugosci.nb)

[25/wahadlo\\_matematyczne\\_o\\_zmiennej\\_dlugosci.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/wahadlo_matematyczne_o_zmiennej_dlugosci.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/pret\\_po\\_osiach.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/pret_po_osiach.nb)

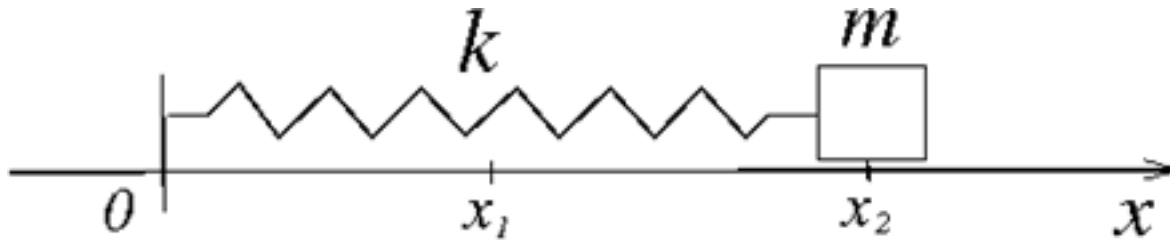
[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/polkula\\_na\\_gladkiej\\_powierzchni.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/polkula_na_gladkiej_powierzchni.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/polkula\\_na\\_szorstkiej\\_powierzchni.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/polkula_na_szorstkiej_powierzchni.nb)

[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/dwa\\_prostokaty\\_2022\\_11\\_07.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/dwa_prostokaty_2022_11_07.nb)



## Przykład 1: oscylator harmoniczny prosty



$x_1$  - długość swobodnej sprężyny

$x_2$  - długość rozciągniętej lub ściśniętej sprężyny

Istotnym parametrem jest różnica  $x = x_2 - x_1$

Mamy tu prosty układ o jednym stopniu swobody, gdzie parametrem określającym stan układu jest rozciągnięcie sprężyny  $q=x$

$$E_{kin}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

$$E_{pot}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} k q^2$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_{kin}(q, \dot{q}, t) - E_{pot}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -kq,$$

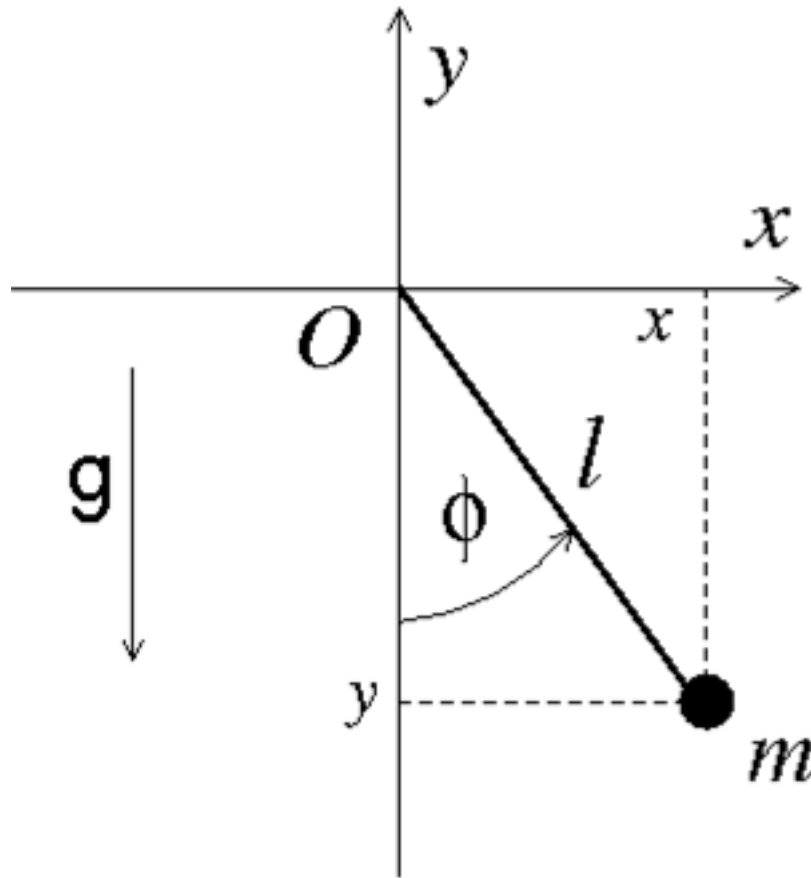
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (m\dot{q}) = m\ddot{q}$$


$$\Rightarrow -kq = m\ddot{q}$$



## Przykład 2: wahadło matematyczne płaskie



Tu też mamy prosty układ o jednym stopniu swobody, gdzie parametrem określającym stan układu jest kąt wychylenia od pionu  $q = \phi$ .

Uwaga: współrzędna uogólniona nie musi być „klasyczną” współrzędną i nie musi mieć wymiaru metra.

Najpierw wyrażamy położenie masy punktowej przez współrzędną uogólnioną  $q$ :

$$x = l \sin(q) \rightarrow \dot{x} = l \dot{q} \cos(q)$$

$$y = -l \cos(q) \rightarrow \dot{y} = l \dot{q} \sin(q)$$

$$E_{kin}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2$$

$$E_{pot}(q, \dot{q}, t) = m g y = -m g l \cos(q)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_{kin}(q, \dot{q}, t) - E_{pot}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + m g l \cos(q)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_{kin}(q, \dot{q}, t) - E_{pot}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}ml^2 \dot{q}^2 + mgl\cos(q)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -mgl\sin(q),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q},$$

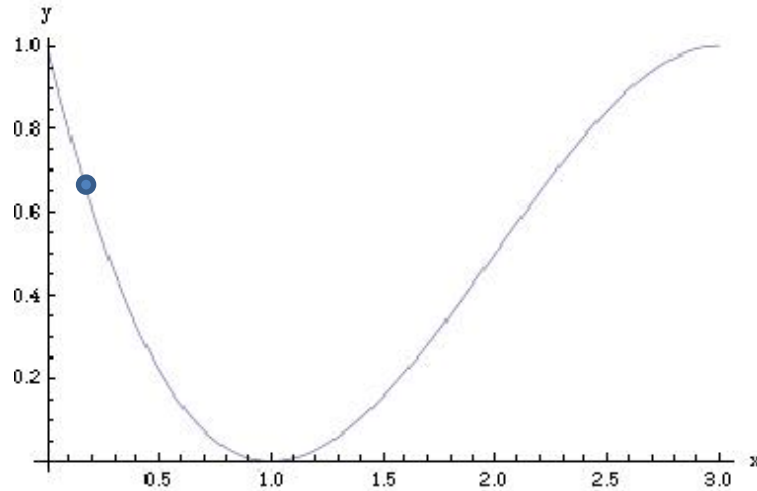
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{q}) = ml^2 \ddot{q}$$

$$\Rightarrow -mgl\sin(q) = ml^2 \ddot{q}$$

$$\ddot{q} = -\frac{g}{l}\sin(q)$$



## Przykład 3: ruch koralika po drucie o zadanym kształcie



Mamy tu prosty układ o jednym stopniu swobody, gdzie parametrem określającym stan układu jest współrzędna  $x$  wektora położenia koralika. Pomimo tego, że koralik porusza się w płaszczyźnie  $xy$ , jego współrzędna  $y$  jest określona przez  $x$  wzorem

$$y = a(x-c)^2 + b(x-c)^3 .$$

Dlatego przyjmujemy, że współrzędna uogólniona to  $q = x$



$$x = q \rightarrow \dot{x} = \dot{q}$$

$$y = a(q - c)^2 + b(q - c)^3 \rightarrow \dot{y} = (-c + q) (2a - 3bc + 3bq) \dot{q}$$

$$E_{kin}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (1 + (c - q)^2 (2a - 3bc + 3bq)^2) \dot{q}^2$$

$$E_{pot}(q, \dot{q}, t) = m g y = -m g (a(q - c)^2 + b(q - c)^3)$$

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_{kin}(q, \dot{q}, t) - E_{pot}(q, \dot{q}, t)$$

$$= -g m (c - q)^2 (a - bc + bq) +$$

$$\frac{1}{2} m (1 + (c - q)^2 (2a - 3bc + 3bq)^2) \dot{q}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -m (c - q) (-2a + 3bc - 3bq) (g - 2(a - 3bc + 3bq) \dot{q}^2),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m (1 + (c - q)^2 (2a - 3bc + 3bq)^2) \dot{q},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left( m (1 + (c - q)^2 (2a - 3bc + 3bq)^2) \dot{q} \right) =$$

$$-4m (c - q) (-2a + 3bc - 3bq) (-a + 3bc - 3bq) \dot{q}^2 +$$
$$m (1 + (c - q)^2 (2a - 3bc + 3bq)^2) \ddot{q}$$

Wszystkie przeliczenia wykonałem w programie *Mathematica*.

*Mathematica* umie w szczególności liczyć pochodne po funkcjach !

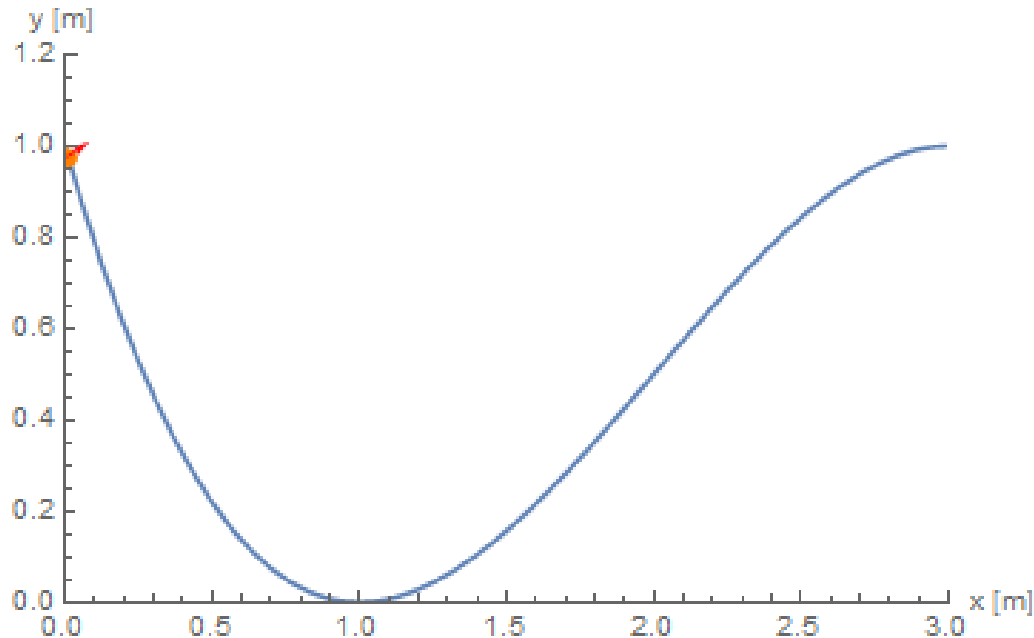
$$\ddot{q} = ((c - q) (2 a - 3 b c + 3 b q) \\ (g + 2 (a - 3 b c + 3 b q) \dot{q}^2)) / \\ (1 + c^2 (2 a - 3 b c)^2 + \\ q (2 a - 6 b c + 3 b q) \\ (-4 a c + 6 b c^2 + q (2 a - 6 b c + 3 b q)))$$

To równanie jest paskudnie nieliniowe i nie ma co nawet marzyć o istnieniu analitycznego rozwiązania. Numeryczne rozwiązanie tego równania nie stwarza większych trudności !

Każdy krok potrzebny do uzyskania tego równania i samo numeryczne rozwiązanie można uzyskać (niemal) automatycznie w programie *Mathematica* 😊

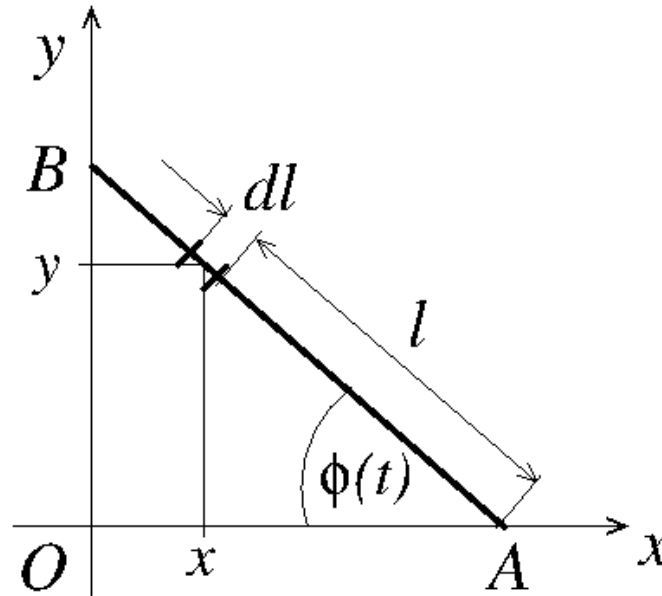
Znamy wektor położenia masy w dowolnej chwili czasu, więc znamy też przyspieszenie  $\vec{a}$ . Z II zasady dynamiki Newtona możemy określić siłę reakcji więzów działającą na masę:

$$m \vec{g} + \vec{F}_{reakcji} = m \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{reakcji} = m \vec{a} - m \vec{g}$$



Siła reakcji zmienia się gwałtownie w czasie ruchu, a jej uwzględnienie w formalizmie II zasady dynamiki jest bardzo trudne. Formalizm Lagrange'a pozwala nam tych trudności ominąć, a po znalezieniu ruchu określić także siły reakcji.

## Przykład 4: ruch pręta po osiach układu współrzędnych (bryła sztywna !)



Jednorodny cienki pręt o masie  $m$  i długości  $L$  ślizga się po osiach układu współrzędnych i nie odrywa się od nich w żadnym momencie ruchu (więzy !). Położenie pręta jest jednoznacznie określone przez kąt  $\phi = \phi(t)$ , co oznacza, że mamy do czynienia z układem o jednym stopniu swobody.

W tym prostym przypadku możemy policzyć energię kinetyczną na dwa sposoby: (a) wprost z definicji, jako sumę (całkę) energii kinetycznych wszystkich punktów pręta albo (b) sumując energię kinetyczną środka masy pręta i energię kinetyczną pręta liczoną względem środka masy. W przypadku (b) należy znaleźć prędkość kątową  $\omega(t)$  i wyrazić ją przez pochodną  $\phi'(t)$ .

Na wykładzie z braku czasu ograniczę się do tego pierwszego sposobu i policzę energię kinetyczną pręta przy pomocy całki.

Drugi sposób można znaleźć w notebooku.

Dowolny punkt pręta ma położenie i prędkość dane przez parametr  $l$

$$x = (L - l) \cos(\varphi) \rightarrow \dot{x} = -(L - l) \dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

$$y = l \sin(\varphi) \rightarrow \dot{y} = l \dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

$$\vec{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left( l^2 \cos^2(\varphi) + (L - l)^2 \sin^2(\varphi) \right) \dot{\varphi}^2$$

Energię kinetyczną policzymy jako sumę (całkę) energii kinetycznych wszystkich punktów pręta:

$$dE_{kin} = \frac{1}{2} dm (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^L dm (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{m dl}{L} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{m dl}{L} (l^2 \cos^2(\phi) + (L-l)^2 \sin^2(\phi)) \dot{\phi}^2 = \frac{1}{6} L^2 m \dot{\phi}^2$$

Energia potencjalna zależy jedynie od wysokości środka masy pręta. Dla jednorodnego pręta środek masy znajduje się oczywiście w jego środku geometrycznym.

$$E_{pot} = mg \frac{1}{2} L \sin(\phi)$$

Mamy więc bardzo prostą funkcję Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, t) = E_{kin}(\phi, \dot{\phi}, t) - E_{pot}(\phi, \dot{\phi}, t) = \frac{1}{6} L^2 m \dot{\phi}^2 - mg \frac{1}{2} L \sin(\phi)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} m g L \cos(\phi),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{3} m L^2 \dot{\phi},$$

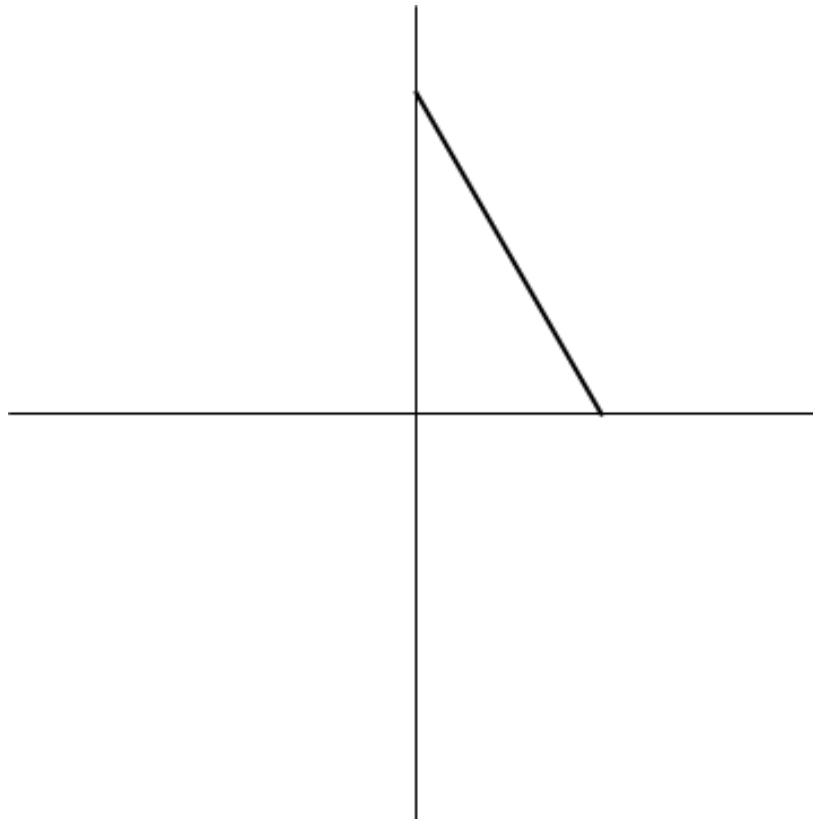
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{3} m L^2 \dot{\phi} \right) = \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\phi}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m g L \cos(\phi) = \frac{1}{3} m L^2 \ddot{\phi}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} \cos(\phi)$$

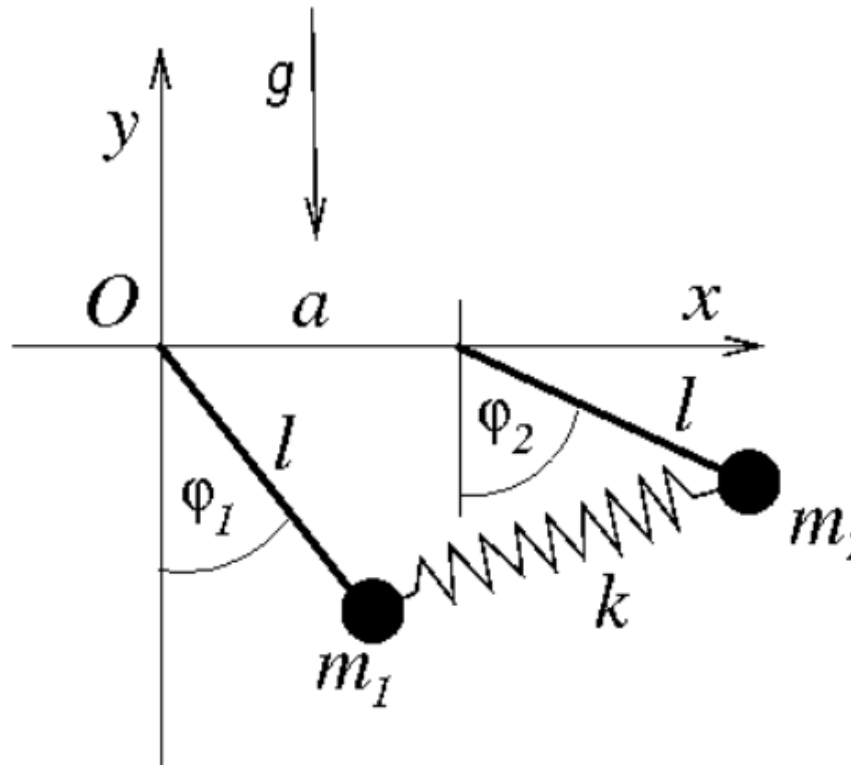


W efekcie dostajemy trochę mniej trywialne wahadło:



## Przykład 5: dwa wahadła sprzężone

Dwa wahadła o tej samej długości  $l$  z masami  $m_1$  i  $m_2$  zawieszono na tej samej wysokości w odległości  $a$ . Masy połączono nieważką sprężyną o stałej sprężystości  $k$ . Zakładamy, że swobodna sprężyna ma długość  $a$ .



Współzrzednymi uogólnionymi są kąty  $\phi_1$  i  $\phi_2$  ( $q_1=\phi_1$  oraz  $q_2=\phi_2$ )

$$x_1(t) = l \sin(\varphi_1(t))$$

$$y_1(t) = -l \cos(\varphi_1(t))$$

$$x_2(t) = a + l \sin(\varphi_2(t))$$

$$y_2(t) = -l \cos(\varphi_2(t))$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$E_{pot} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k \left( \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - a \right)^2$$

$$\mathcal{L} = E_{kin} - E_{pot}$$

To koniec naszej pracy ! Teraz pracuje *Mathematica*

....

...

...

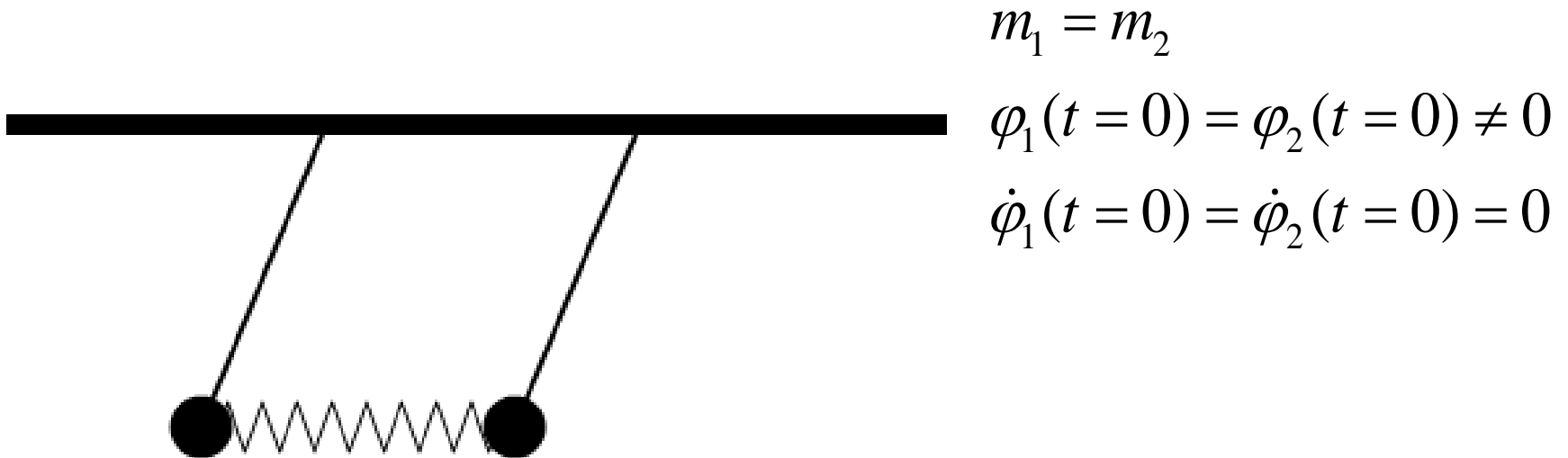
równania Lagrange'a

$$\begin{aligned} \{\phi_1''[t] = & -\frac{1}{l^2 m_1} \left( g l m_1 \sin[\phi_1[t]] + \left( k l (a \cos[\phi_1[t]] - l \sin[\phi_1[t] - \phi_2[t]]) \right. \right. \\ & \left. \left. \left( a - \sqrt{a^2 + 2 l^2 - 2 l^2 \cos[\phi_1[t] - \phi_2[t]] - 2 a l \sin[\phi_1[t]] + 2 a l \sin[\phi_2[t]]} \right) \right) \right) / \\ & \left. \left( \sqrt{(l \cos[\phi_1[t]] - l \cos[\phi_2[t]])^2 + (a - l \sin[\phi_1[t]] + l \sin[\phi_2[t]])^2} \right) \right), \\ \phi_2''[t] = & -\frac{1}{l^2 m_2} \left( g l m_2 \sin[\phi_2[t]] + \left( k l (a \cos[\phi_2[t]] - l \sin[\phi_1[t] - \phi_2[t]]) \right. \right. \\ & \left. \left. \left( -a + \sqrt{a^2 + 2 l^2 - 2 l^2 \cos[\phi_1[t] - \phi_2[t]] - 2 a l \sin[\phi_1[t]] + 2 a l \sin[\phi_2[t]]} \right) \right) \right) / \\ & \left. \left( \sqrt{(l \cos[\phi_1[t]] - l \cos[\phi_2[t]])^2 + (a - l \sin[\phi_1[t]] + l \sin[\phi_2[t]])^2} \right) \right) \} \end{aligned}$$

W zależności od warunków początkowych mamy różne zachowanie układu. Okazuje się, że jego dowolny ruch jest złożeniem dwóch głównych typów ruchu, zwanych modami.

Poniżej mamy pierwszy z nich:

W każdej chwili  $t$  wahadła mają te same wychylenia, więc sprężyna nie jest ani ściskana, ani rozciągana.



$$m_1 = m_2$$

$$\varphi_1(t=0) = \varphi_2(t=0) \neq 0$$

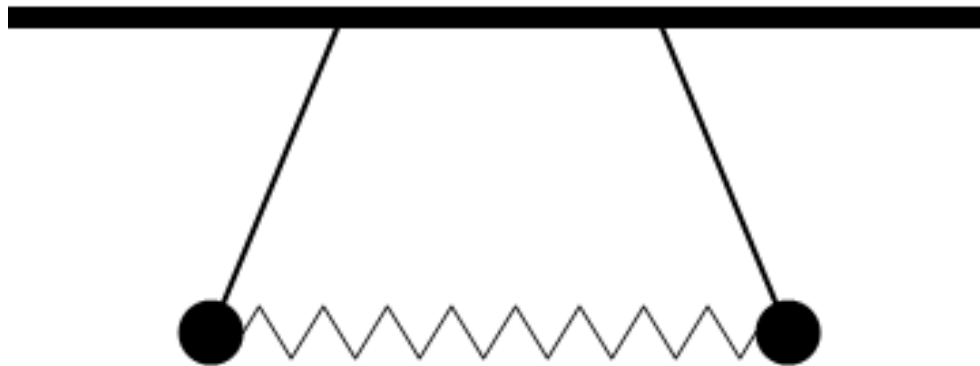
$$\dot{\varphi}_1(t=0) = \dot{\varphi}_2(t=0) = 0$$

A to drugi główny rodzaj ruchu:  
w każdej chwili  $t$  wahadła mają przeciwne wychylenia.

$$m_1 = m_2$$

$$\varphi_1(t=0) = -\varphi_2(t=0) \neq 0$$

$$\dot{\varphi}_1(t=0) = \dot{\varphi}_2(t=0) = 0$$

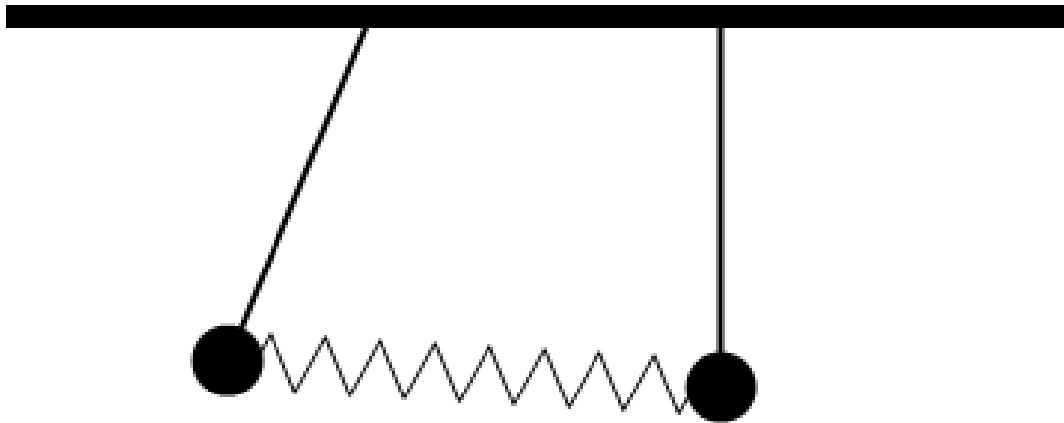


Ruch układu, w czasie którego następuje ciągły przekaz energii między wahadłami jest złożeniem obu głównych ruchów

$$m_1 = m_2$$

$$\varphi_1(t=0) \neq 0, \varphi_2(t=0) = 0$$

$$\dot{\varphi}_1(t=0) = \dot{\varphi}_2(t=0) = 0$$



## Przykład 6: Właściwości ruchu po brachistochronie

Wśród różnych problemów wariacyjnych szczególnie ważne miejsce zarezerwowane jest dla następującego problemu:

Jaki kształt powinna mieć krzywa, po której masa punktowa pod wpływem stałej siły ciężkości zsuwa się w możliwie najkrótszym czasie ?

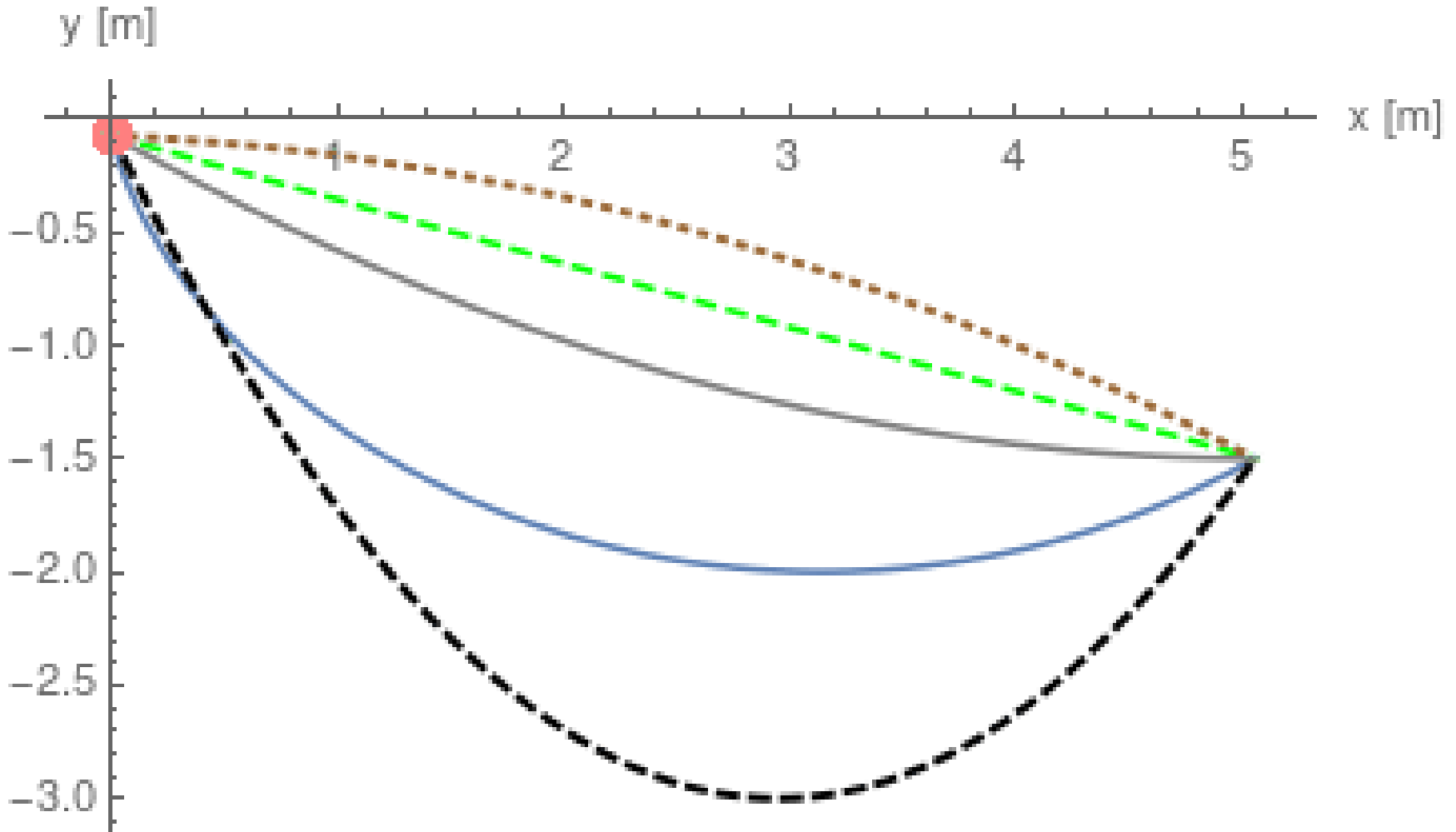
Rozwiązaniem jest tzw. **brachistochrona**, która jest fragmentem cykloidy, czyli krzywej, jaką zakreśla punkt leżący na obwodzie koła, które toczy się bez poślizgu po prostej.

Zagadnienie brachistochrony było jednym z pierwszych, do rozwiązania którego wykorzystano rachunek wariacyjny. Postawiony w 1696 przez Johanna Bernoulliego problem znalezienia krzywej najszybszego spadku został rozwiązany niezależnie przez Leibniza, Newtona, Johanna Bernoulliego oraz de l'Hospitala.

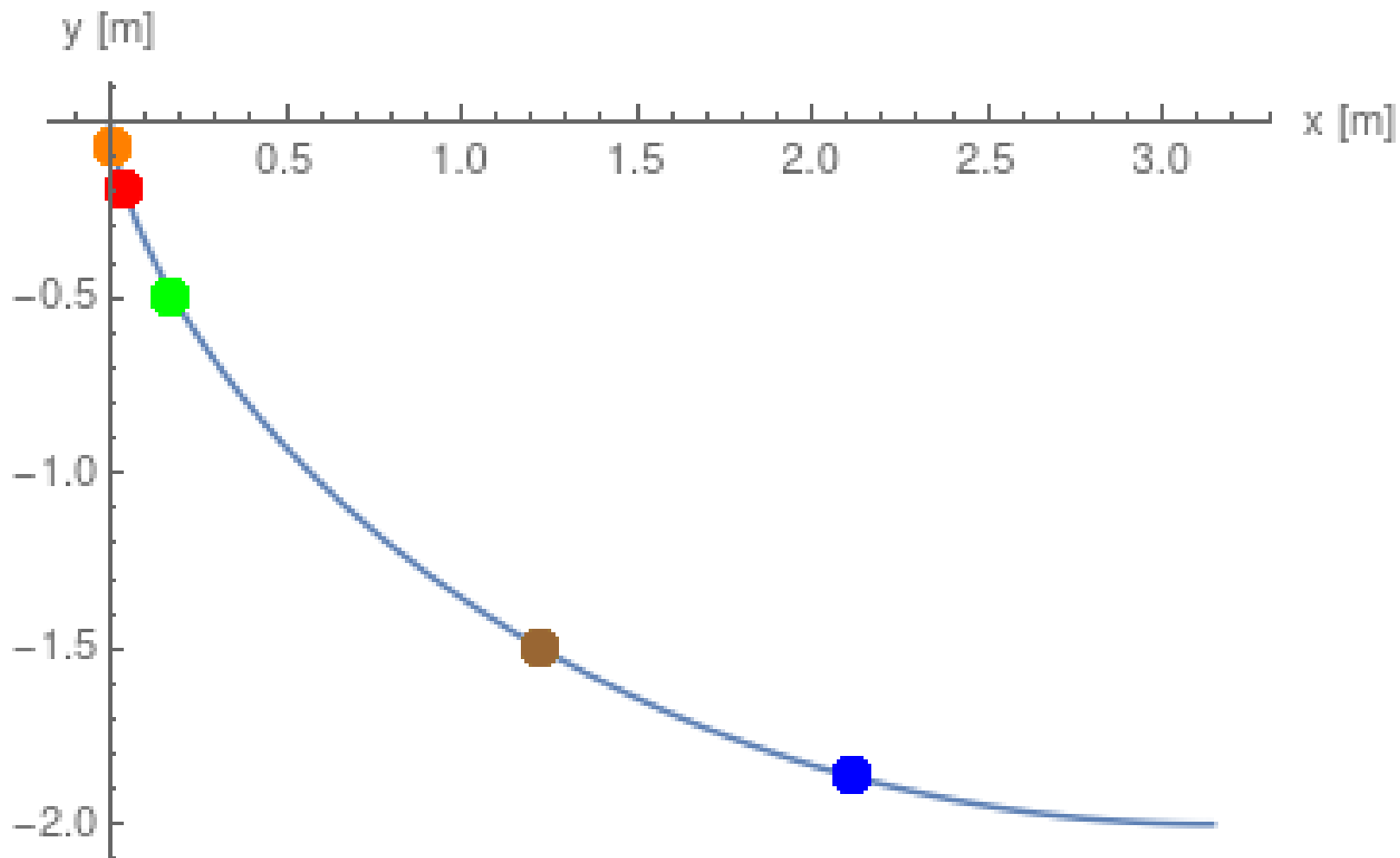
<https://pl.wikipedia.org/wiki/Brachistochrona>



Porównamy czasy ruchu po różnych krzywych łączących dwa ustalone punkty. Wśród nich jest słynna **brachistochrona** (krzywa niebieska), która okaże się krzywą najszybszego spadku. Numeryczne rozwiązania dla pięciu przypadków w oparciu o formalizm Lagrange'a i końcowy animowany gif przygotowałem w programie *Mathematica*.



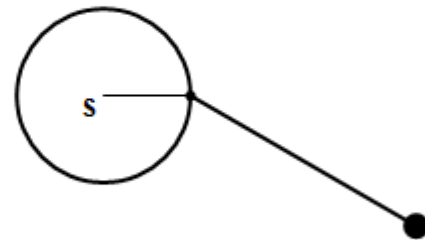
Przekonamy się dodatkowo, że czas ruchu po **brachistochronie** z położenia początkowego (wybranego powyżej punktu najniższego) do jej najniższego punktu nie zależy od wyboru punktu początkowego !



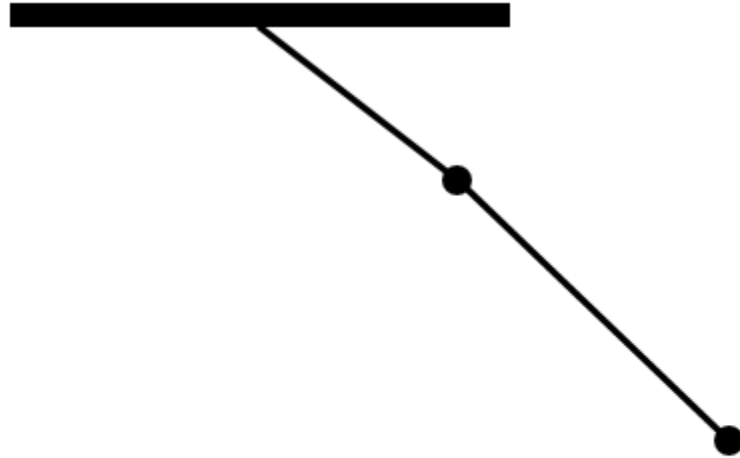
## Przykład 7: wahadło matematyczne z ruchomym punktem zawieszenia

Wahadło matematyczne o długości  $l$  i masie  $m$ , którego punkt zawieszenia porusza się ze stałą prędkością kątową  $\omega$  po okręgu leżącym w pionowej płaszczyźnie. Jest to przykład układu, w którym więzy zależą od czasu. Z takimi układami formalizm Lagrange'a też sobie radzi !

Dla tego układu energia całkowita nie jest stała, a układ przy odpowiednim doborze parametrów i warunków początkowych staje się układem chaotycznym !



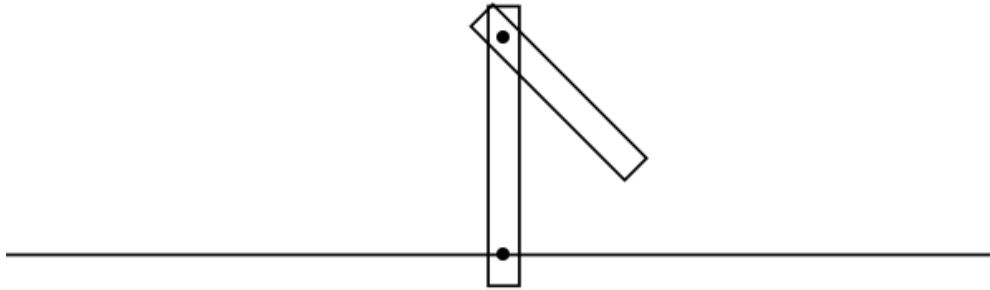
## Przykład 8: podwójne wahadło matematyczne



# Przykład 9: podwójne wahadło fizyczne (zbudowane z dwóch jednorodnych prostokątów)

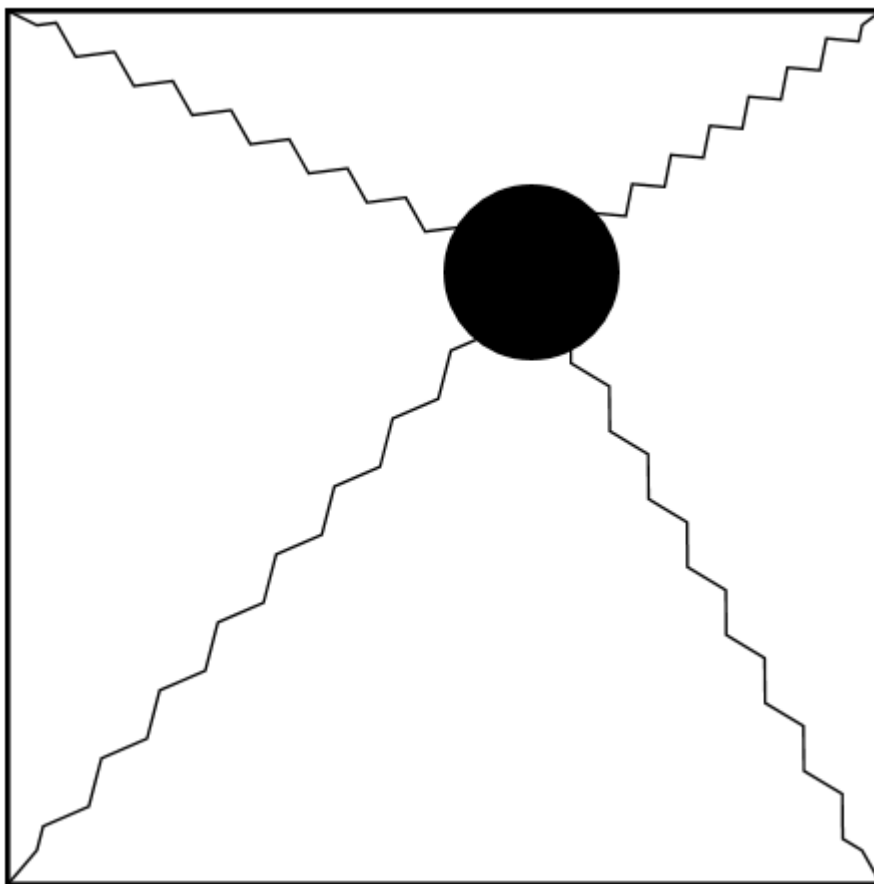
Parametry układu:

$d = 1/20$  m,  $a = 1/20$  m,  $b = 9/20$  m,  $a' = 1/20$  m,  $b' = 7/20$  m,  $M = 1/4$  kg,  $M' = 1/5$  kg



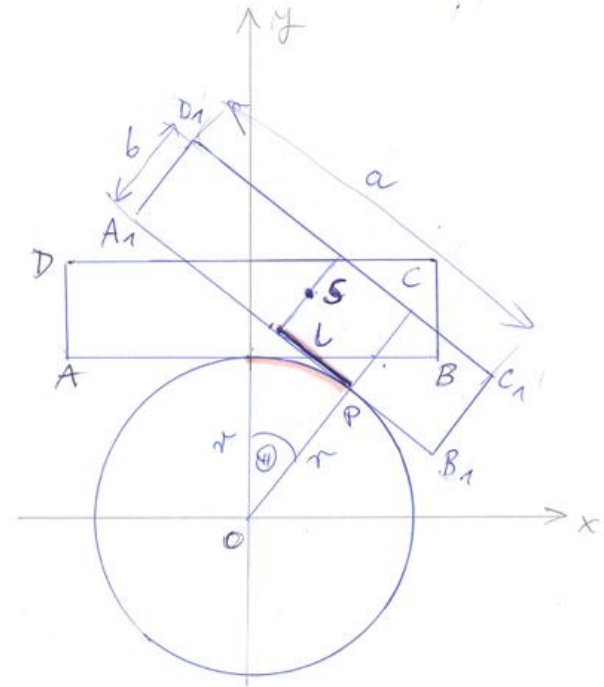
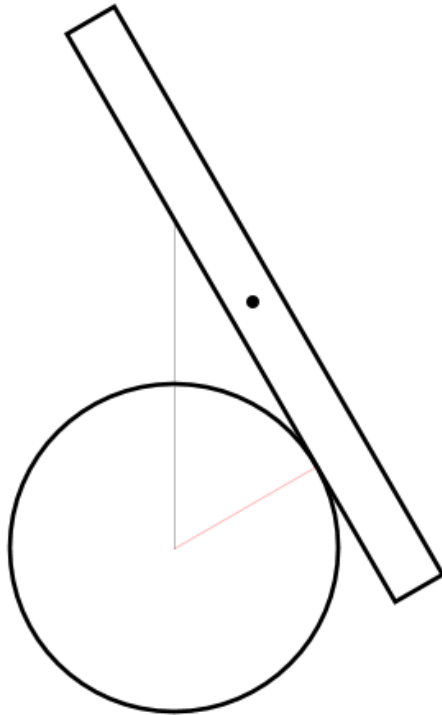
## Przykład 10: kwadrat ze sprężynami

W wierzchołkach A,B,C i D kwadratu o boku  $2a$  zaczepiono identyczne sprężyny. Drugie końce sprężyn przymocowano do punktowej masy  $m$ , która może się poruszać bez tarcia w płaszczyźnie kwadratu. W środku kwadratu żadna ze sprężyn nie jest ani rozciągnięta, ani ściśnięta.

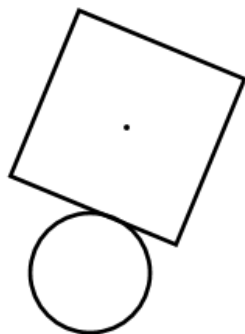


# Przykłady 11 i 12: belka na walcu

Belka, której przekrój poprzeczny jest prostokątem o wymiarach  $a \times b$  przetacza się po walcu o promieniu  $r$ . Dla poziomej belki mamy do czynienia z położeniem równowagi trwałej, gdy  $b < 2r$ .



Belka, której przekrój poprzeczny jest kwadratem o boku  $a$  przetacza się po walcu o promieniu  $r$ . Dla poziomej belki mamy do czynienia z położeniem równowagi CHWIEJNEJ, gdy  $a > 2r$



Rozpatrujemy dwa przedziały czasowe:  
(1) od chwili  $t=0$  do momentu, gdy belka (w danym przypadku sześćcian) odrywa się od walca; w tym przedziale czasowym wykorzystujemy rozwiązanie równania różniczkowego  
(2) po oderwaniu się belki od walca mamy do czynienia ze złożeniem dwóch ruchów, bo środek masy wykonuje rzut ukośny, startując z położenia i prędkości, które posiada w chwili oderwania się belki od walca, a ponadto belka obraca się wokół osi przechodzącej przez środek masy ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , taką samą, jaką miała belka w chwili oderwania się od walca.



Zachęcam do obejrzenia wielu innych przygotowanych przeze mnie przykładów:

<http://users.uj.edu.pl/%7Egolak/zestawyF.html>

<http://users.uj.edu.pl/%7Egolak/zestawyNOF.html>