

Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 9

Na poprzednim wykładzie zaczęliśmy zajmować się elektrostatyką. Do tej pory mówiliśmy w zasadzie o ładunkach w próżni !

Najważniejsze elementy ostatniego wykładu to

- Własności ładunku elektrycznego
- Prawo Coulomba
- Zasada superpozycji
- Definicja natężenia pola elektrycznego
- Wzory na natężenie pola elektrycznego pochodzącego od układu ładunków punktowych i ciągłych rozkładów ładunku
- Prawo Gaussa

Prawo Gaussa:

Strumień natężenia pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą, obejmujący dowolny rozkład ładunku jest niezależny od kształtu tej powierzchni i zależy jedynie od wielkości ładunku położonego wewnątrz powierzchni.

Uwaga:

Prawo Gaussa jest zawsze spełnione, ale nie zawsze użyteczne !
Aby z prawa Gaussa uzyskać informacje o wektorze natężenia pola elektrycznego, rozkład ładunku musi być odpowiednio symetryczny.


Twierdzenie Gaussa

(jedna z wersji ogólnego twierdzenia Stokesa)

Oprócz prawa Gaussa istnieje (matematyczne) twierdzenie, które pozwala przy pewnych założeniach zastąpić liczenie strumienia pola wektorowego przez powierzchnię zamkniętą całką objętościową z dywergencji tego pola wektorowego po obszarze objętym powierzchnią:

$$\oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{W} \, dv$$

całka po
powierzchni
zamkniętej



Co to jest dywergencja pola wektorowego ?

Nie podaję definicji, a tylko zapis we współrzędnych kartezjańskich

$$\vec{W} = (W_x(x, y, z), W_y(x, y, z), W_z(x, y, z))$$

pole wektorowe:
funkcja, która
jest wektorem i
zależy od
zmiennych x, y i z

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

Dywergencja z pola
wektorowego tworzy
funkcję skalarną, która
zależy od zmiennych x, y i z .

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

wektorowy operator
różniczkowy nabra

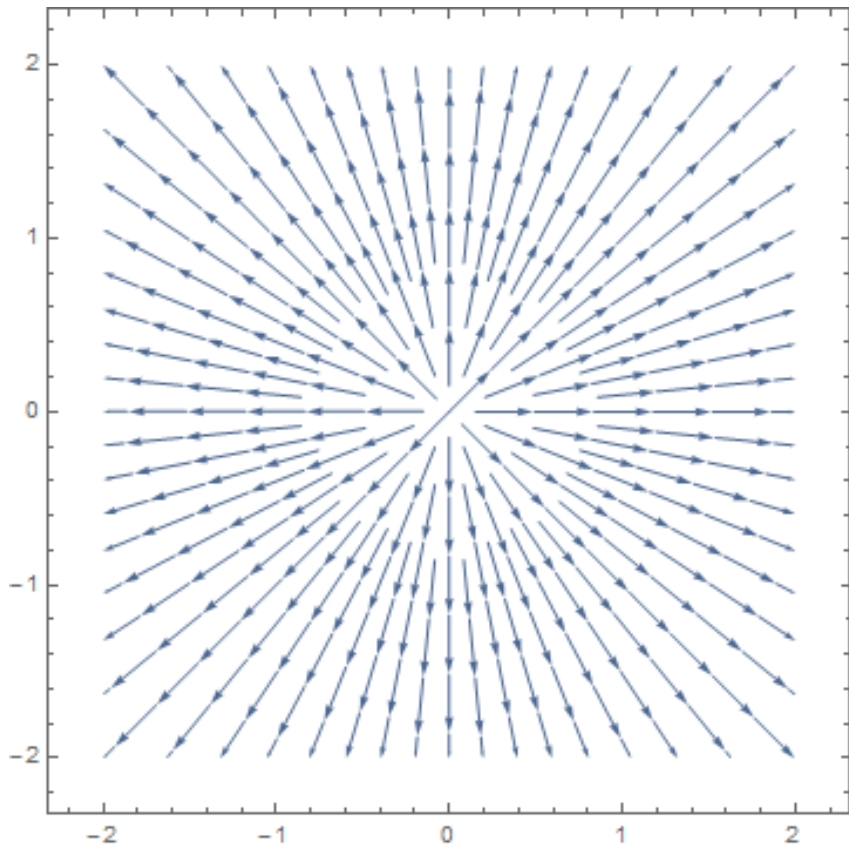
$$\operatorname{div} \vec{W} = \vec{\nabla} \cdot \vec{W}$$

zapis dywergencji w postaci
iloczynu skalarnego operatora
nabra i pola wektorowego

Przykład 1: $\vec{W} = (x, y, z)$

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Dywergencja jest taka sama w każdym punkcie przestrzeni

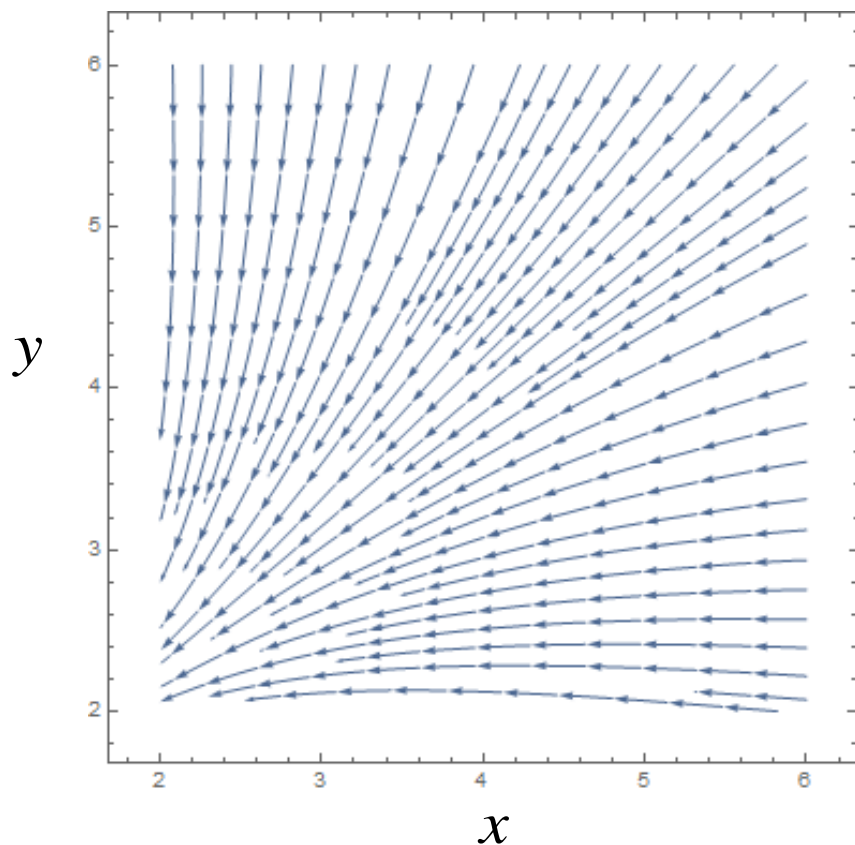


Linie pola wektorowego W w płaszczyźnie xy uzyskane w programie *Mathematica*[®] przy pomocy instrukcji StreamPlot

Przykład 2: $\vec{W} = (-1 - x^2 + y, 1 + x - y^2, 2z^3)$

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{\partial(-1 - x^2 + y)}{\partial x} + \frac{\partial(1 + x - y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2z^3)}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{W} = -2x - 2y + 6z^2$$



Linie pola
wektorowego W
w płaszczyźnie xy
uzyskane w
programie
Mathematica[®]
przy pomocy
instrukcji
StreamPlot

Teraz dla wektora natężenia pola elektrycznego **łączymy prawo Gaussa i twierdzenie Gaussa:**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv$$


prawo Gaussa w postaci całkowej, jeśli obszar Ω objęty przez zamkniętą powierzchnię S zawiera objętościowy rozkład ładunku

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dv$$

twierdzenie Gaussa

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k \rho(x, y, z) = (SI) = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

prawo Gaussa w postaci różniczkowej



Mamy równość całek, ale ponieważ obszar Ω możemy uczynić dowolnie małym, więc równość musi zachodzić dla funkcji podcałkowych !

Ciekawostka:

Czy prawo Gaussa w postaci różniczkowej ma sens dla punktowych ładunków ?

Rozważmy przypadek jednego ładunku Q , który znajduje się w punkcie \mathbf{r}' :

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

trójwymiarowa
funkcja uogólniona
(dystrybucja) delta
Diraca

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = k Q \operatorname{div} \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = k Q 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = 4\pi k \rho(\vec{r})$$

$$\rightarrow \rho(\vec{r}) = Q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

Ten wynik ma sens: gęstość ładunku jest różna od zera tylko w punkcie \mathbf{r}' , a całkowity ładunek wynosi Q :

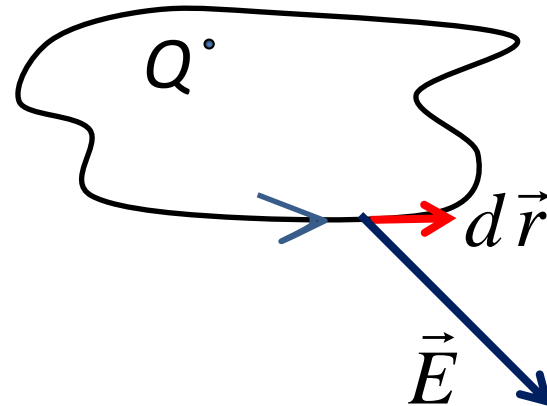
$$\iiint_{R^3} \rho(\vec{r}) dv = Q \iiint_{R^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dv = Q$$

Jakie inne własności posiada wektor natężenie pola elektrycznego ?
(przydadzą się wiadomości z mechaniki)

Gdybyśmy mieli jeden ładunek punktowy, to zachodziłoby:

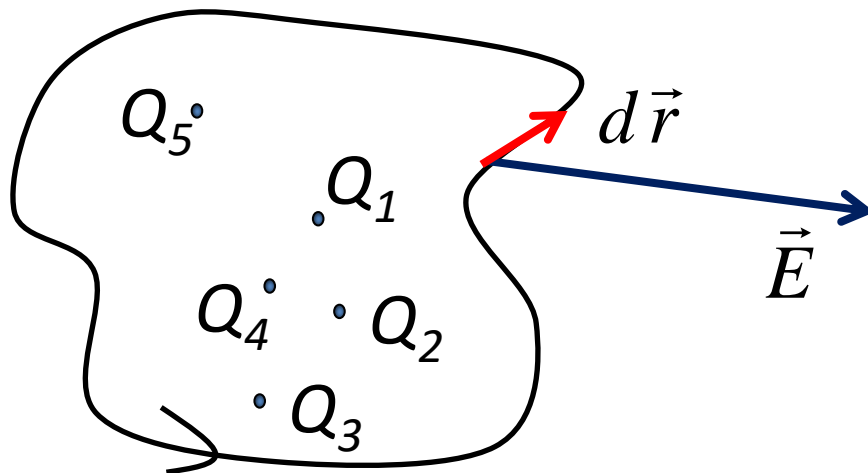
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0,$$

dowolny
kontur
zamknięty



gdyż własności matematyczne siły wynikającej z prawa powszechnego ciążenia i siły kulombowskiej są takie same ! Ponieważ kontur jest dowolny, nie jest ważne, czy ładunek znajduje się w początku układu. Ważna jest tylko swoboda wyboru położenia konturu względem ładunku.

Co się dzieje, gdy pole pochodzi od układu ładunków ?



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) \cdot d\vec{r}$$

dowolny
kontur
zamknięty

dowolny
kontur
zamknięty

$$= \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \dots = 0,$$

dowolny
kontur
zamknięty

dowolny
kontur
zamknięty

ponieważ każda całka po zamkniętym konturze wynosi zero.

W takim razie możemy skorzystać z innej wersji twierdzenia Stokesa, bo znikanie całki po konturze zachodzi dla dowolnie małego konturu i odpowiadającej mu powierzchni.

$$0 = \oint_{\text{kontur zamknięty}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{powierzchnia rozpięta na konturze}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$$

↑
↑
↑
 rotacja

Rotacja natężenia pola elektrycznego od **statycznego** rozkładu ładunków wynosi zero ! Przypominam, jak liczyć rotację:

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

zapis rotacji we współrzędnych kartezjańskich

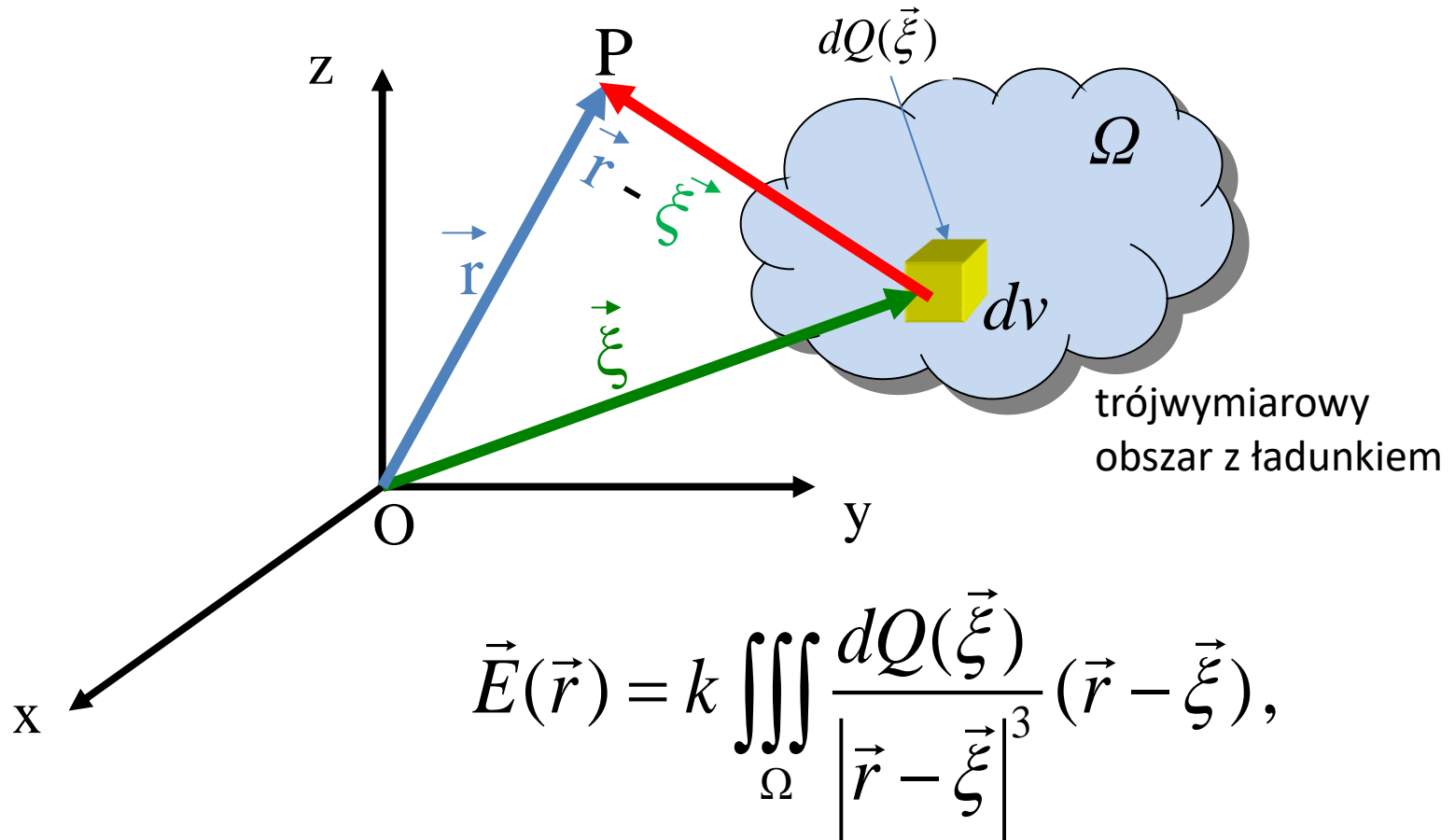
Po rozpisaniu na składowe

$$\text{rot } \vec{F} \equiv \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$
$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Jakie są konsekwencje znikania rotacji, czyli bezwirowości natężenia pola wektorowego ? Istnienie potencjału !

$$\vec{E} = -grad V(\vec{r}) \equiv -\nabla V(\vec{r})$$

Dla ładunku rozłożonego w obszarze Ω z gęstością objętościową $\rho(x,y,z)$ mieliśmy:



gdzie $dQ(\vec{\xi}) = \rho(\vec{\xi}) dv = \rho(\vec{\xi}) dx dy dz$

Dla funkcji występującej pod całką występuje następująca zależność:

$$\frac{(\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3} = -grad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|}.$$

Łatwo to sprawdzić, wiedząc, że:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - \xi_3)^2}}$$

oraz, na przykład

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} = -\frac{1}{2} \frac{2(x - \xi_1)}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^3}$$

W takim razie wzór na natężenie pola elektrycznego możemy zapisać poprzez gradient:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -grad \left(k \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{\xi}) dv}{|\vec{r} - \vec{\xi}|} \right)$$

Funkcję skalarną:

$$V(\vec{r}) = k \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{\xi}) dv}{|\vec{r} - \vec{\xi}|}$$

nazywamy potencjałem elektrycznym.

Analogiczne wyrażenia na potencjał uzyskamy dla ciągłych powierzchniowych i liniowych rozkładów ładunku elektrycznego oraz dla układu ładunków punktowych.

W szczególności dla pojedynczego ładunku znajdującego się w początku układu współrzędnych:

$$\vec{E} = kQ \frac{\vec{r}}{r^3}$$

oraz

$$V(r) = \frac{kQ}{r} + C,$$

gdzie zwykle przyjmujemy $C=0$, by w nieskończoności potencjał był równy zero.

Dla N ładunków q_1, q_2, \dots, q_N rozmieszczonych w przestrzeni, natężenie pola elektrycznego dane jest wzorem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Temu natężeniu pola elektrycznego odpowiada potencjał dany wzorem:

$$V(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Równanie Poissona i Laplace'a

Połączymy różniczkowe prawo Gaussa:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k \rho$$

i możliwość zapisania natężenia pola elektrycznego przy pomocy potencjału:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V(\vec{r}),$$

by dostać równanie na potencjał,

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} V(\vec{r}) = 4\pi k \rho,$$

zwane równaniem Poissona.

Zapis przy pomocy operatora nabra:

$$\mathit{div grad} V(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})V = \nabla^2 V$$

We współrzędnych kartezjańskich

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Operator $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$ nosi nazwę laplasjanu lub operatora Laplace'a.

bardzo
często
stosowany
zapis

$$\rightarrow \Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = -4\pi k\rho = (SI) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \begin{array}{l} \text{równanie} \\ \text{Poissona} \end{array}$$

W obszarze bez gęstości ładunku równanie Poissona przechodzi w równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 V = 0 \quad \begin{array}{l} \text{równanie} \\ \text{Laplace'a:} \end{array}$$

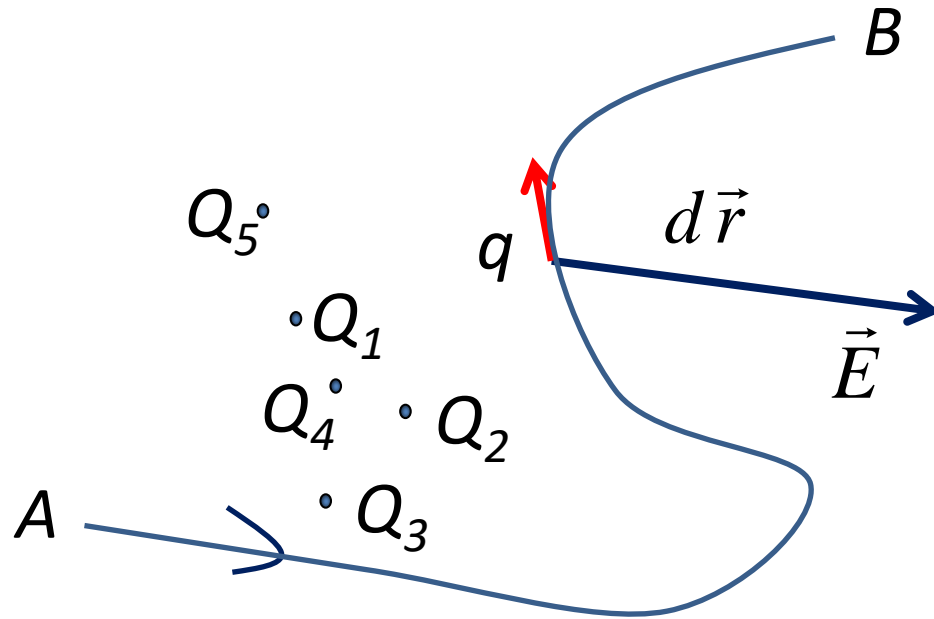
Wiemy, że natężenie pola elektrycznego można zapisać przy pomocy potencjału elektrycznego:

$$\vec{E} = - \text{grad } V(\vec{r})$$

Związek między potencjałem elektrycznym i natężeniem pola elektrycznego można zapisać także w innej, równoważnej postaci jako całkę po dowolnej drodze od OS (wybranego punktu odniesienia, zwykle nieskończoności) do punktu P :

$$V(\vec{r}) = - \int_{OS}^{P(\vec{r})} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ten wzór jest wygodny, gdy będziemy liczyć minimalną (bez nadawania energii kinetycznej) pracę sił zewnętrznych potrzebną do przeniesienia ładunku q w statycznym polu elektrycznym wytworzonym przez inne nieruchome ładunki.



$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B}^{zew} &= \int_A^B \vec{F}^{zew} \cdot d\vec{l} = \int_A^B (-q\vec{E}) \cdot d\vec{l} = (-q) \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \\
 &= (-q) \left(\int_{OS}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{OS}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = q(V(B) - V(A))
 \end{aligned}$$

$$W_{A \rightarrow B}^{zew} = q(V(B) - V(A)) \rightarrow V(B) - V(A) = \frac{W_{A \rightarrow B}^{zew}}{q}$$

Mamy więc ważny związek między pracą sił zewnętrznych, a różnicą potencjałów:

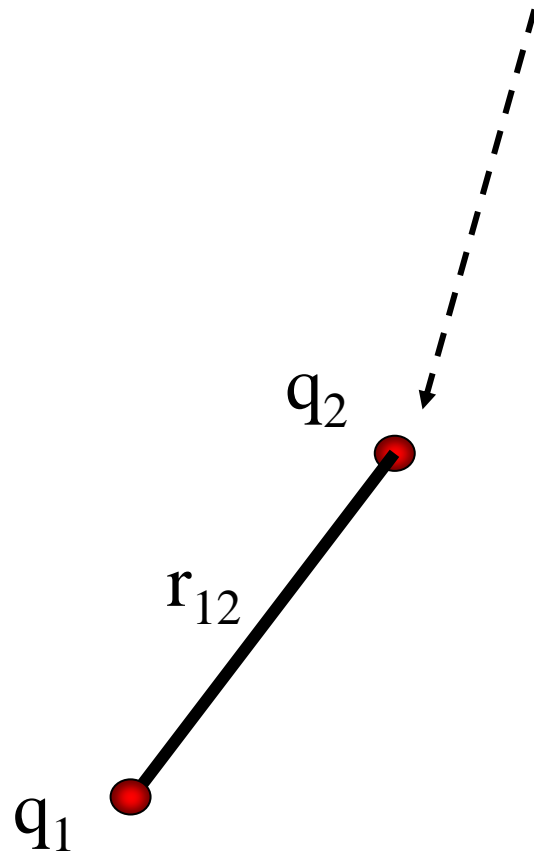
Różnica potencjałów między punktami A i B jest równa pracy przypadającej na jednostkę ładunku, koniecznej do przesunięcia ładunku z punktu A do punktu B .

Jeśli punkt odniesienia (OS) wybierzemy w nieskończoności, to praca potrzebna, by ładunek przesunąć z nieskończoności do jakiegoś punktu P , jest równa:

$$W_{\infty \rightarrow P(\vec{r})}^{zew} = q(V(\vec{r}) - V(\infty)) = qV(\vec{r}) \equiv E_{pot}(\vec{r}),$$

co potraktujemy jako przepis na energię potencjalną, E_{pot} !

Energia układu ładunków punktowych

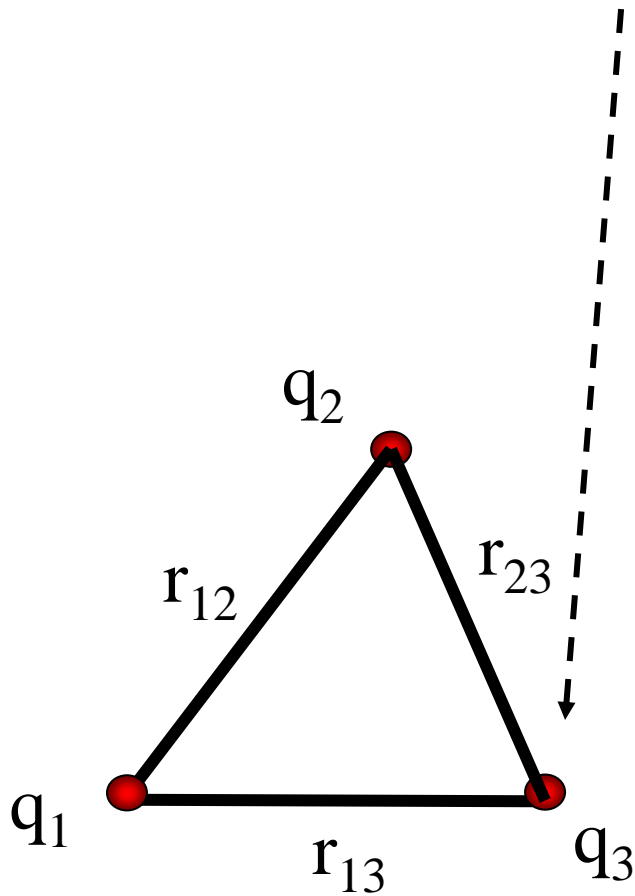


$$r_{ij} \equiv \left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right|$$

odległość
między dwoma
ładunkami

Chcemy zbudować układ ładunków punktowych, z zadanymi odległościami między ładunkami. Policzmy pracę potrzebną na utworzenie takiego układu, który powstaje przez kolejne dokładanie ładunków. Na początek do pierwszego ładunku przesuujemy z nieskończoności drugi ładunek.

$$W_{1+2} = q_2 \left(\frac{k q_1}{r_{12}} \right)$$



Teraz do istniejącego układu dwóch ładunków dodajemy z nieskończoności trzeci ładunek, wykonując pracę:

$$W_{12+3} = q_3 \left(\frac{k q_1}{r_{13}} + \frac{k q_2}{r_{23}} \right)$$

Gdybyśmy do tak zbudowanego układu chcieli dosunąć czwarty ładunek, to musielibyśmy wykonać pracę:

$$W_{123+4} = q_4 \left(\frac{k q_1}{r_{14}} + \frac{k q_2}{r_{24}} + \frac{k q_3}{r_{34}} \right)$$

I tak dalej ...

Zatrzymajmy się przy trzech ładunkach.

Energia takiego układu to suma prac W_{1+2} oraz W_{12+3}

$$E_{123} = q_2 \left(\frac{k q_1}{r_{12}} \right) + q_3 \left(\frac{k q_1}{r_{13}} + \frac{k q_2}{r_{23}} \right)$$

Powyższe wyrażenie możemy przekształcić do równoważnej postaci:

$$E_{123} = \frac{k}{2} \left[q_1 \left(\frac{k q_2}{r_{12}} + \frac{k q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{k q_1}{r_{12}} + \frac{k q_3}{r_{23}} \right) + q_3 \left(\frac{k q_1}{r_{13}} + \frac{k q_2}{r_{23}} \right) \right],$$

gdzie każdy nawias okrągły podaje wyrażenie na potencjał wytwarzany przez dwa ładunki w miejscu, gdzie znajduje się trzeci z ładunków.

$$E_{123} = \frac{1}{2} (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

Ten wynik można łatwo uogólnić dla układu N ładunków. Otrzymamy wtedy:

$$E_{12\dots N} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N q_n V_n$$

Dlatego dla układu N ładunków, z których każdy oddziałuje z $(N-1)$ ładunkami, ale nie oddziałuje ze swym własnym polem elektrycznym, otrzymujemy następujące wyrażenie na energię:

$$E_{12\dots N} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N k \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Z definicji potencjału:

$$\begin{aligned} E_{12\dots N} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N k \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i}^N k \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i}^N k \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i}^N V_j(\vec{r}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_{\text{odczuwany przez } q_i}(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

Dla dowolnego **ciągłego** rozkładu ładunku $\rho(\vec{r})$

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

całka po obszarze,
w którym
znajduje się
rozkład ładunku

Jeśli do poprzedniego wzoru wprowadzimy wyrażenie na potencjał,
to otrzymamy całkę sześciokrotną:

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega'} k \frac{\rho(\vec{r}') \rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv dv'$$

Możemy także w równaniu

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dv$$

wyrazić gęstość ładunku z równania Poissona:

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi k} \int_{\Omega} V(\vec{r}) \Delta V(\vec{r}) dv$$

Korzystając z twierdzeń analizy wektorowej dostajemy jeszcze inny wzór:

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi k} \int_{R^3} \vec{E}^2 dv$$

całka po obszarze, w którym nie
znika natężenie pola
elektrycznego: najbezpieczniej
całkować po całej przestrzeni

Gęstość przestrzenna energii (ilość energii w jednostce objętości) pola elektrycznego dana jest więc wzorem:

$$w = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi k} \vec{E}^2 = (SI) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

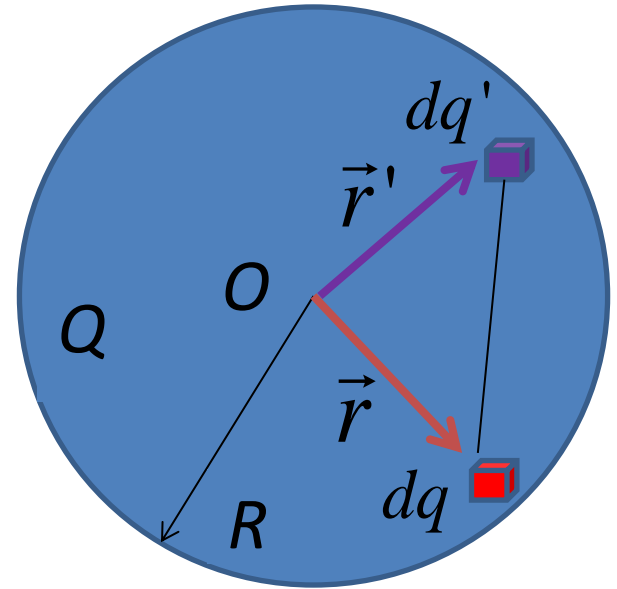
Uwaga:

Ta ostatnia postać wzoru na energię,

$$E = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi k} \int_{R^3} \vec{E}^2 dv = (SI) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{R^3} \vec{E}^2 dv,$$

jest wygodna na przykład, gdy rozważamy falę elektromagnetyczną. W tym przypadku istnieje pole elektryczne bez ładunków elektrycznych. Nie jest to oczywiście problem elektrostatyczny !

Dla jednego przypadku pokażemy równoważność różnych sposobów liczenia energii elektrostatycznej. Będzie to jednorodnie naładowana objętościowo kula o promieniu R i całkowitym ładunku Q .



I sposób (bezpośrednie całkowanie przybliżenie do energii elektrostatycznej oparte wprost na definicji (Rozwiązanie przy pomocy Mathematici))

$$E_p = \frac{1}{2} \int_K \int_K \frac{k dq dq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{k q^2}{2} \int_K d^3\vec{r} \int_K d^3\vec{r}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Za względu na całkowanie po \vec{r}' można przyjąć, iż $\vec{r} \parallel z$, $\vec{r} = (0, 0, r)$

$$\int_K d^3\vec{r} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\Theta') \int_0^R \frac{dr' r'^2}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\Theta'}}$$

$$A = \frac{-3r^2 \cos\Theta'}{2} + \frac{(R+3r \cos\Theta') \sqrt{r^2-2Rr \cos\Theta'+R^2}}{2}$$

$$- \frac{(-1+3 \cos^2\Theta') r^2 \ln(r-r \cos\Theta')}{2} +$$

$$+ \frac{(-1+3 \cos^2\Theta') r^2 \ln(-r \cos\Theta'+R+\sqrt{r^2-2Rr \cos\Theta'+R^2})}{2}$$

$$= A(r, R, \cos\Theta')$$

$$\int_{-1}^1 d(\cos \Theta') A(r, R, \cos \Theta') \equiv B(r, R)$$

$$= \frac{(R-r)(r^2 + rR - 2R^2)}{6r} - \frac{(R+r)(r^2 - rR - 2R^2)}{6r}$$

$$\int_0^R dr r^2 B(r, R) = \frac{8R^5}{30}$$

$$E_p = \frac{8R^5}{30} \cdot \frac{2\pi}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{4\pi} \cdot \frac{kQ^2}{2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

cattia
cattia

po dφ)
po dΩ

$$E_p = \frac{Q^2 k}{R} \cdot \frac{4}{15} \cdot 4 \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{5} \frac{kQ^2}{R}$$

II sposób: Liczę energię, korzystając z wzoru na natężenie pola elektrycznego. Całka jest liczona osobno w dwóch obszarach !

II sposób

$$E_p = \int_{R^3} \frac{1}{8\pi k} \vec{E}^2 d^3r$$

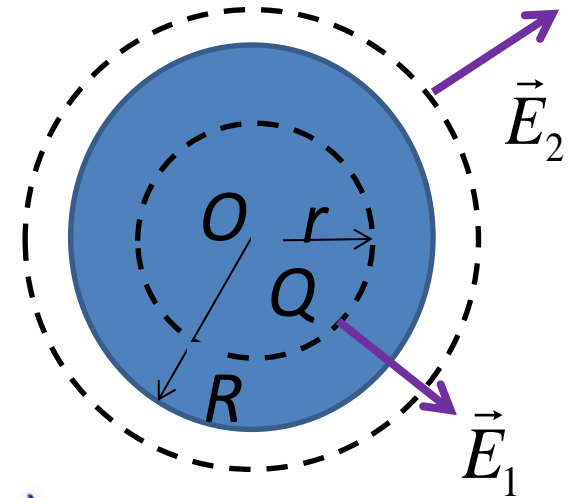
$$E_p = \frac{1}{8\pi k} 4\pi \int_0^R dr r^2 k \frac{Q^2}{R^6} r^2$$

$$+ \frac{1}{8\pi k} 4\pi \int_R^\infty dr r^2 k \frac{Q^2}{r^4} =$$

$$= \frac{1}{2} k Q^2 \left(\frac{1}{R^6} \int_0^R dr r^4 + \int_R^\infty dr \frac{1}{r^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} k Q^2 \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) =$$

$$= \frac{3}{5} k Q^2 \frac{1}{R}$$



III sposób: Buduję kulę z cienkich warstewek sferycznych o promieniu r i grubości dr . Energia własna takiej warstewki jest zaniedbywalna !

III sposób

Tadunek warstewki
o promieniu r
i grubości dr

$$E_p = \int_0^R \phi(r) dq(r)$$

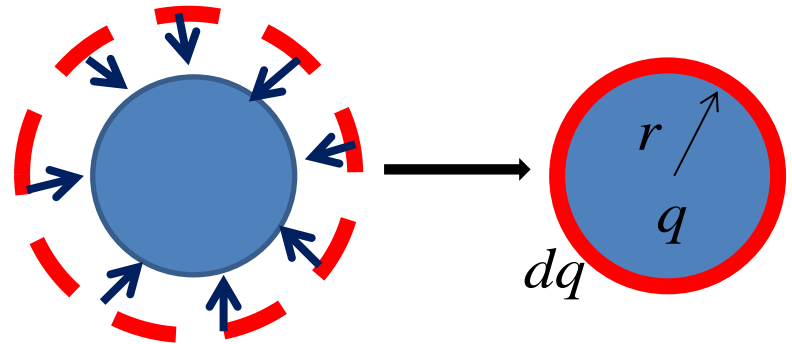
potencjał
kuli materialnej
jednorodnie
na jej powierzchni

$$\phi(r) = \frac{kq}{r} = k \frac{r^2}{R^3} Q$$

$$dq_r = 4\pi r^2 dr \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3Q \frac{1}{R^3} r^2 dr$$

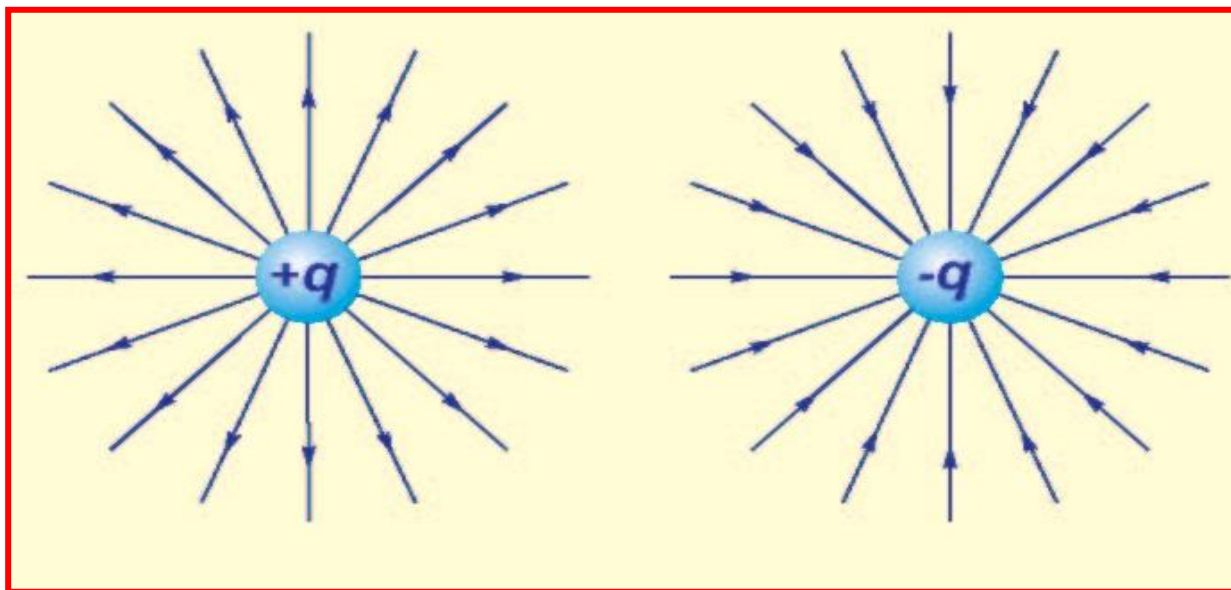
$$\begin{aligned} \phi(r) dq(r) &= k \frac{r^2}{R^3} Q \cdot 3Q \frac{1}{R^3} r^2 dr = \\ &= \frac{3kQ^2}{R^6} r^4 dr \end{aligned}$$

$$E_p = \frac{3}{5} kQ^2 \frac{1}{R}$$

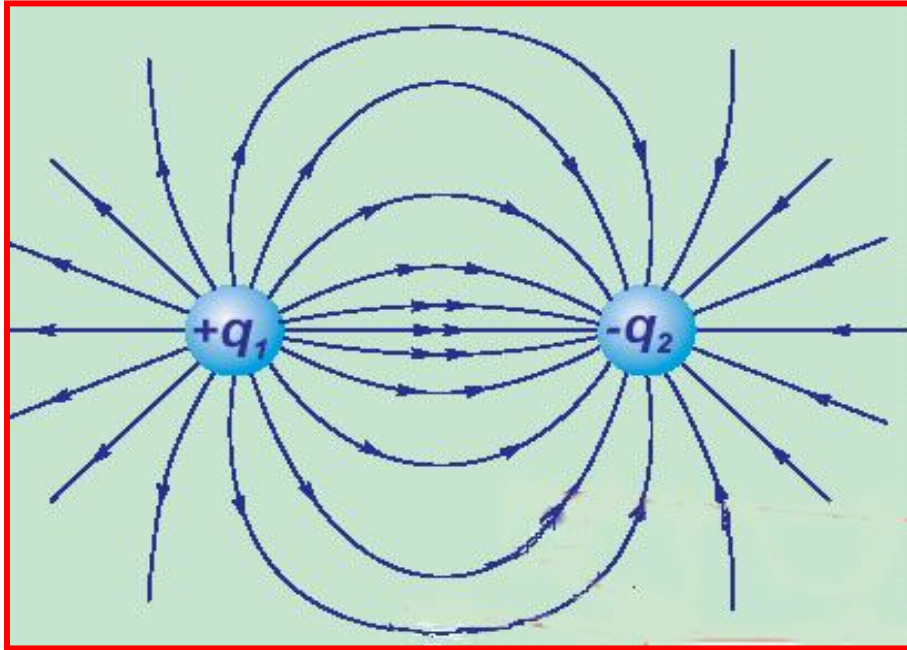


Jak można zobrazować pole wektorowe ?

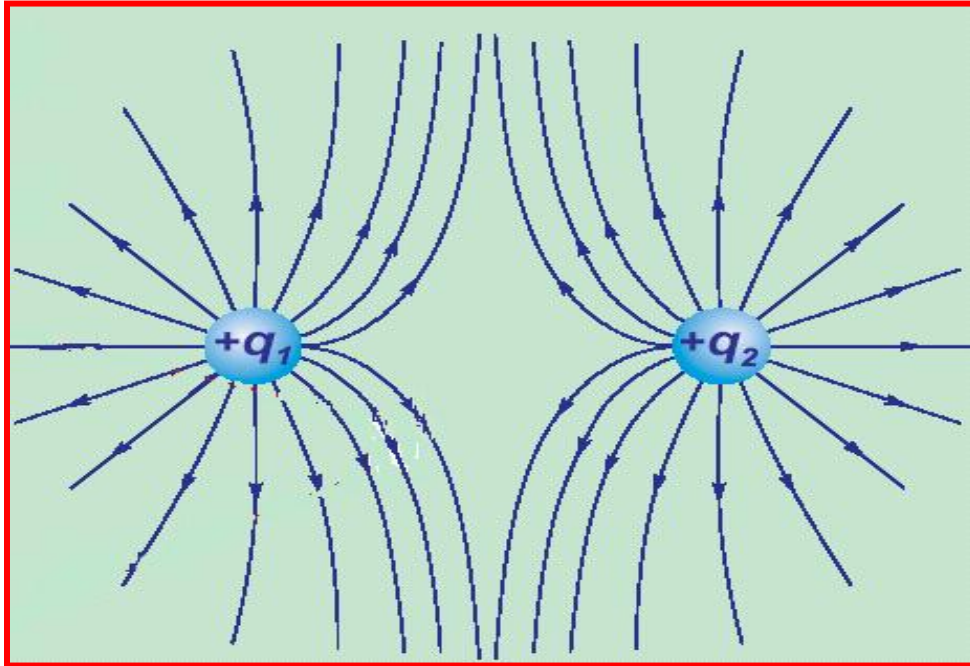
Jednym ze sposobów graficznego przedstawienia pola elektrycznego jest wyrysowanie **linii pola**. Są to linie o tej własności, że wektor natężenia pola elektrycznego jest styczny do linii pola w każdym jej punkcie. Im większa gęstość linii, tym większa wartość natężenia pola elektrycznego.



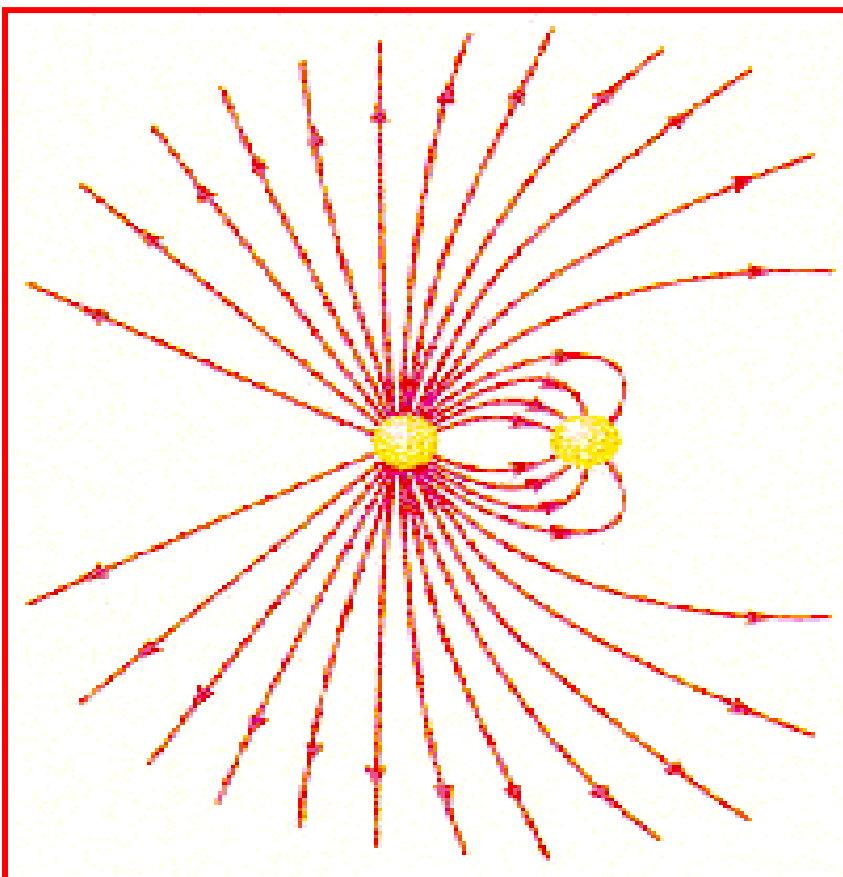
Linie pola
dla ładunków
pojedynczych.



Linie pola dla dwóch ładunków o przeciwnych znakach i tej samej wartości bezwzględnej. (Układ taki nazywamy dipolem elektrycznym.)



Linie pola dla dwóch takich samych ładunków dodatnich. Dla dwóch równych ujemnych ładunków zwrot wszystkich linii byłby przeciwny.



Linie pola dla dwóch ładunków przeciwnego znaku o nierównej wartości bezwzględnej. Lewy ładunek jest dodatni, bo linie pola z niego wychodzą !

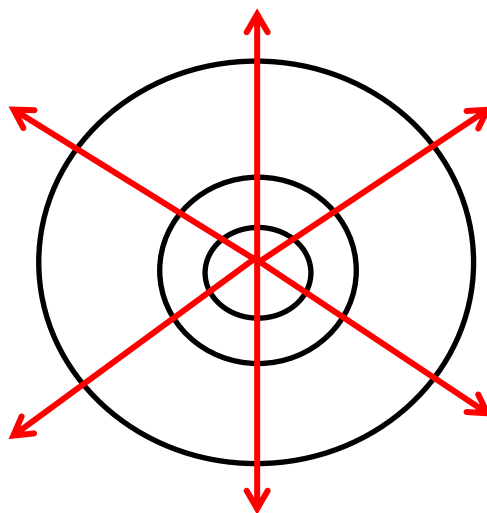
Oprócz linii pola elektrycznego wygodnie jest używać także linii lub powierzchni stałych wartości potencjału elektrycznego, czyli linii lub powierzchni ekwipotencjalnych, gdzie spełnione jest równanie:

$$V(x,y,z) = \text{const}$$

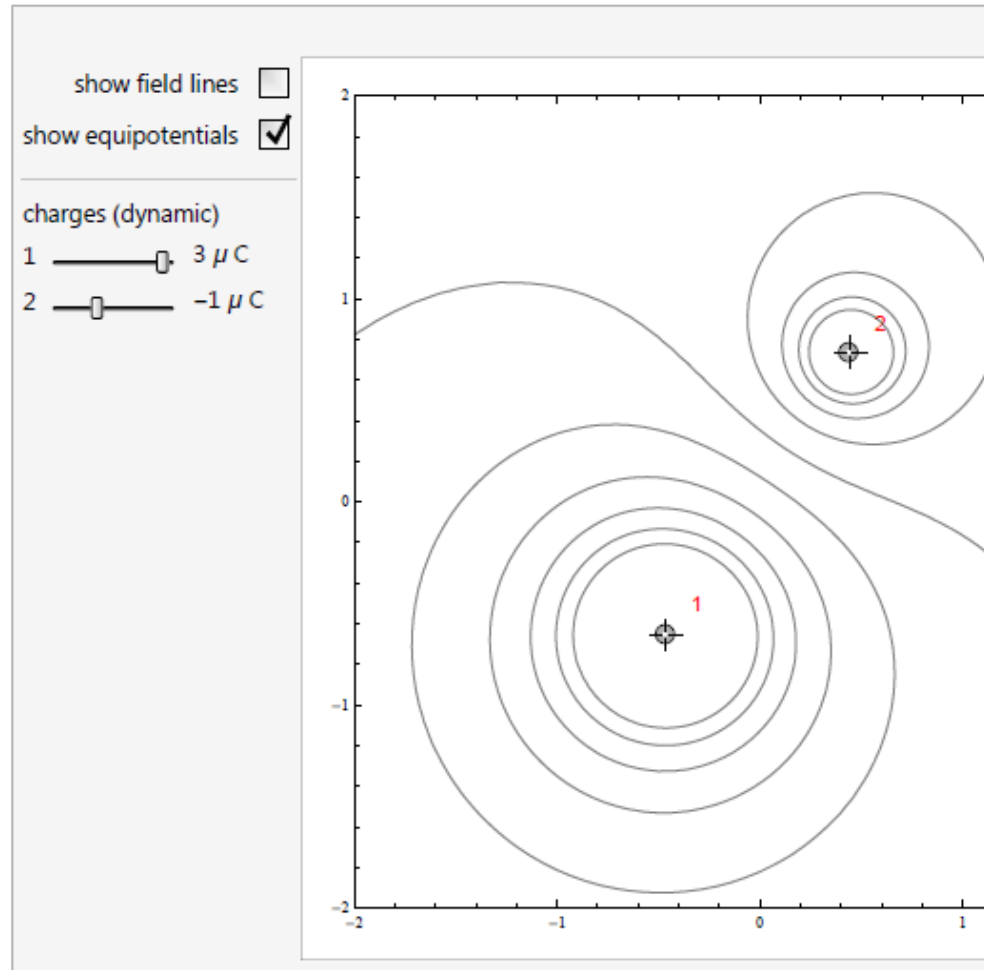
Ponieważ zachodzi

$$\vec{E} = -\text{grad } V,$$

więc linie pola elektrycznego są prostopadłe do linii lub powierzchni ekwipotencjalnych. (Podobna dyskusja była na wykładzie przy okazji sił zachowawczych.) Najprostszy przykład to linie pola i linie stałego potencjału dla pojedynczego ładunku punktowego:



Polecam notebook ze strony Wolfram Demonstrations Project:
[http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/
ElectricFieldLinesDueToACollectionOfPointCharges-author.nb](http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/ElectricFieldLinesDueToACollectionOfPointCharges-author.nb)

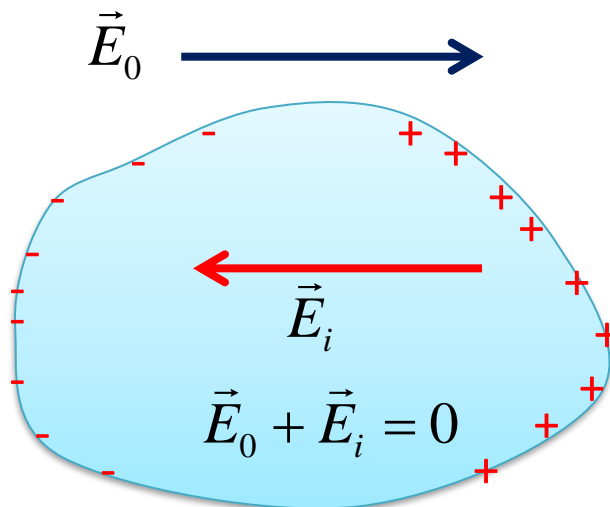


Teraz do próżni wprowadzimy **przewodniki**.

Idealny przewodnik to substancja, która ma nieskończony zapas swobodnych ładunków. (Wiele metali ma własności „prawie idealnych” przewodników.)

Taka prosta definicja prowadzi do wielu ciekawych wniosków:

1. Wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$. Interesuje nas sytuacja, która zapanuje, gdy skończy się przepływ swobodnych ładunków pod wpływem pola zewnętrznego. Ładunki swobodne ustawiają się w taki sposób, by w przewodniku pole zewnętrzne i pole przesuniętych ładunków swobodnych dawało znikające pole wypadkowe.



2. Gęstość ładunku wewnątrz przewodnika jest równa zero.

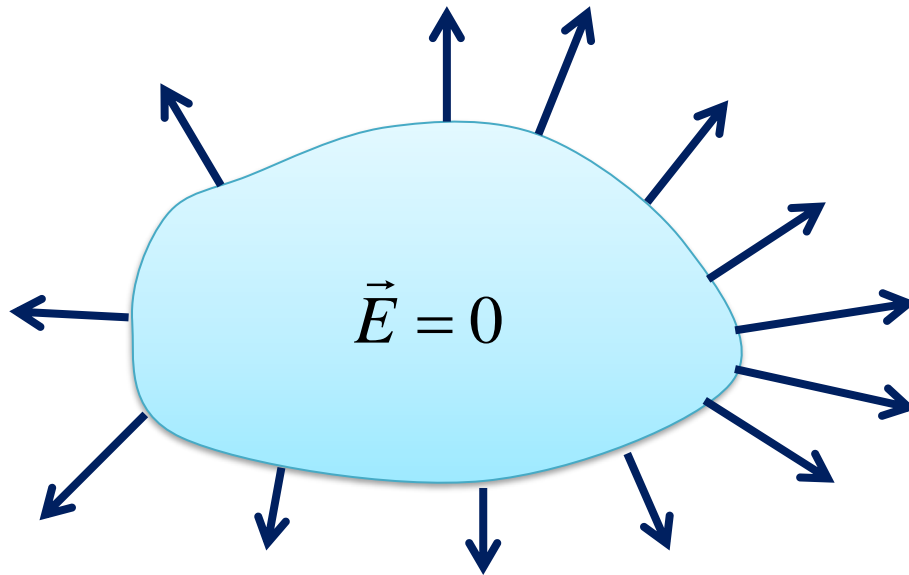
$$\vec{E} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k \rho = 0 \rightarrow \rho = 0$$

3. Nieskompensowany ładunek może znajdować się tylko na powierzchni przewodnika.

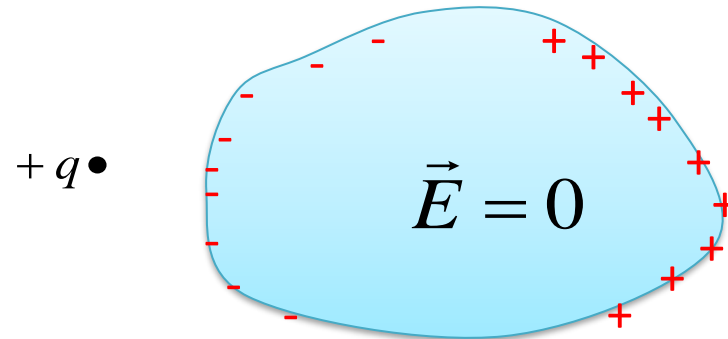
4. Potencjał w przewodniku jest stały

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

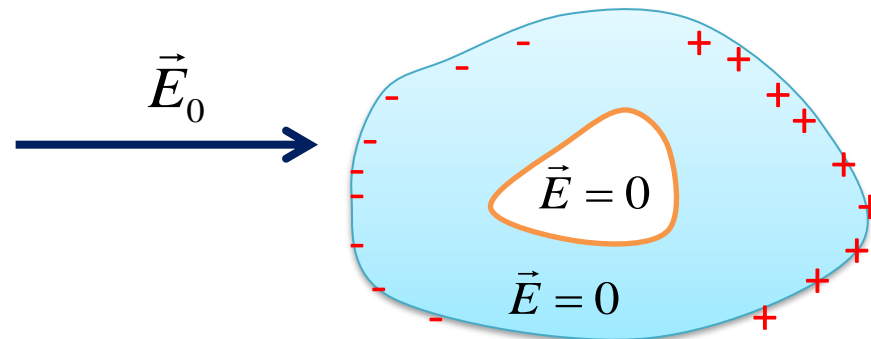
5. W pobliżu powierzchni przewodnika natężenie pola elektrycznego jest prostopadłe do powierzchni



6. Ładunek umieszczony na zewnątrz nienaładowanego przewodnika jest przyciągany przez przewodnik.

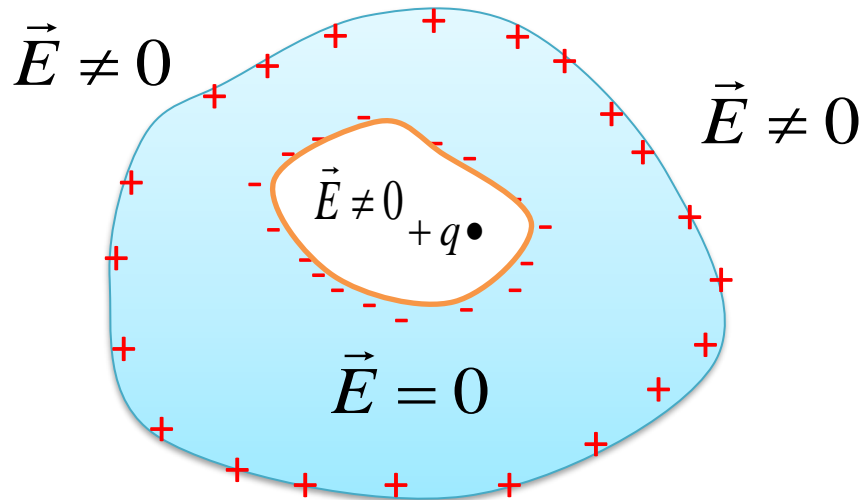


7. Co się dzieje, jeśli w „ciele” przewodnika znajduje się wnęka?



We wnęce bez ładunków nie ma pola, a na ściankach wnęki nie występuje ładunek powierzchniowy. (Ekranowanie !)

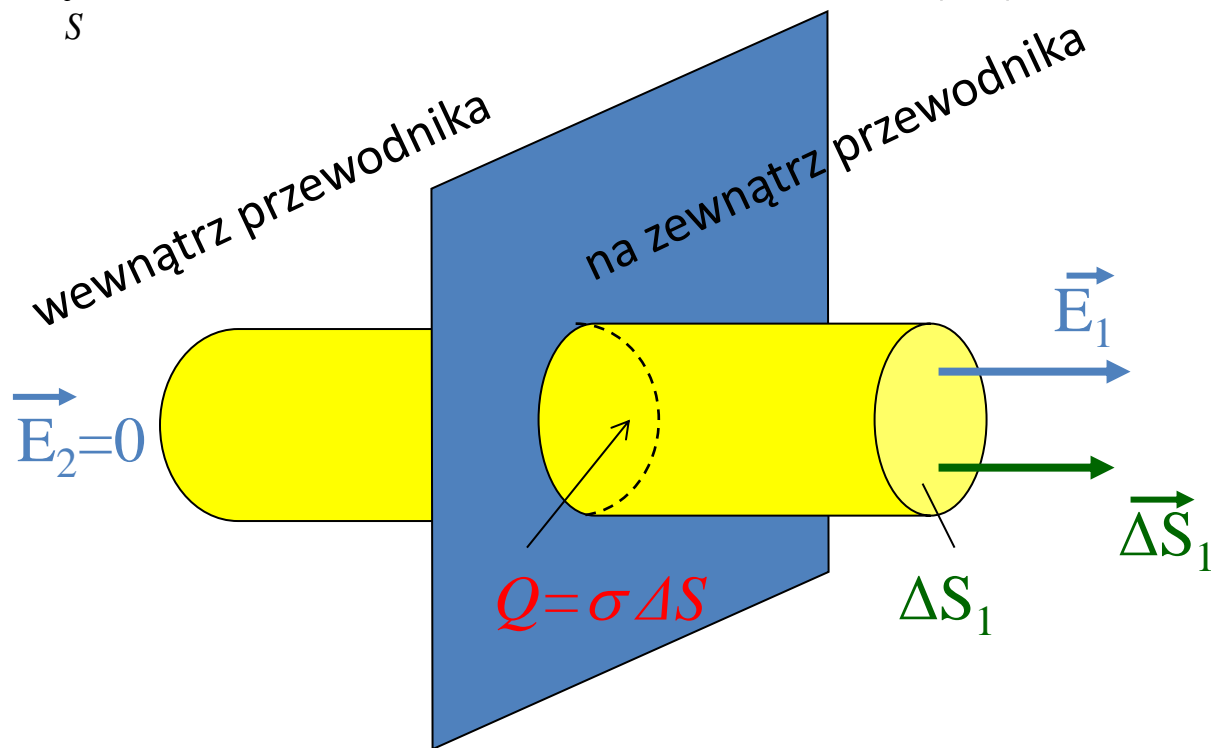
8. Jeśli we wnętrze w „ciele” przewodnika znajduje się ładunek elektryczny, to pole w dalszym ciągu nie występuje w samym przewodniku, ale będzie niezerowe we wnętrze, a także na zewnątrz przewodnika.



Ciekawostka: Jeśli wewnątrz nienaładowanego przewodnika w kształcie kuli będzie dowolna, nieregularna wnęka, a w tej wnęce ładunek, to pole na zewnątrz kuli będzie takie, jakby pochodziło od ładunku punktowego znajdującego się w środku kuli, niezależnie od kształtu wnęki i położenia ładunku we wnętrze !

9. Zastosujemy teraz prawo Gaussa do małego fragmentu powierzchni przewodnika z ładunkiem elektrycznym. Tuż przy powierzchni przewodnika na zewnątrz przewodnika natężenie pola elektrycznego jest prostopadłe do powierzchni przewodnika, a wewnątrz przewodnika $\vec{E} = 0$. Zamkniętą powierzchnię Gaussa stanowi teraz „lokalny” graniastosłup o podstawach prostopadłych do powierzchni przewodnika. Teraz σ może być różne w różnych punktach powierzchni.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Delta S E_1 = 4\pi k \sigma \Delta S \rightarrow E_1 \equiv |\vec{E}_1| = 4\pi k \sigma = (SI) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Pole elektryczne w pobliżu naładowanego przewodnika ma największe natężenie w miejscach o dużej gęstości ładunku !

10. Nie jest łatwo wyznaczyć gęstość ładunku na powierzchni przewodnika.
Wynik dla elipsoidy

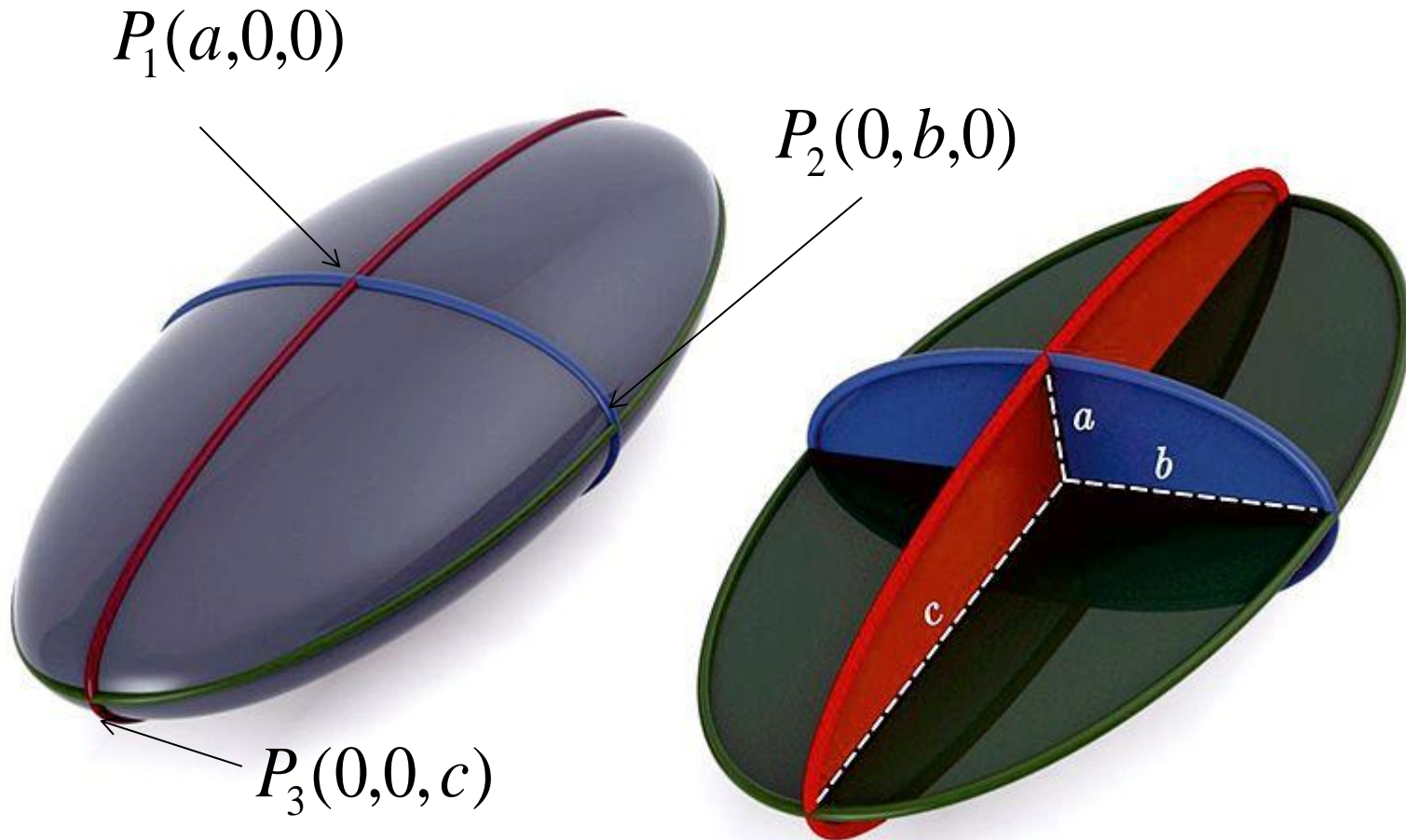
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

podano w książce: W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, Hemisphere, New York, 1989 [Griffiths]:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2},$$

gdzie Q jest całkowitym ładunkiem elipsoidy. W oparciu o ten wzór można pokazać, że najwięcej ładunku gromadzi się na „ostrzach” i w ich pobliżu natężenie pola elektrycznego jest największe.

$$a : b : c = 1 : 3 : 5 \rightarrow \sigma(P_1) : \sigma(P_2) : \sigma(P_3) = 1 : 3 : 5$$



W pobliżu tego punktu pole musi być najsilniejsze

obrazki elipsoidy z Wikipedii

Kondensator

Układ dwóch przewodników o przeciwnych ładunkach, $+Q$ i $-Q$.



Ponieważ potencjał elektryczny jest stały dla każdego z przewodników, można jednoznacznie określić różnicę potencjałów między nimi:

$$U \equiv \Delta V \equiv V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

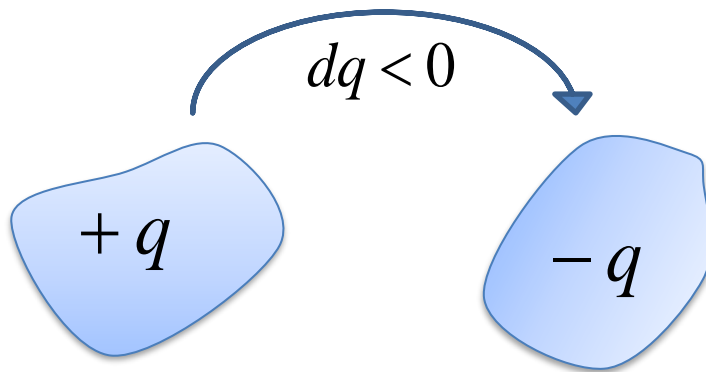
Czynnik proporcjonalności: $C \equiv \frac{Q}{U}$,

nazywamy pojemnością układu. Jednostką pojemności jest farad: $F = \frac{C}{V}$,
czyli kulomb przez volt. Pojemność zależy od geometrii układu. Mówimy o kondensatorach płaskich, sferycznych, cylindrycznych, ...

Naładowany kondensator jest magazynem energii elektrostatycznej

Jaką pracę należy wykonać, by naładować kondensator ?

Jest to praca związana z przeniesieniem ładunku, powiedzmy ujemnego z okładki dodatniej na okładkę ujemną. Trzeba pokonywać odpychanie ze strony już częściowo naładowanej okładki ujemnej !



$$dW = U(q) dq = \frac{q}{C} dq \rightarrow W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

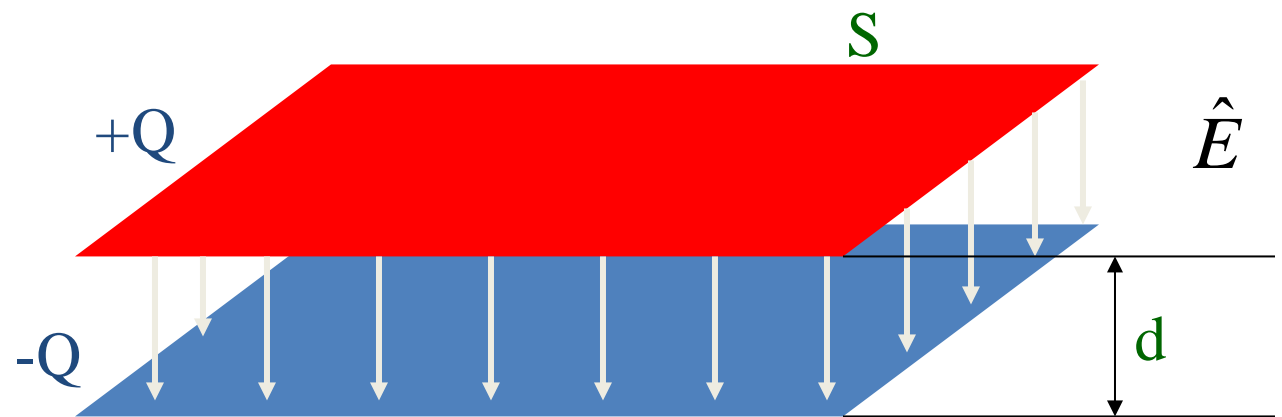
↑
różnica potencjałów przy
częściowym naładowaniu
kondensatora do ładunku q

Kondensator płaski to układ dwóch płaskich i równoległych do siebie przewodników (tzw. okładek) o tej samej powierzchni S , oddległych o d . Na przewodnikach znajduje się ładunek całkowity $\pm Q$, rozłożony równomiernie. Zaniedbując efekty brzegowe, liczymy pole między okładkami tak, jakby pochodziło od nieskończonych płaszczyzn, wykorzystując prawo Gaussa. Musimy teraz pamiętać, że natężenie pola elektrycznego jest sumą natężenia od okładki dodatniej i okładki ujemnej ! W obszarze poza okładkami te pola się znoszą, zaś w obszarze między okładkami natężenie pola elektrycznego jest w każdym punkcie takim samym wektorem o długości

Gęstość powierzchniowa ładunku wynosi:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$E = 4\pi k \sigma = (SI) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S \epsilon_0}$$

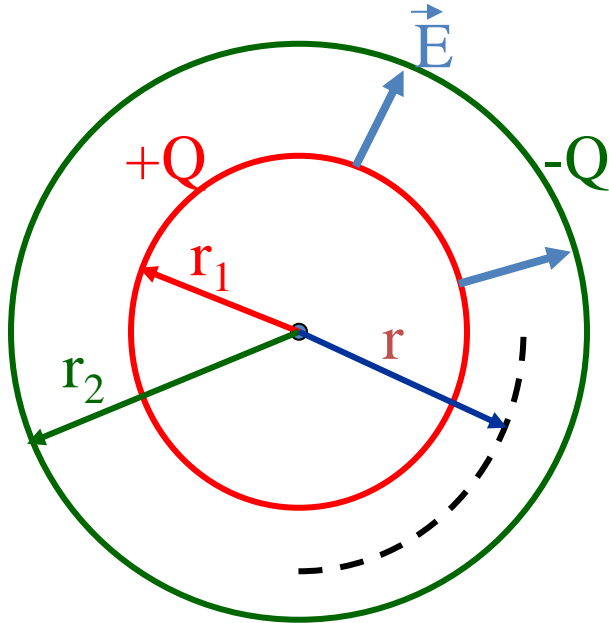


Różnica potencjałów między okładkami wynosi:

$$U \equiv \Delta V \equiv V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E d = \frac{Q d}{S \varepsilon_0} \equiv \frac{Q}{C}$$

$$\rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

Teraz rozważymy układ dwóch współśrodkowych przewodzących sfer naładowanych odpowiednio ładunkami $+Q$ i $-Q$, czyli **kondensator kulisty**



Pole elektryczne w obszarze

$$r_1 < r < r_2$$

jest takie, jakby pochodziło od punkтового ładunku znajdującego się we wspólnym środku obu sfer.

$$E = k \frac{Q}{r^2} = (SI) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Różnicę potencjałów między okładkami policzymy, wybierając trajektorię wzdłuż promienia.

$$U \equiv \Delta V \equiv V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \equiv \frac{Q}{C}$$

$$\rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Niekiedy rozważana jest **pojemność pojedynczego przewodnika**. Oznacza to wtedy, że drugi przewodnik, z ujemnym ładunkiem, jest wyimaginowaną sferą o nieskończonym promieniu, otaczającą dany przewodnik. Taka sfera nie daje wkładu do pola elektrycznego.

W przypadku przewodnika o kształcie kuli mielibyśmy

$$C_{kula} = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 4\pi\epsilon_0 r_1$$

Traktując Ziemię jak przewodzącą kulę o promieniu $r_1 = 6400$ km, dostalibyśmy

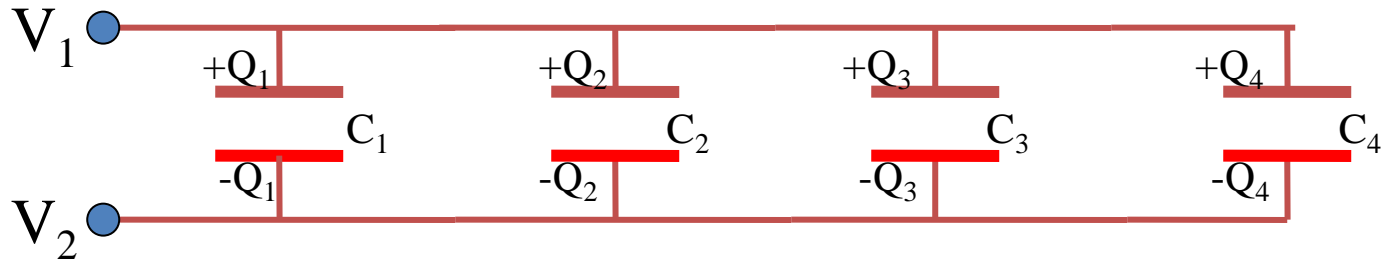
$$C_{Ziemi} = 712 \times 10^{-6} F \equiv 712 \mu F$$

To powinno nam uzmysłwić, jak olbrzymią pojemnością jest jeden farad ! Przewodząca kula o pojemności jednego farada miałaby promień

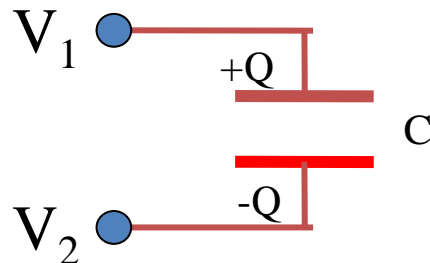
$$r = 9 \times 10^9 m$$

Łączenie kondensatorów

Połączenie równoległe



Jakim pojedynczym kondensatorem można zastąpić układ pokazany na rysunku? Pojemność takiego zastępczego kondensatora nazywamy pojemnością zastępczą.



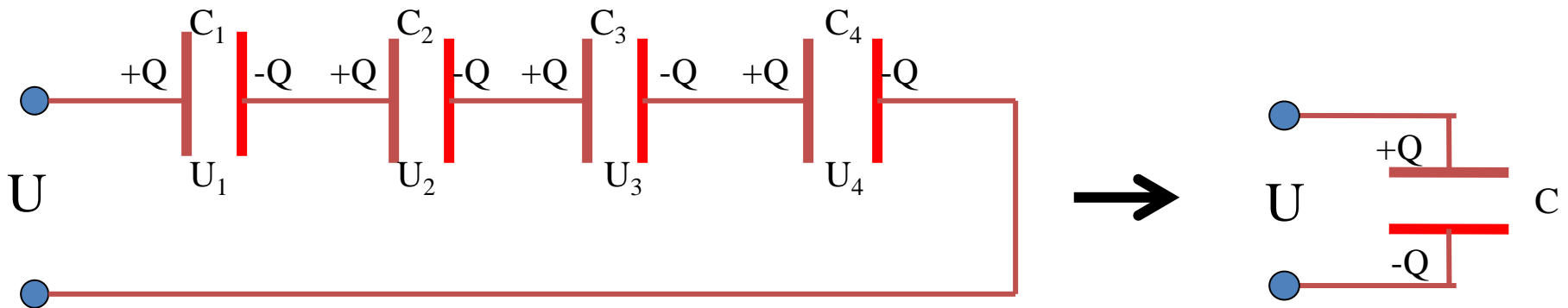
Różnica potencjału $U = V_1 - V_2$ jest taka sama na każdym kondensatorze.

Zastępczy kondensator też musi być podłączony do tej samej różnicy potencjałów. Całkowity ładunek na jego okładce musi być sumą ładunków na poszczególnych kondensatorach:

$$Q \equiv UC = \sum_{i=1}^N UC_i = U \sum_{i=1}^N C_i$$
$$\rightarrow C = \sum_{i=1}^N C_i$$

Oznacza to, że przy równoległym łączeniu kondensatorów pojemność zastępcza jest sumą pojemności poszczególnych kondensatorów !

Połączenie szeregowe



Ładunki na okładkach kondensatorów połączonych szeregowo są jednakowe. Ładunek Q musi być też ładunkiem na okładce zastępczego kondensatora. Całkowita różnica potencjałów jest równa sumie różnic potencjałów między okładkami poszczególnych kondensatorów.

$$U \equiv \frac{Q}{C} = \sum_{i=1}^N U_i = \sum_{i=1}^N \frac{Q}{C_i} = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

$$\rightarrow \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Odwrotność pojemności zastępczej jest równa sumie odwrotności poszczególnych pojemności.

Wracamy do równań Poissona i Laplace'a

bardzo
często
stosowany
zapis
operatora
Laplace'a

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 V = -4\pi k\rho = (SI) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \begin{array}{l} \text{równanie} \\ \text{Poissona} \end{array}$$

W obszarze bez gęstości ładunku równanie Poissona przechodzi w równanie Laplace'a:

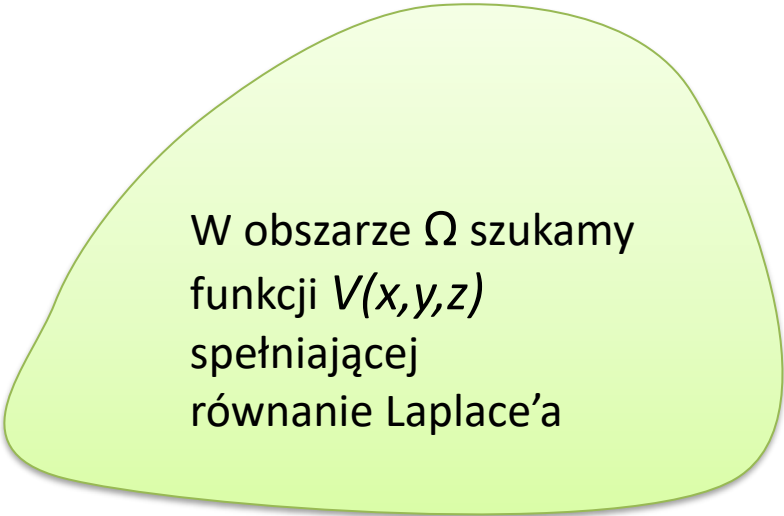
$$\nabla^2 V = 0$$

Po co nam te równania, skoro natężenie pola elektrycznego lub potencjał elektryczny możemy liczyć z zasady superpozycji, znając rozkład ładunku ?

Odpowiedź: Bo musimy sobie radzić z przewodnikami. W zagadnieniach związanych z przewodnikami rozkład gęstości ładunku często nie jest znany z góry ! Przewodniki są obszarami stałego potencjału, więc wygodniej jest używać równań cząstkowych z określonymi warunkami brzegowymi.


Z braku czasu podam tylko jeden prosty przypadek tzw. twierdzenia o jednoznaczności i analityczne rozwiązanie równania Laplace'a w dwóch wymiarach.

Równania Poissona i Laplace'a są rozwiązywane przy użyciu bardzo wyrafinowanych narzędzi matematycznych (np. z użyciem własności funkcji zmiennej zespolonej, szeregów Fouriera, funkcji specjalnych) i różnorodnych metod numerycznych (poczynając od prostych iteracji, poprzez skomplikowane metody relaksacyjne itd.)



W obszarze Ω szukamy
funkcji $V(x,y,z)$
spełniającej
równanie Laplace'a

Funkcja $V(x,y,z)$ została
zadana na powierzchni S



Twierdzenie:

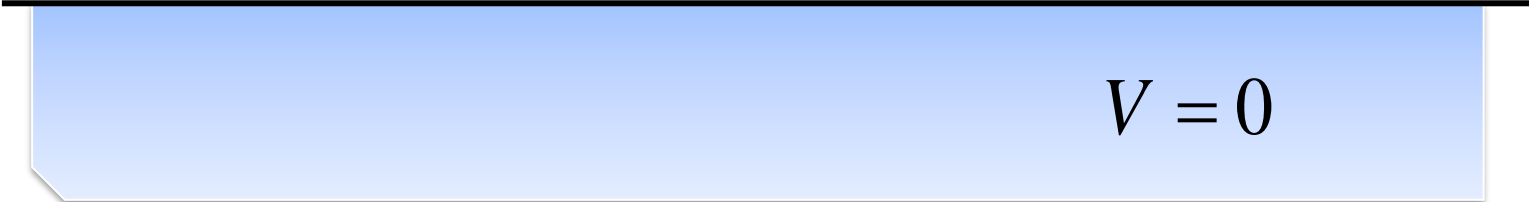
Rozwiązanie równania Laplace'a
w pewnym obszarze Ω jest
określone jednoznacznie, jeśli
podana jest wartość funkcji V na
powierzchni S będącej brzegiem
obszaru Ω .

Zacniemy od przykładu (podstawowego) dla metody obrazów

ładunek w pobliżu nieskończonego płaskiego przewodzącego obszaru o potencjale $V=0$.

$+ Q \bullet$

$V = ?$



$V = 0$

Aby znaleźć natężenie pola elektrycznego ponad płaszczyzną, zauważamy, że warunek zerowania się potencjału na płaskiej powierzchni uziemionego przewodnika można uzyskać przez wprowadzenie ładunku $-Q$, położonego symetrycznie względem powierzchni przewodnika, czyli jakby obrazu zwierciadlanego dla ładunku $+Q$.

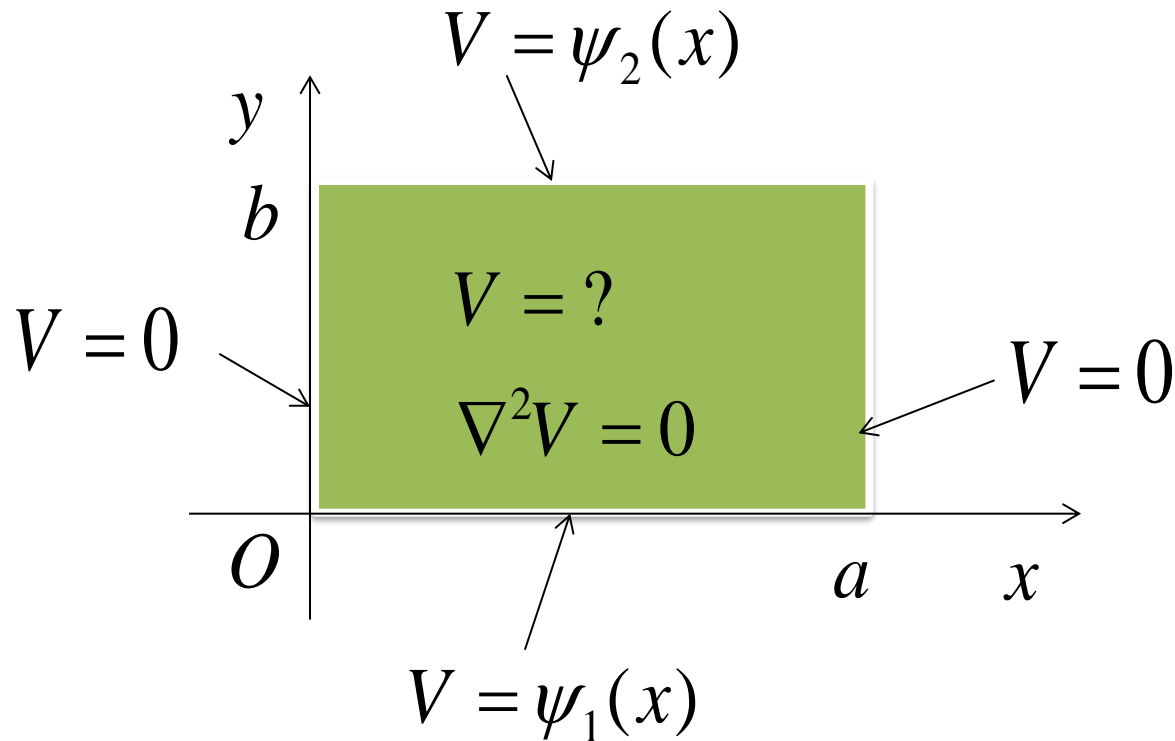
Teraz sytuacja wygląda dużo prościej, bo można liczyć natężenie pola elektrycznego dodając natężenia pochodzące od dwóch ładunków. Oczywiście można też sumować potencjały pochodzące od dwóch ładunków.

$+Q \cdot$

----- $V = 0$

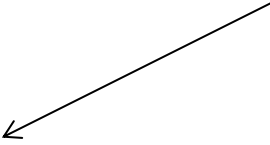
$-Q \cdot$

Przykład analityczny podamy dla obszaru Ω w postaci prostokąta. Warunki brzegowe są następujące: na bokach równoległych do osi y potencjał wynosi zero. Na dolnym boku ($y=0$) opisany jest funkcją $\psi_1(x)$, a na górnym ($y=b$) funkcją $\psi_2(x)$.



Szereg
Fouriera !

w praktyce
suma do n_{max}


$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \sinh \left(\frac{n\pi(b-y)}{a} \right) + B_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \right],$$

$$A_n = \frac{2}{a \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} \int_0^a \psi_1(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} \int_0^a \psi_2(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx$$

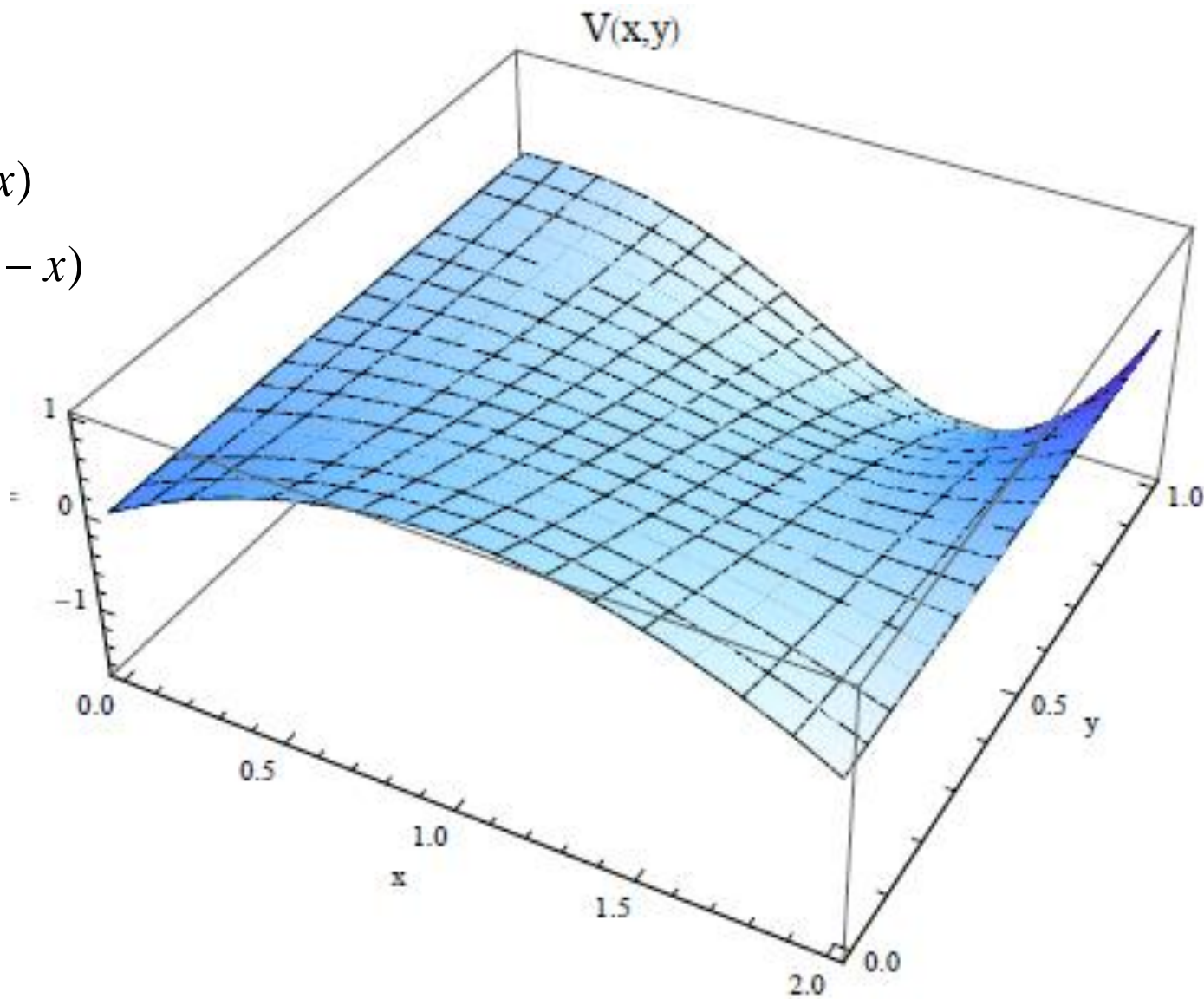
Wartości liczbowe

$$a = 2$$

$$b = 1$$

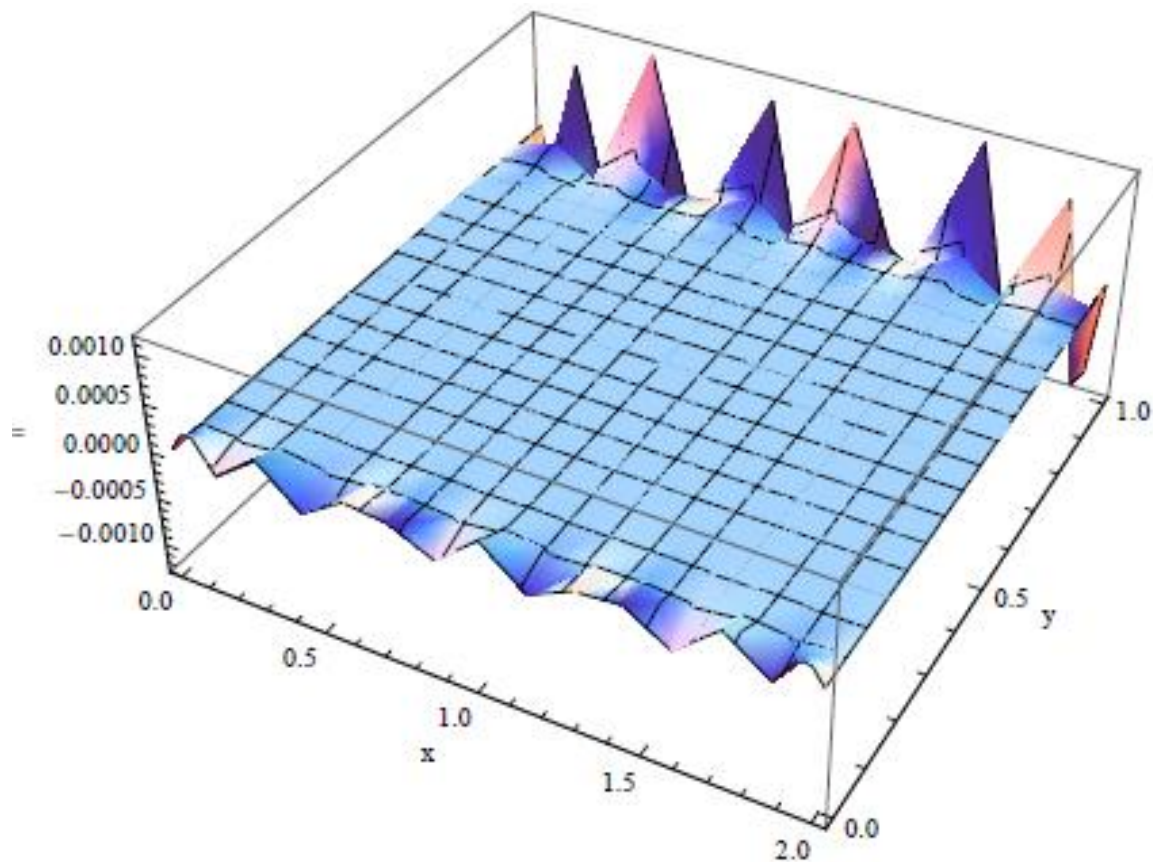
$$\psi_1(x) = x(a - x)$$

$$\psi_2(x) = -x^3(a - x)$$



Sprawdzenie zbieżności :

Wartość bezwzględna różnicy wyników dla $n_{max}=16$ i $n_{max}=17$



Polecam notebooki:

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/laplace_prostokat_wersja_ostateczna.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/laplace_prostokat_metoda_Jacobiego.nb

Najprostszy schemat numeryczny

Zaczynamy od aproksymacji pochodnych funkcji jednej zmiennej na siatce o stałym kroku

$$x_i = i \Delta x$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \equiv \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \equiv \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

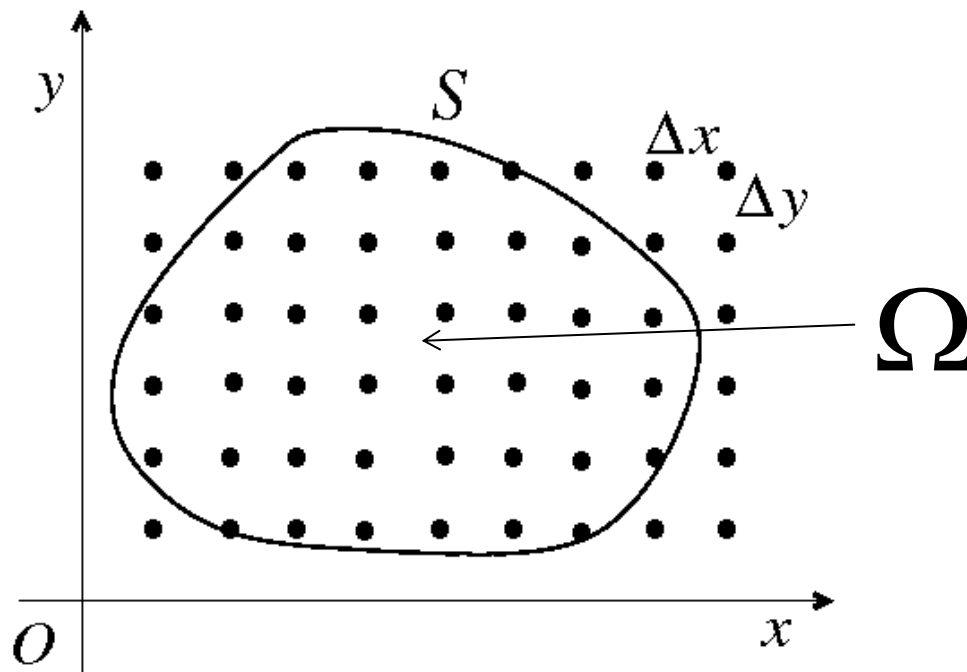
$$f'(x) \approx \frac{f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

Ten ostatni wzór jest poza siatką, ale może służyć jako punkt wyjścia dla drugiej pochodnej

Teraz przechodzimy do funkcji dwóch zmiennych i operatora Laplace'a
(w dwóch wymiarach, na płaszczyźnie)

$$V = V(x, y)$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



$$\Delta V(x_i, y_j) \approx \frac{V(x_{i+1}, y_j) - 2V(x_i, y_j) + V(x_{i-1}, y_j)}{(\Delta x)^2} + \frac{V(x_i, y_{j+1}) - 2V(x_i, y_j) + V(x_i, y_{j-1})}{(\Delta y)^2}$$

$$\Delta y = \Delta x, \Delta V = 0$$

$$\rightarrow V(x_i, y_j) = \frac{1}{4} \left(V(x_{i-1}, y_j) + V(x_{i+1}, y_j) + V(x_i, y_{j-1}) + V(x_i, y_{j+1}) \right)$$

Wartość V w danym punkcie jest średnią arytmetyczną wartości w sąsiednich punktach siatki !

W ten sposób dostajemy prosty schemat iteracyjny.

Schemat iteracyjny w metodzie Jacobiego:

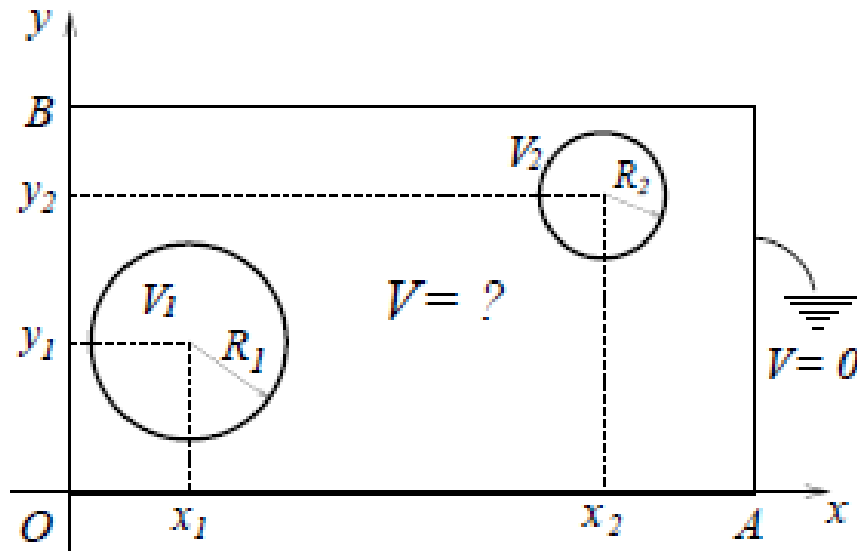
$$V_{nowy}(x_i, y_j) = \frac{1}{4} \left(V_{stary}(x_{i-1}, y_j) + V_{stary}(x_{i+1}, y_j) + V_{stary}(x_i, y_{j-1}) + V_{stary}(x_i, y_{j+1}) \right)$$

Iterujemy, dopóki funkcja V przestaje się zmieniać w sposób znaczący w zadanych punktach siatki. Uwaga: w kolejnych iteracjach wartości V w punktach na brzegu obszaru Ω , są zawsze zgodne z warunkami brzegowymi. Zmianie ulegają tylko wartości wewnątrz obszaru Ω , gdzie szukamy V .

Przykład:

Wyspy niezerowego potencjału w płaskim obszarze prostokątnym.

Na brzegach prostokąta potencjał wynosi zero.



$$A = 16, B = 8, x_1 = 4, y_1 = 4, R_1 = 3, x_2 = 12, y_2 = 4, R_2 = 1$$

$$V_1 = 100 \text{ i } V_2 = 50.$$

