

# Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak  
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 10

Na poprzednim wykładzie oprócz ładunków w próżni, rozważaliśmy przewodniki, czyli substancje o nieograniczonym zapasie swobodnych ładunków !

Najważniejsze elementy ostatniego wykładu to

- Twierdzenie Gaussa i dywergencja natężenia pola elektrycznego
- Rotacja natężenia pola elektrycznego
- Potencjał elektryczny
- Równania Poissona i Laplace'a
- Praca przy przesunięciu ładunku w polu elektrycznym
- Energia układu ładunków elektrycznych (różne wzory !)
- Linie pola elektrycznego oraz linie i powierzchnie ekwipotencjalne
- Sposoby rozwiązywania równania Laplace'a (notebook)

Dzisiaj wprowadzimy do pola elektrycznego inny rodzaj materii → izolatory (inaczej dielektryki)

Część rysunków zapożyczyłem z wykładu profesora Reinharda Kulesy.

Większość ciał, z jakimi mamy do czynienia można podzielić na **przewodniki** oraz **izolatory** (inaczej **dielektryki**).

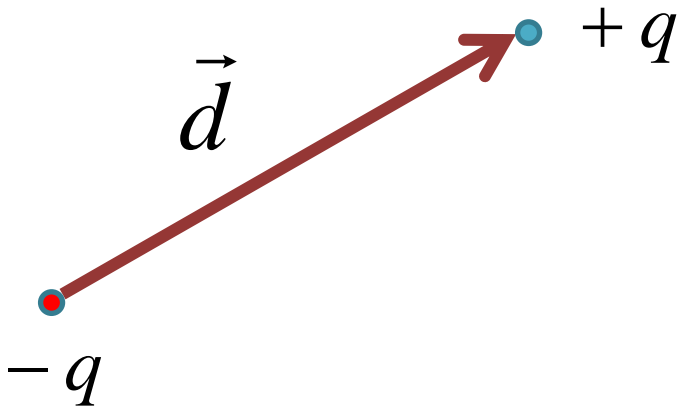
Pamiętamy, że (idealne) przewodniki są substancjami o nieograniczonym zapasie ładunków mogących swobodnie przemieszczać się po całej objętości przewodnika.

W dielektrykach wszystkie ładunki są związane z konkretnymi atomami lub cząsteczkami i mogą się tylko nieznacznie przemieszczać wewnątrz atomu lub cząsteczki.

Istnieją dwa podstawowe mechanizmy, dzięki którym pole elektryczne może zmieniać rozkład ładunku w atomie lub cząsteczce: rozciąganie i obracanie.

Aby mówić o polu elektrycznym w dielektrykach, należy znać definicję i podstawowe własności **dipola elektrycznego** !

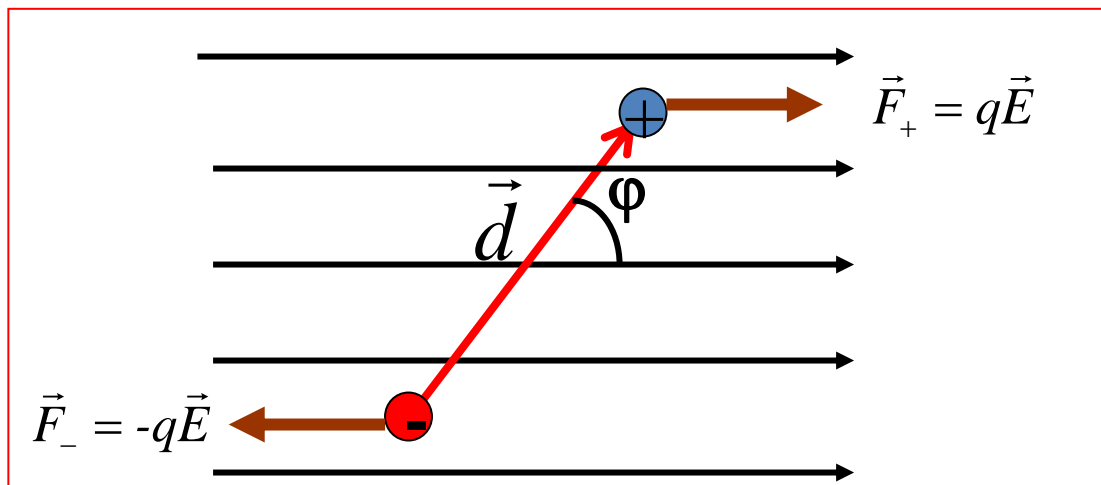
**Dipol elektryczny** to układ dwóch ładunków punktowych o przeciwnych znakach rozsuniętych na pewną odległość.



$$\vec{p} \equiv q \vec{d}$$

↑  
moment dipolowy

Jak zachowuje się dipol w jednorodnym polu elektrycznym ?



Siła wypadkowa jest równa zero, ale wypadkowy moment siły (możemy go liczyć względem dowolnego punktu, bo siła wypadkowa jest równa zero) jest różny od zera !

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}_+ = q(\vec{d} \times \vec{E}) = (q\vec{d}) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

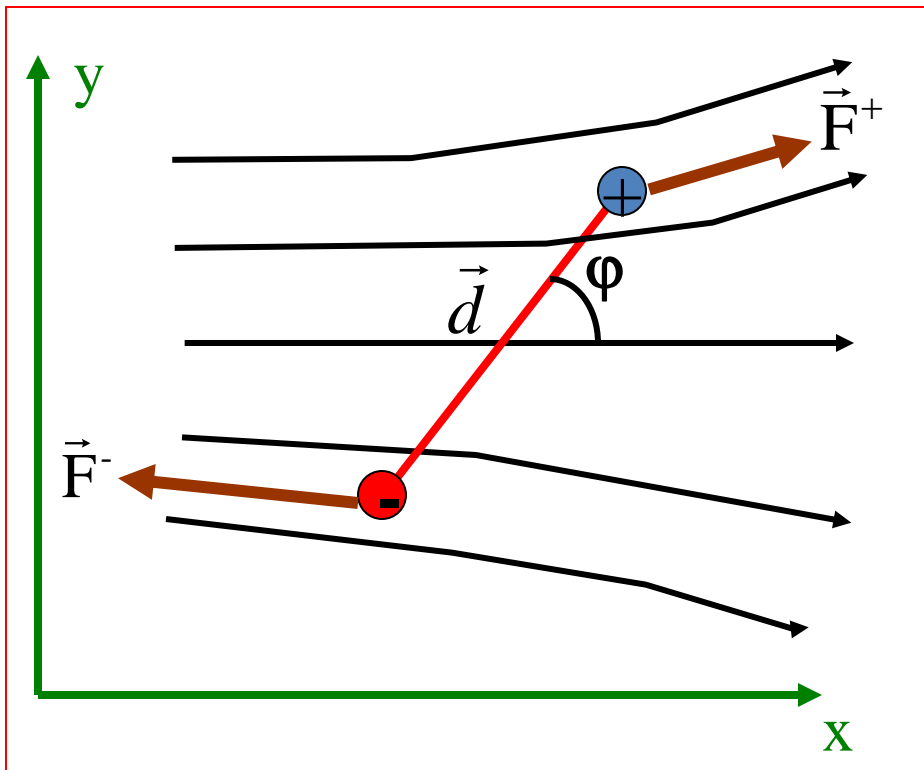
(Liczyłem względem punktu, w którym znajduje się ładunek ujemny.)

Dipol swobodny ustawia się równolegle do kierunku pola elektrycznego  $\vec{E}$ .  
Aby obrócić dipol, należy wykonać pracę !

Dipol w jednorodnym polu elektrycznym posiada energię potencjalną ,  
 $V=V(\varphi)$ , zależną od ustawienia jego momentu dipolowego względem  
natężenia pola elektrycznego:

$$V(\varphi) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

## Dipol w niejednorodnym polu elektrycznym



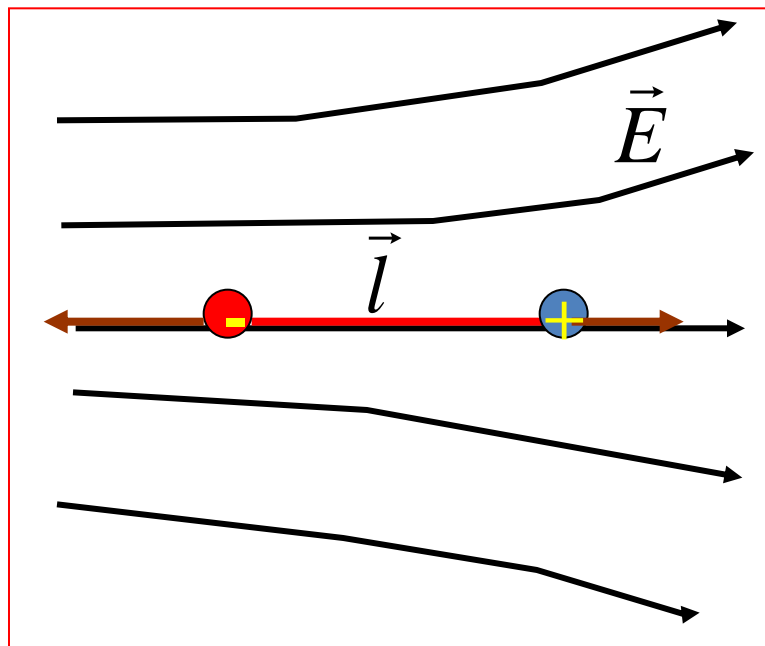
W tym przypadku nie tylko wypadkowy moment siły, ale także sama wypadkowa siła jest różna od zera !

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \neq 0$$

Dla małych rozmiarów dipola możemy zapisać wypadkową siłę w przy pomocy operatora nabla:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Dipol w niejednorodnym polu elektrycznym jest więc wciągany w obszar silniejszego pola. (w danym przypadku – w lewo !)



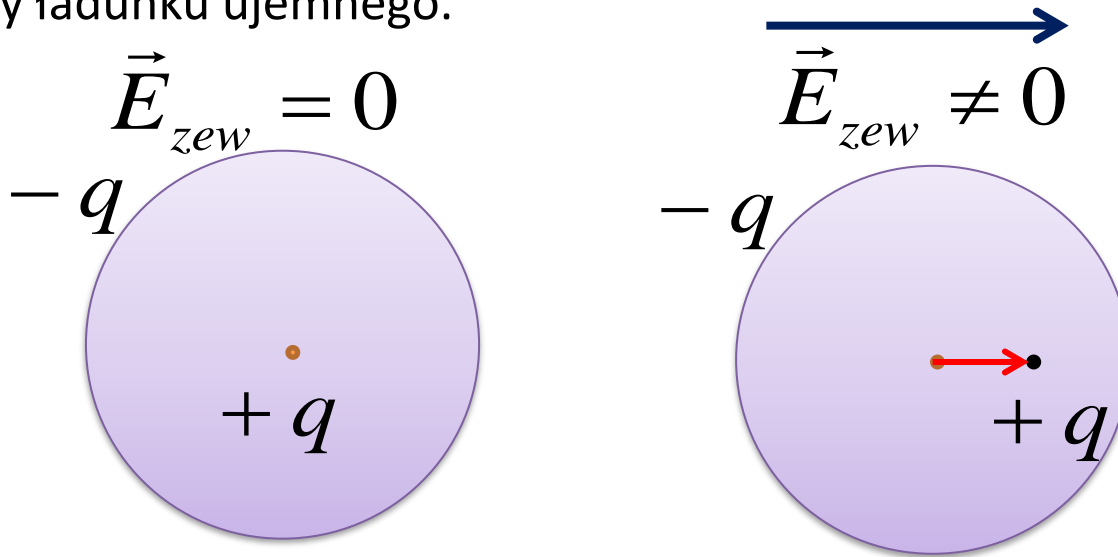
Dlaczego pojęcie dipola elektrycznego jest tak ważne w kontekście dielektryków ?



Przyjmijmy prosty model atomu: dodatni ładunek punktowy w środku jednorodnego sferycznego obłoku ładunku ujemnego o stałej gęstości objętościowej i promieniu  $a$ .

Co się stanie, jeśli taki układ umieścimy w polu elektrycznym ?

Nastąpi przesunięcie dodatniego ładunku punktowego  $+q$  względem chmury ujemnego ładunku, przy czym zakładamy, że nie nastąpi zmiana kształtu samej chmury ładunku ujemnego.



Warunek równowagi: siła działająca na  $+q$  ze strony  $\vec{E}_{zew}$  jest równa sile działającej na  $+q$  ze strony chmury ładunku ujemnego.

$$E_{zew} = E_{chmury}$$

$$E_{zew} = k \frac{q}{a^3} d \quad \leftarrow$$

Wiemy z prawa Gaussa, jakie jest pole elektryczne wewnątrz jednorodnej kulistej „chmury” ładunku

$$\rightarrow p \equiv qd = \frac{a^3}{k} E_{zew} = (SI) = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{zew}$$

Przy przyłożeniu zewnętrznego pola elektrycznego powstaje moment dipolowy. Stałą proporcjonalności w równaniu  $p = \alpha E_{zew}$  nazywamy polaryzowalnością atomową.

W tym prostym modelu 
$$\alpha = \frac{a^3}{k} = (SI) = 4\pi\epsilon_0 a^3$$

Dla rzeczywistych atomów podaje się zwykle wartości iloczynu  $\alpha k$ . Zmieniają się one od ułamka (He, Ne, H), poprzez kilka (Ar, C, Be) do kilkudziesięciu (Na, Li, K, Cs)  $\times 10^{(-30)} \text{ m}^3$ .

Dla wielu cząsteczek (np. dla CO<sub>2</sub>) **prosta proporcjonalność** między wektorami momentu dipolowego oraz natężeniem zewnętrznego pola elektrycznego,

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{zew},$$

**nie jest spełniona.**

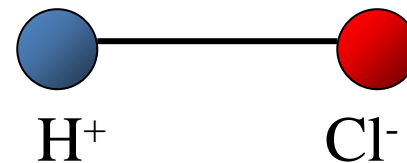
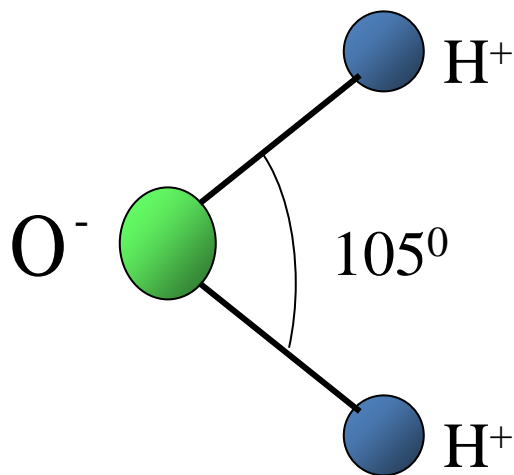
W ogólnym przypadku  $\alpha$  może być macierzą, a wektory  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{E}_{zew}$  **nie muszą być równoległe !**

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{zew,x} \\ E_{zew,y} \\ E_{zew,z} \end{pmatrix}$$

$\alpha_{ij}$  to współrzędne  
symetrycznego tensora  
polaryzowalności cząsteczki

Pewne cząsteczki (np.  $\text{H}_2\text{O}$ ) mają własny (niezależny od pola zewnętrznego) moment dipolowy. Cząsteczki takie nazywamy **polarnymi**.

Cząsteczka wody ma wyjątkowo duży moment dipolowy:  $p = 6.1 \times 10^{-30} \text{ Cm}$



Dalsze przykłady substancji, których cząsteczki posiadają trwały moment dipolowy to:  $\text{CO}$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{HCl}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ .

Pod wpływem pola elektrycznego momenty dipolowe cząsteczek ustawiają się zgodnie z kierunkiem pola.

Zarówno w przypadku, gdy zewnętrzne pole elektryczne wytwarza (inaczej indukuje) dipole elektryczne w atomach lub cząsteczkach dielektryka, jak i w przypadku, gdy już istniejące momenty dipolowe są ustawiane zgodnie z polem, efekt jest ten sam:

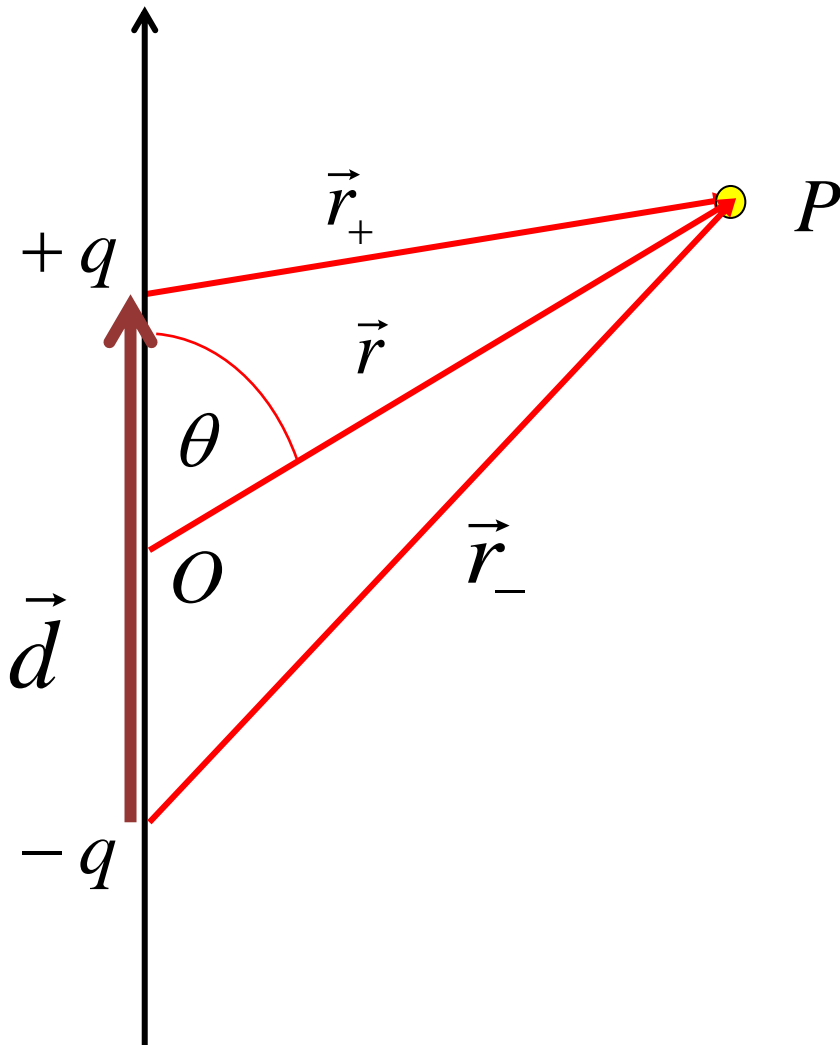
**W materiale** pojawia się **wiele małych dipoli**, skierowanych zgodnie z kierunkiem pola elektrycznego, czyli materiał staje się **spolaryzowany** !

Mały (ale makroskopowy) fragment dielektryka może posiadać moment dipolowy. Polaryzacją elektryczną (wektor oznaczany literą  **$P$** ) nazywamy moment dipolowy na jednostkę objętości.

*„Zasada działania dielektryka:”*

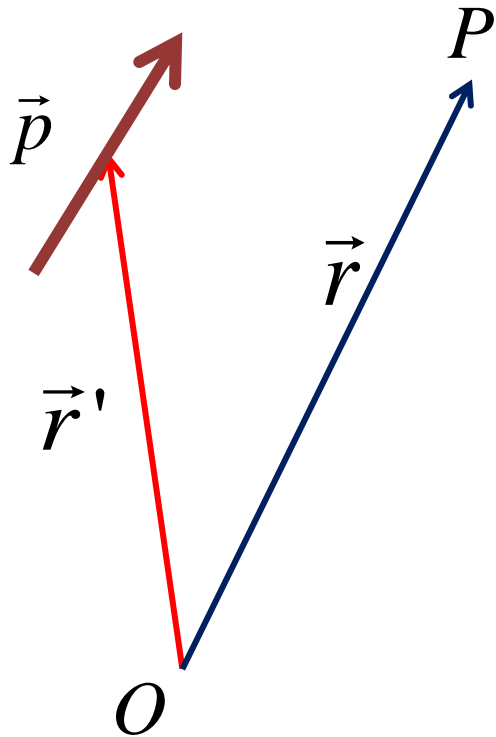
Dielektryk w polu elektrycznym staje się zbiorem dipoli elektrycznych. Ale każdy dipol elektryczny wytwarza z kolei własne pole elektryczne. To wypadkowe pole elektryczne dipoli dielektryka zmienia wyjściowe pole elektryczne i musi być uwzględnione przy określeniu końcowego pola elektrycznego w dielektryku !

Najpierw policzmy potencjał elektryczny pochodzącego od pojedynczego dipola elektrycznego:



$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= k \frac{q}{r_+} - k \frac{q}{r_-} = \\ &= kq \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \\ &\approx k \frac{qd \cos \theta}{r^2} \\ &= k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Jeśli środek dipola nie znajduje się w początku układu współrzędnych, to poprzedni wynik trzeba uogólnić.



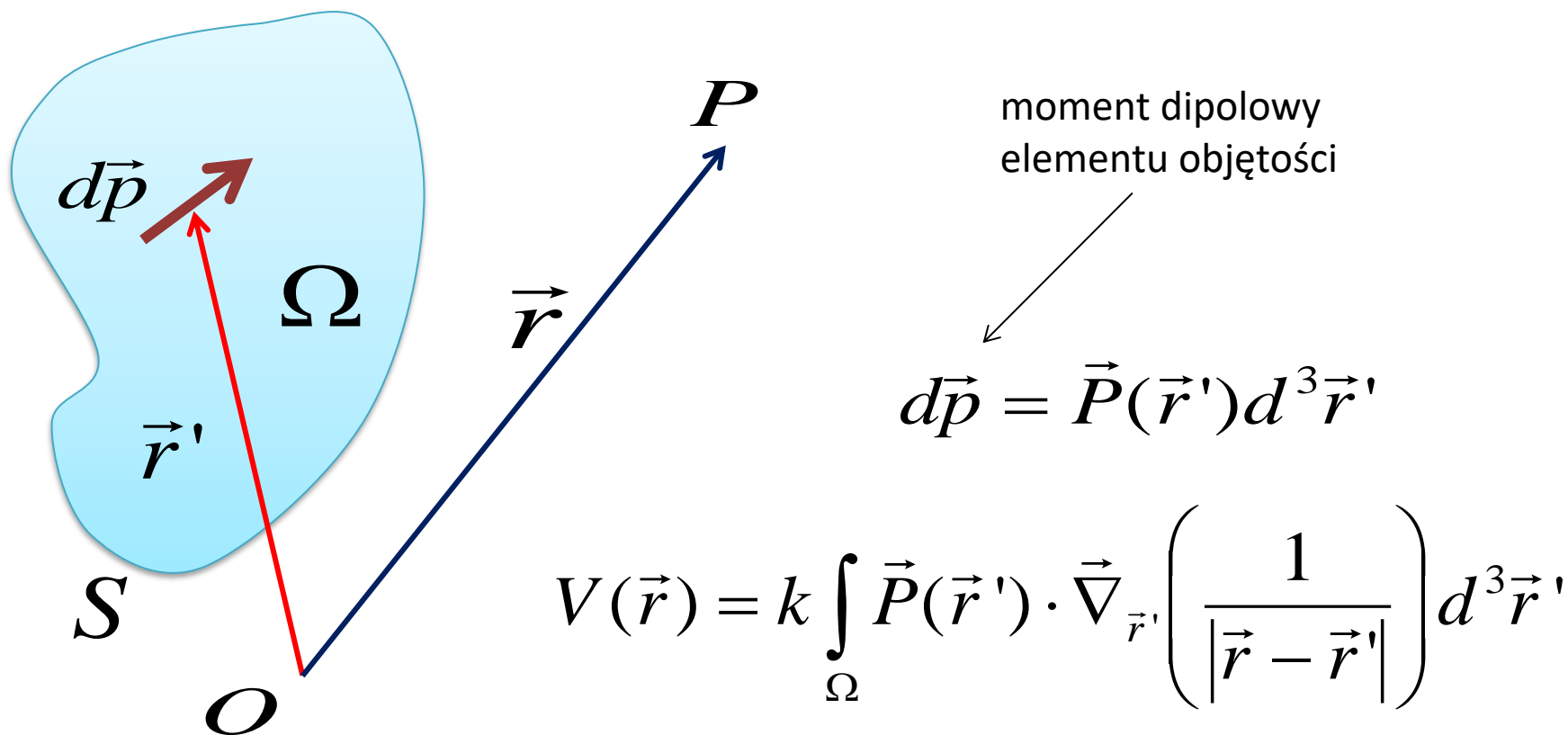
$$V(\vec{r}) = k \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$= k \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$



iloczyn skalarny momentu dipolowego i gradientu pewnej funkcji. Uwaga: w tym gradiencie pochodne są liczone po zmiennych primowanych !

Teraz, wykorzystując wzór na potencjał elektryczny pochodzący od pojedynczego dipola elektrycznego oraz definicję polaryzacji elektrycznej możemy policzyć potencjał elektryczny od kawałka spolaryzowanego materiału, czyli „ciągłego rozkładu momentu dipolowego” (w ścisłej analogii do potencjału elektrycznego pochodzącego od ciągłego rozkładu ładunku elektrycznego:





Przepiszemy wzór do innej postaci, korzystając z trójwymiarowej wersji twierdzenia o pochodnej iloczynu

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= k \int_{\Omega} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3\vec{r}' \\
 &= k \int_{\Omega} \left( \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} (\vec{P}(\vec{r}')) \right) d^3\vec{r}' \\
 &= k \int_{\Omega} \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3\vec{r}' + k \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-1) \vec{\nabla}_{\vec{r}'} (\vec{P}(\vec{r}')) d^3\vec{r}'
 \end{aligned}$$

↑  
 To jest całka po objętości z dywergencji; korzystając z twierdzenia Gaussa można ją zamienić na całkę powierzchniową

↑  
 Ta całka ma postać wzoru na potencjał od objętościowego rozkładu ładunku

Dochodzimy do wniosku, że „kawałek” spolaryzowanej materii zachowuje się tak jak pewien rozkład ładunku powierzchniowego na brzegu obszaru  $\Omega$  oraz rozkład ładunku objętościowego wewnątrz obszaru  $\Omega$  !

$$\begin{aligned}
 V(\vec{r}) &= k \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' + k \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-1) \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot (\vec{P}(\vec{r}')) d^3\vec{r}' \\
 &= k \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \sigma_P(\vec{r}') dS' + k \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho_P(\vec{r}') d^3\vec{r}'
 \end{aligned}$$

$$\sigma_P(\vec{r}') \equiv \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}$$

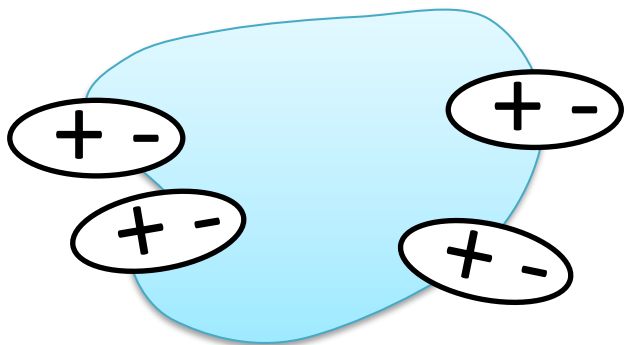
Ta wielkość pełni rolę gęstości powierzchniowej tzw. ładunku związanego

$$\rho_P(\vec{r}') \equiv (-1) \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot (\vec{P}(\vec{r}'))$$

$$= -\text{div} \vec{P}(\vec{r}')$$

Ta wielkość pełni rolę gęstości objętościowej tzw. ładunku związanego

Przy jednorodnym wektorze polaryzacji wewnątrz dielektryka może niekiedy zachodzić  $\rho_p = 0$ . Dipole na powierzchni zewnętrznej nie mają „partnerów”, by zniwelować „wystające” ładunki:



Jeśli mamy dielektryki w polu elektrycznym, to oprócz ładunków odosobnionych i ładunków na przewodnikach, **źródłami pola elektrycznego są także ładunki związane w dielektryku !**

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k (\rho + \rho_p)$$

$$= 4\pi k (\rho - \operatorname{div} \vec{P})$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \underbrace{\left( \frac{1}{4\pi k} \vec{E} + \vec{P} \right)}_{\vec{D}} = (SI) = \operatorname{div} \underbrace{\left( \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right)}_{\vec{D}} = \rho \equiv \rho_{\text{swobodnego}}$$

← wektor indukcji elektrycznej

Mamy więc prawo Gaussa dla wektora indukcji elektrycznej w postaci różniczkowej:  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ ,

a także w postaci całkowej

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{swobodny}} \leftarrow$$

całkowity ładunek  
**swobodny**  
wewnątrz  
zamkniętej  
powierzchni S

## Dielektryki liniowe

W dalszym ciągu wykładu będziemy zajmować się materiałami, dla których polaryzacja jest proporcjonalna do natężenia pola elektrycznego:

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi k} \chi_e \vec{E} = (SI) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

podatność elektryczna ośrodka (wielkość bezwymiarowa)

Uwagi:

- Podatność elektryczna nie musi być liczbą; dla kryształu to zwykle jest tensor przedstawiany w postaci macierzy
- $\vec{E}$  jest natężeniem całkowitego pola elektrycznego, pochodzącego od ładunków swobodnych i polaryzacji !

Dla dielektryków liniowych mamy więc:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi_e)}_{\varepsilon_r} \vec{E} \equiv \varepsilon \vec{E}$$

substancja	$\varepsilon_r$
próżnia	1
powietrze	1,00054
teflon	2,1
polietylen	2,25
polistyren	2,4–2,7
dwusiarczek węgla	2,6
lód	100
papier	3,5
krzemionka	3,7
beton	4,5
guma	7
diament	5,5–10
sól kuchenna	3–15
grafit	10–15
krzem	11,68

dane z Wikipedii

przenikalność  
elektryczna  
ośrodka

względna  
przenikalność  
elektryczna  
ośrodka  
(dawniej: stała  
dielektryczna)

substancja	$\epsilon_r$	
amoniak	26–22–20–17 (−80 ÷ −40 ÷ 0 ÷ 20 °C)	
alkohol metylowy	30	
gliceryna	41,2–47–42,5 (0–20–25 °C)	
woda	88–80,1–55,3–34,5 (0–20–100–200 °C)	
kwask fluorowodorowy	83,6 (0 °C)	
kwask siarkowy	84–100 (20–25 °C)	
KTaNBO <sub>3</sub>	34000 (0° C)	Griffiths, strona 208

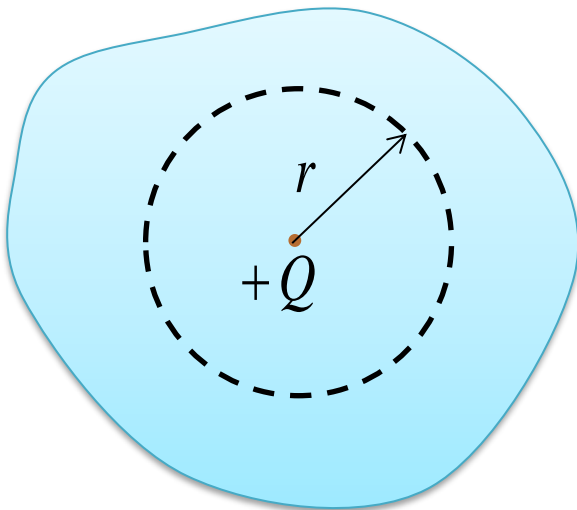
# Jak natężenie pola elektrycznego zależy od $\epsilon_r$ ?

Jeśli mamy problem o jasnej symetrii, to można i wystarczy skorzystać z prawa

Gausa :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{swobodny}$$

**Przykład nr 1:** pojedynczy ładunek w przestrzeni całkowicie wypełnionym dielektrykiem liniowym



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{swobodny}$$

$$\rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q_{swobodny}}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_r} \frac{Q_{swobodny}}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}(\vec{r})_{prozni}$$

Natężenie pola elektrycznego zmniejsza się  $\epsilon_r$  razy w stosunku do natężenia pola elektrycznego w próżni.

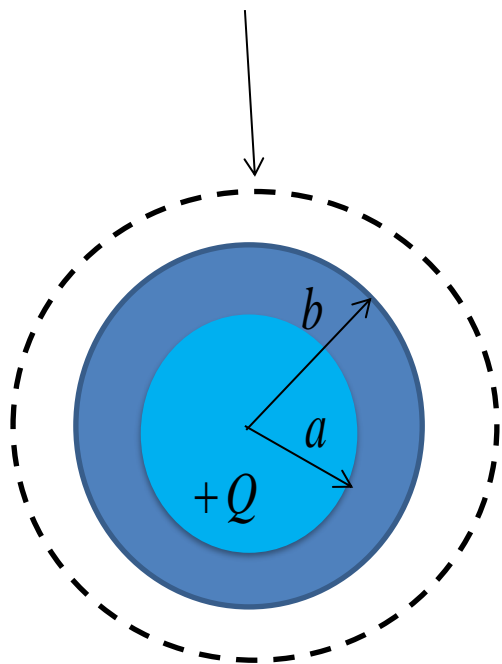


**Przykład nr 2:** Przewodząca kula o promieniu  $a$  i naładowana ładunkiem  $Q$  jest otoczona powłoką z dielektryka o grubości  $(b-a)$  o względnej przenikalności ośrodka  $\epsilon_r$ . Wystarczą dwa wzory:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{swobodny}}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$$

Powierzchnie Gaussa są sferami



$$r < a \rightarrow \vec{D} = \vec{E} = 0$$

$$a < r < b \rightarrow \begin{cases} \vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \hat{r} \end{cases}$$

$$r > b \rightarrow \begin{cases} \vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r} \\ \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \end{cases}$$

Jak w tym problemie rozłożone są ładunki ?

(1) Wewnątrz przewodnika nie ma żadnego ładunku

(2) Na powierzchni przewodzącej kuli mamy stałą gęstość powierzchniową ładunku swobodnego (kolor czarny)

$$\sigma_{swob,a} = \frac{+Q}{4\pi a^2}$$

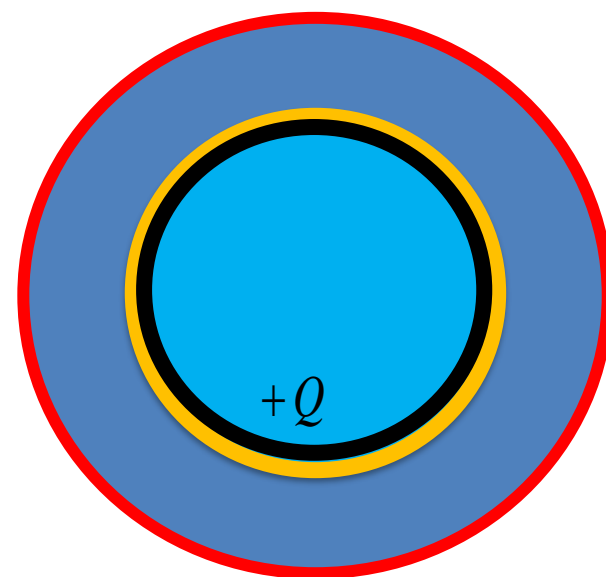
(3) Na wewnętrznej powierzchni dielektryka o promieniu  $a$  mamy gęstość powierzchniową ładunku związanego (kolor żółty)

$$\sigma_{zw,a} = \frac{-\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \varepsilon a^2}$$

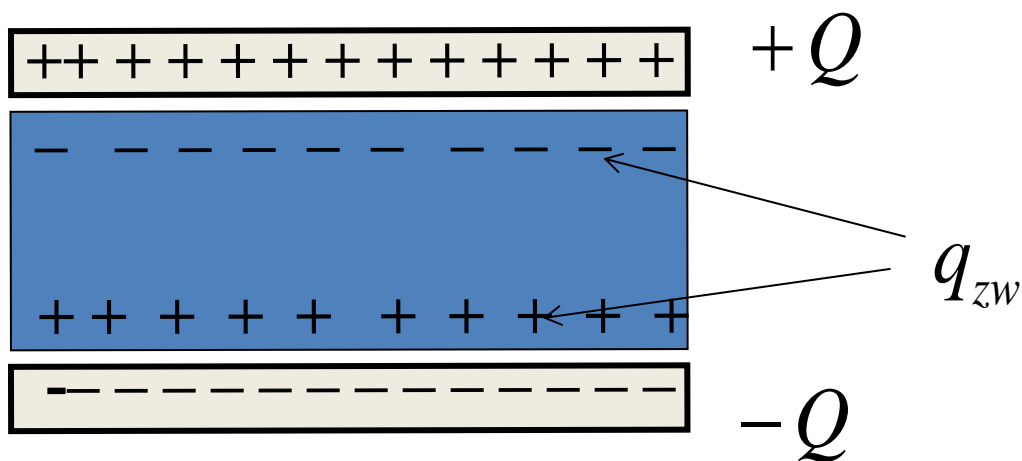
(4) Wewnątrz dielektryka nie ma żadnego ładunku związanego

(5) Na zewnętrznej powierzchni dielektryka o promieniu  $b$  mamy gęstość powierzchniową ładunku związanego (kolor czerwony)

$$\sigma_{zw,b} = \frac{\varepsilon_0 \chi_e Q}{4\pi \varepsilon b^2}$$



**Przykład nr 3:** Przestrzeń między okładkami kondensatora płaskiego wypełniona została dielektrykiem liniowym o względnej przenikalności ośrodka  $\epsilon_r$ . Na okładkach jest ładunek swobodny  $Q$ .



Dielektryk powoduje zmniejszenie natężenie pola elektrycznego  $\epsilon_r$  razy. Różnica potencjałów,  $U$ , między okładkami także zmalała  $\epsilon_r$  razy. W takim razie **pojemność kondensatora rośnie  $\epsilon_r$  razy !**

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_r C_{\text{prozni}}$$

Ważne w zastosowaniach technicznych !

Jaka energia jest zmagazynowana w takim kondensatorze wypełnionym dielektrykiem ? Chcemy porównać tę energię z przypadkiem kondensatora próżniowego. Zakładamy teraz, że oba kondensatory ładujemy do tej samej różnicy potencjałów

$$(1) E_p^{pr\o{z}nia} = \frac{1}{2} C_{pr\o{z}nia} U^2$$

$$(2) E_p^{dielektryk} = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_{pr\o{z}nia} U^2 = \varepsilon_r E_p^{pr\o{z}nia}$$

$$C_{pr\o{z}nia} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

Wzór (1) odpowiada objętościowej gęstości energii w próżni

$$w_{pr\o{z}nia} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

$$w_{pr\o{z}nia} \underbrace{S d}_{obj\text{etosc}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U}{d} \right)^2 S d = \frac{1}{2} C_{pr\o{z}nia} U^2 = E_p^{pr\o{z}nia}$$

W przypadku dielektryka wzór na objętościową gęstość energii musi być zmieniony i przyjmuje postać

$$w_{dielektryk} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

W przypadku kondensatora płaskiego pole elektryczne istnieje tylko między okładkami, a więc w objętości  $S d$ , gdzie  $S$  jest powierzchnią okładek.

Dlatego

$$w_{dielektryk} S d = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 \frac{U}{d} \frac{U}{d} S d = \frac{1}{2} \epsilon_r C_{proznia} U^2 = E_p^{dielektryk}$$

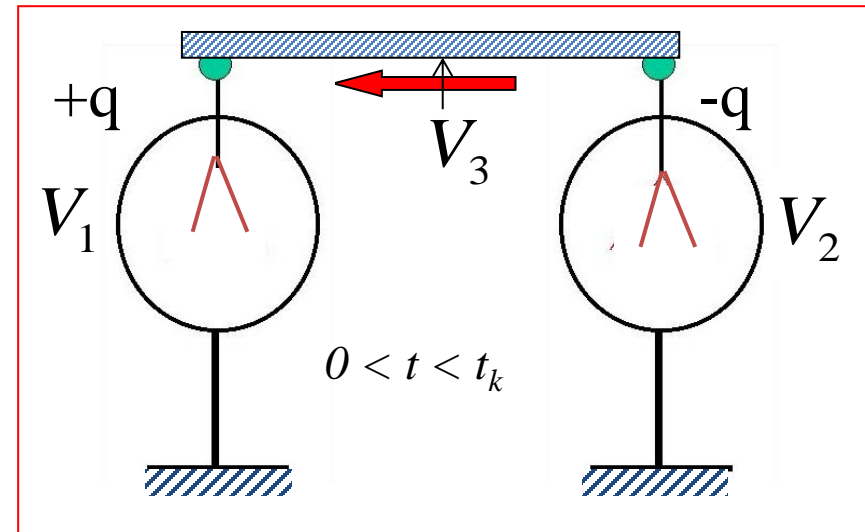
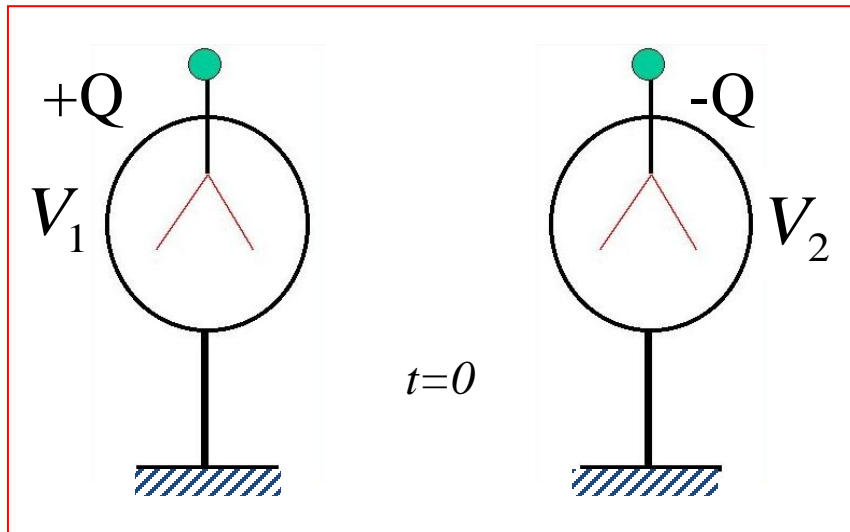
Materia w polu elektrycznym to wiele ciekawych tematów, których na tym wykładzie nie mogę poruszyć. Polecam zapoznanie się z takimi pojęciami jak

- elektret - to ogólna nazwa dielektryka, w którym sposób trwały utrzymuje się polaryzacja dipolowa lub stan naładowania elektrycznego. Elektret wytwarza wewnętrzne i zewnętrzne pola elektryczne i jest elektrostatycznym odpowiednikiem magnesu trwałego.
- piroelektryczność - występowanie w niektórych kryształach dielektrycznych samorzutnej polaryzacji elektrycznej, w nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego. W normalnych warunkach polaryzacja może być maskowana warstwą zaadsorbowanych z powietrza jonów i ujawnia się dopiero po ogrzaniu kryształu.
- piezoelektryczność - występowanie na powierzchni kryształu ładunków elektrycznych pod wpływem naprężeń mechanicznych. Przykładem piezoelektryka jest kwarc.

- elektrostrykcja - zmiana rozmiarów materiału pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego.
- ferroelektryczność - obecność polaryzacji w materiale dielektrycznym po usunięciu pola elektrycznego, które ją wywołało. Jest to związane z trwałym uporządkowaniem dipoli elektrycznych. Przykładem ferroelektryka jest tytanian baru ( $\text{BaTiO}_3$ ).
- i wiele innych ....

A my ruszamy dalej, by zająć się (stałym) prądem elektrycznym ...

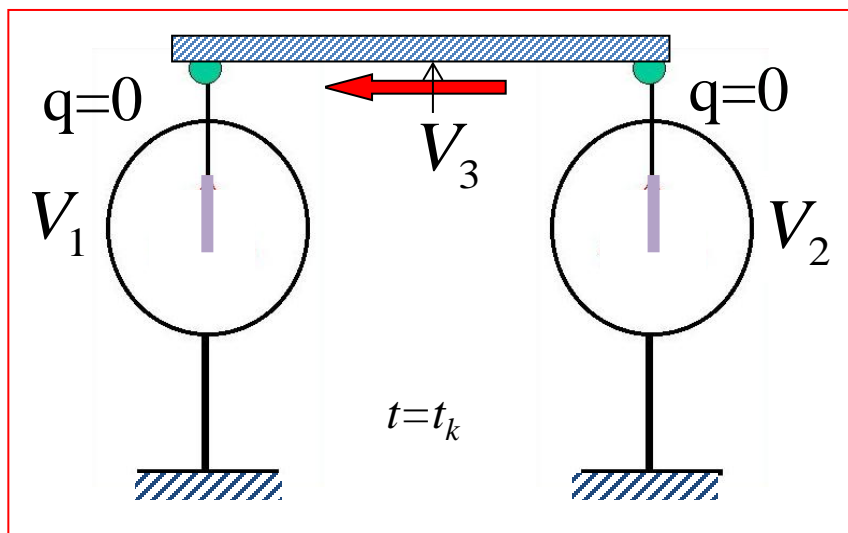
Na początek przypomnijmy sobie następujące doświadczenie, w którym połączono przewodnikiem dwa wcześniej naładowane (ładunkami o przeciwnym znaku) elektroskopy.



$t=0$	$U = V_1 - V_2$	Przypadek statyczny	2 powierzchnie ekwipotencjalne
$t=t_k$	$U = 0$	Przypadek statyczny	1 powierzchnia ekwipotencjalna
$0 < t < t_k$	$U$ maleje	Przypadek niestatyczny	Potencjał $V_3$ zależy od miejsca pomiaru



Ładunek przepłynie (w lewo popłyną elektrony) jak pokazuje czerwona strzałka i bardzo szybko listki obu elektroskopów opadną → skończy się przepływ ładunku.



$$V_1 = V_2 = V_3 = 0$$

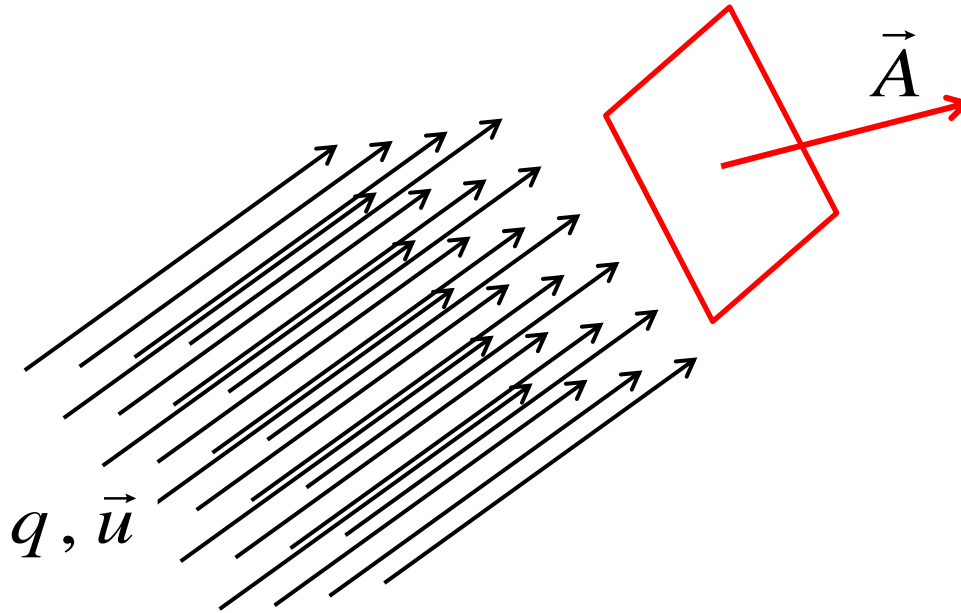
Wniosek: Nie jest łatwo utrzymać stały przepływ ładunku elektrycznego. Sama siła kulombowska (o charakterze elektrostatycznym) do tego nie wystarcza !

Na razie jednak zajmiemy się samym opisem prądu elektrycznego i nie będziemy zastanawiać się, co powoduje trwałe przepływy ładunków.

Zaczynamy od pojęcia **gęstości prądu**:

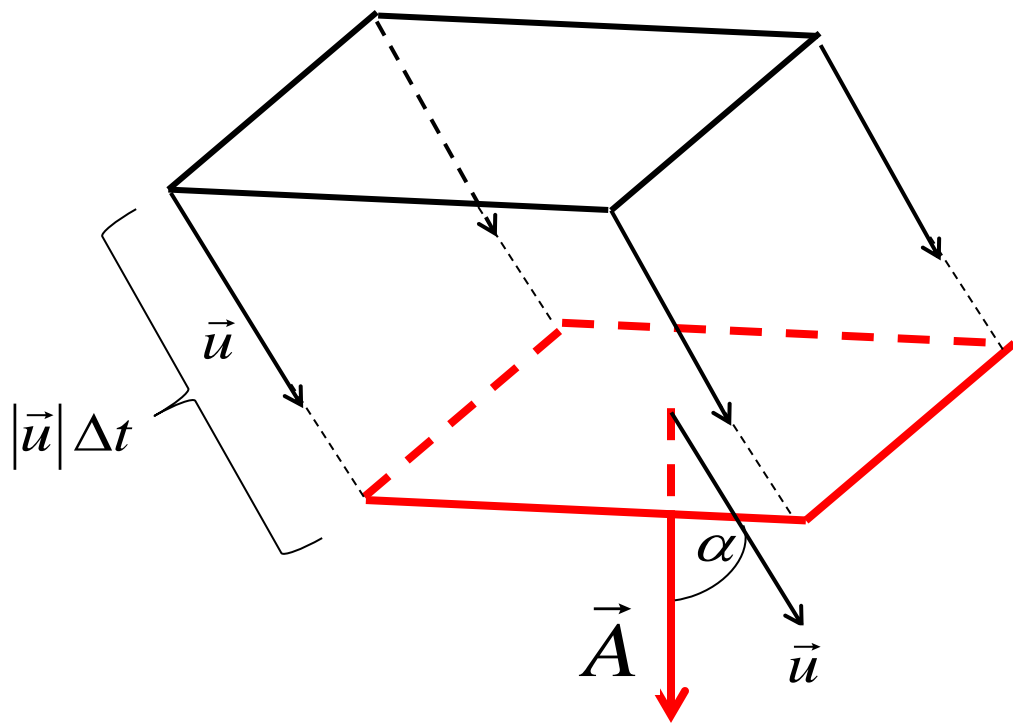
Najprostszy przypadek:

W każdym  $\text{cm}^3$  jest  $n$  cząstek, z których każda ma ładunek  $q$  i prędkość  $\mathbf{u}$ . Liczba  $n$  to tzw. koncentracja cząstek  $\rightarrow$  nośników prądu.



W strumień tak poruszających się cząstek wstawiamy ramkę prostokątną, która ma wektor powierzchni  $\mathbf{A}$ . Ile cząstek przechodzi przez powierzchnię rozpiętą na ramce w jednostce czasu ?

Trzeba zbudować równoległoscian o podstawie, która jest powierzchnią ramki i bokach równoległych do wektora  $\vec{u}$  ! W czasie  $\Delta t$  przez ramkę przejdą cząstki z narysowanego równoległoscianu. Ich liczba ( $N$ ) jest równa iloczynowi koncentracji ( $n$ ) oraz objętości prostopadłościanu. Całkowity ładunek, który przepłynie przez powierzchnię ramki w czasie  $\Delta t$  wynosi  $Q = N q$ .



$$\text{objętość} = |\vec{A}| \text{ wysokość}$$

$$\text{objętość} = |\vec{A}| |\vec{u}| \Delta t \cos \alpha$$

$$= \Delta t \vec{A} \cdot \vec{u}$$

$$N = n \text{ objętość} = n \Delta t \vec{A} \cdot \vec{u}$$

$$Q = q n \Delta t \vec{A} \cdot \vec{u}$$

$$\frac{Q}{\Delta t} = q n \vec{A} \cdot \vec{u} \equiv I(A)$$

natężenie prądu  
płynącego przez  
ramkę  $A$

Jeśli mamy wiele klas cząstek o różnych ładunkach, koncentracjach i wektorach prędkości, to każda daje własny niezależny wkład do  $I(\mathbf{a})$ :

$$I(\mathbf{A}) = \sum_k q_k n_k \vec{u}_k \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \underbrace{\sum_k q_k n_k \vec{u}_k}_{\vec{j}} \equiv \vec{A} \cdot \vec{j}$$

↑  
wektor gęstości prądu

W szczególności gęstość prądu dla jednego rodzaju nośników, powiedzmy elektronów, o niejednorodnym rozkładzie prędkości, wynosi ( $q=-e$ )

$$N_e \equiv \sum_k n_k$$

całkowita koncentracja elektronów

wektor prędkości średniej

$$\vec{j}_e = -e \sum_k n_k \vec{u}_k = -e N_e \underbrace{\sum_k \frac{n_k}{N_e} \vec{u}_k}_{\langle \vec{u} \rangle} = -e N_e \langle \vec{u} \rangle$$

↓

W ogólnym przypadku, gdy powierzchnia „ramki” nie jest płaska, a wektor gęstości prądu zmienia się od punktu do punktu, musimy użyć zapisu całkowego:

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Natężenie prądu płynącego przez powierzchnię  $A$  jest równe strumieniowi wektora gęstości prądu przez powierzchnię  $A$ .

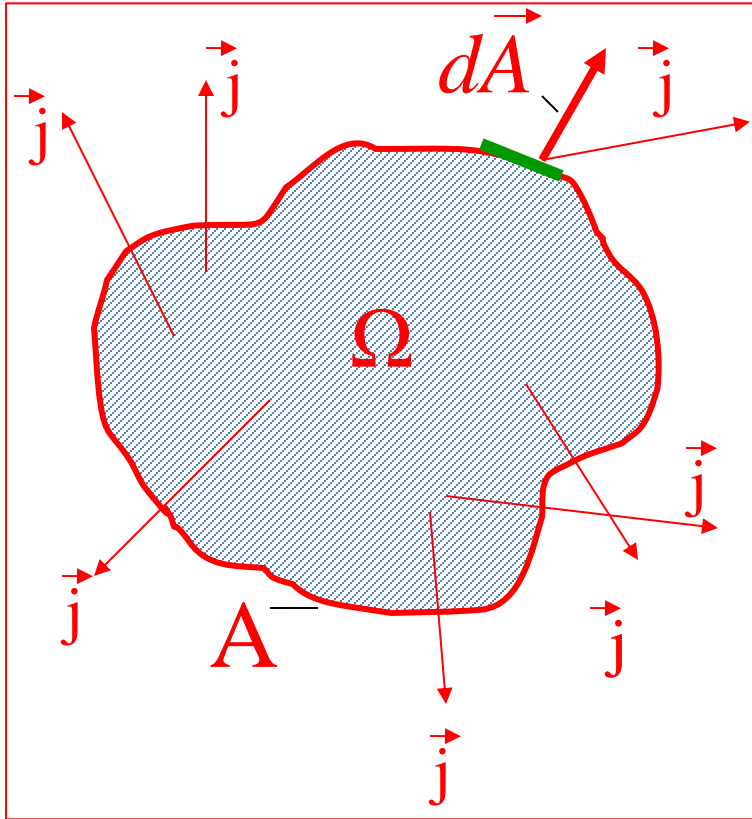
Jednostki gęstości prądu i natężenia prądu;

$$[j] = C \frac{1}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{C}{m^2 s} \equiv \frac{A}{m^2}$$

$$[I] = C \frac{1}{m^3} \frac{m}{s} m^2 = \frac{C}{s} \equiv A \quad \text{amper}$$

# Prawo zachowania ładunku → równanie ciągłości

Sformułujemy prawo zachowania ładunku, w sytuacji, gdy mamy przepływ prądu. Wybierzmy pewien przestrzenny obszar  $\Omega$ , otoczony powierzchnią  $A$ .



Z poprzednich rozważań wynika jasno, ile ładunku przepływa przez powierzchnię  $A$  w jednostce czasu:

$$\oiint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Teraz, kolejny już raz, skorzystamy z twierdzenia Gaussa, które pozwala zastąpić strumień pola wektorowego przez powierzchnię zamkniętą, całką po całej objętości obszaru z dywergencji pola wektorowego:

$$\oiint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \xrightarrow{\text{Gauss}} \iiint_{\Omega} \text{div } \vec{j} dV$$

Z obszaru  $\Omega$  ubywa ładunku w tempie:

$$-\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho dV$$

Porównując przepływ ładunku przez powierzchnię  $A$  z ubytkiem ładunku w objętości  $\Omega$ , dostajemy

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho dV$$

Ponieważ obszar  $\Omega$  może być dowolnie mały, więc dostajemy tzw. **równanie ciągłości**, jedno z najważniejszych równań w fizyce:

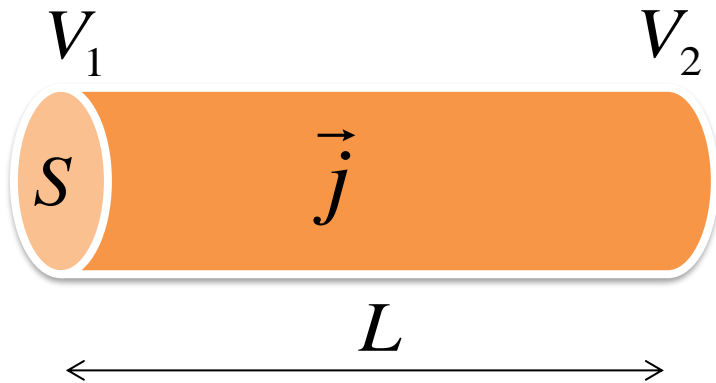
$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

My zajmiemy się przede wszystkim tzw. prądami stacjonarnymi, dla których

$$\vec{j}(x, y, z, t) = \text{const}$$

Jakie są fakty eksperymentalne dotyczące przepływu prądu?

Rozważamy fragment materiału o długości  $L$  i stałej wartości przekroju poprzecznego,  $S$ . Niech na jego końcach panuje różnica potencjałów  $U = V_1 - V_2$ .



Dla wielu materiałów, na przykład dla różnych metali, zachodzi:  $I \propto U$ , czyli natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia.

Jest to właśnie treść prawa Ohma !

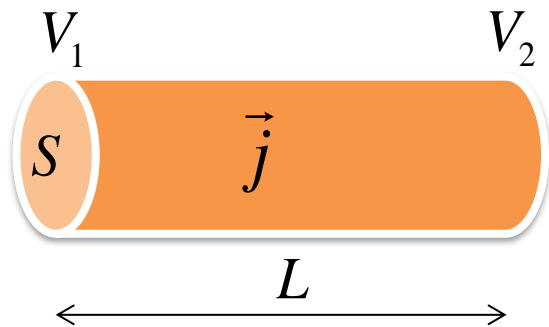
Mozna je także zapisać w postaci:  $\vec{j} \propto \vec{E}$ .



Uwaga nr 1:

Prawo Ohma nie jest prawem w takim sensie jak na przykład prawo zachowania ładunku lub prawo Gaussa.

Jest to prawidłowość, od której znane są liczne wyjątki.



Piszemy:  $I = \frac{1}{R}U$ ,

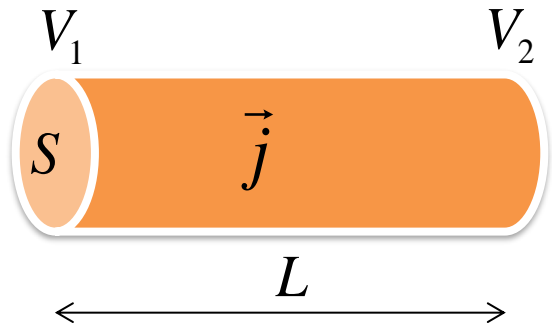
a wielkość  $R$  nazywamy oporem elektrycznym !

Uwaga nr 2:

Nie mylić prawa Ohma z definicją oporu elektrycznego :  $R = \frac{U}{I}$  .

Opór elektryczny jest w szczególności zależny od temperatury i może być podawany także dla materiałów, które nie spełniają prawa Ohma.

Jeśli chcemy skupić się na własnościach danego materiału, a nie interesują nas rozmiary substancji, przez którą płynie prąd elektryczny, piszemy:



$$R = \rho \frac{L}{S}$$

↑

opór elektryczny właściwy  
To bardzo ciekawa wielkość, która przyjmuje niezwykle szeroki zakres wartości.

$$[R] = \frac{\text{V}}{\text{A}} \equiv \Omega$$

$$[\rho] = \Omega \text{ m}$$

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho} \rightarrow [\sigma] = \frac{1}{\Omega \text{ m}} = \frac{\text{A}}{\text{V m}}$$

przewodność elektryczna właściwa

# Tabela rezystywności niektórych substancji (w temp. 20 °C)

(źródła: Griffiths oraz Wikipedia)

materiał opór właściwy [ $\Omega$  m]

srebro  $1,59 \cdot 10^{-8}$

miedź  $1,72 \cdot 10^{-8}$

złoto  $2,44 \cdot 10^{-8}$

aluminium  $2,82 \cdot 10^{-8}$

nikiel  $6,99 \cdot 10^{-8}$

żelazo  $10 \cdot 10^{-8}$

cyna  $10,9 \cdot 10^{-8}$

platyna  $11 \cdot 10^{-8}$

ołów  $22 \cdot 10^{-8}$

węgiel  $3,5 \cdot 10^{-5}$

german 0,46

krzem 640

szkło  $10^{10} - 10^{14}$

guma około  $10^{13}$

siarka  $10^{15}$

woda czysta  $2,5 \cdot 10^5$  , ale słona woda (nasycona)  $4,4 \cdot 10^{-2}$

Jak wytłumaczyć zależność  $\vec{j} \propto \vec{E}$  ?

Rolę stałej proporcjonalności pełni przewodność elektryczna, więc mamy

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Aby wytłumaczyć tę zależność oraz ewentualne odstępstwa od prawa Ohma, potrzebny jest model tego, co dzieje się w przewodniku (np. w metalach)  $\rightarrow$  model przewodnictwa !

Taki model powinien odpowiedzieć na pytania

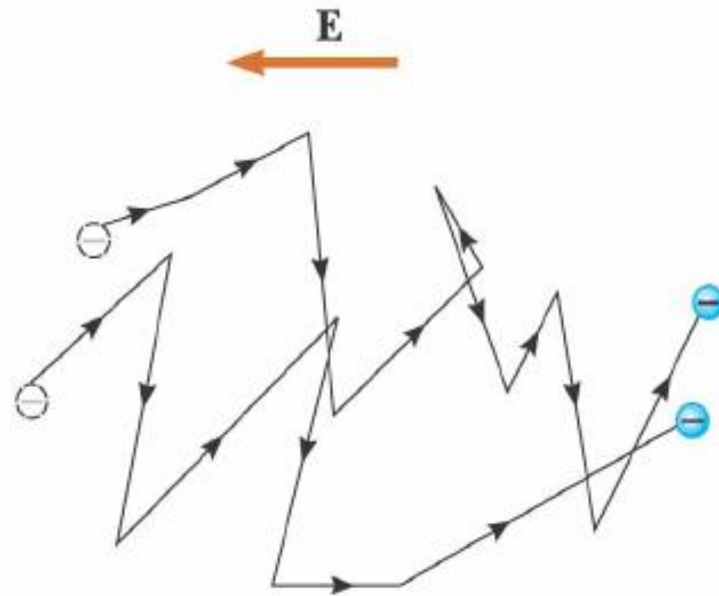
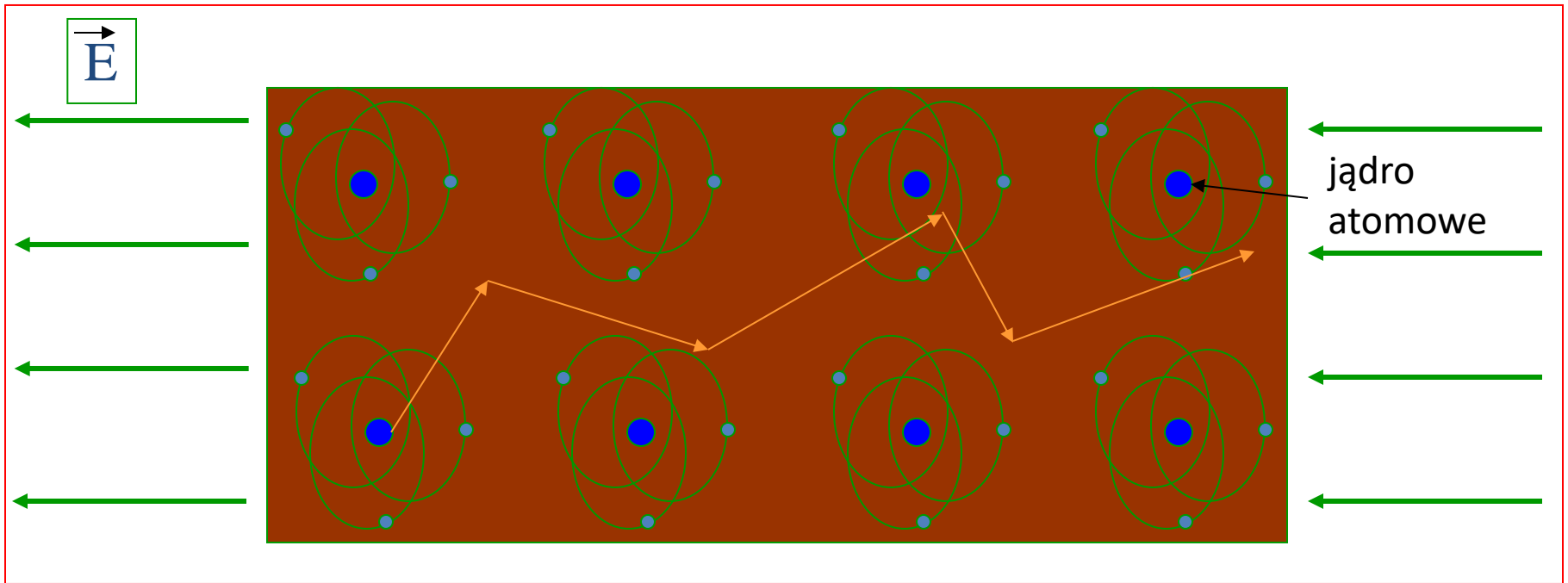
- Dlaczego stała siła działająca na ładunki ( $q \mathbf{E}$ ) nie powoduje ich przyspieszania i zwiększenia wartości wektora gęstości prądu ?
- Dlaczego przewodność elektryczna ( $\sigma$ ) nie zależy (przynajmniej w pewnych granicach) od wartości natężenia pola elektrycznego ?
- Jak opór elektryczny zależy od temperatury ?

**Mechanizm przewodnictwa elektrycznego** jest skomplikowany i należy go rozpatrywać osobno dla metali, gazów i roztworów (kwasów, zasad i soli).

Pełny opis przewodnictwa elektronowego w metalach wymagałby uwzględnienia falowej natury elektronów (mechanika kwantowa).

Klasyczny obraz jest następujący: prąd przewodzenia przenoszony jest przez niezwiązane elektrony, tworzące „gaz elektronowy” w metalu i polega na powolnym, systematycznym przesuwaniu się nośników prądu, nałożonym na ich bardziej gwałtowny i chaotyczny ruch termiczny. Zderzenia elektronów z siecią krystaliczną powodują proporcjonalność ich średniej prędkości do natężenia pola elektrycznego.

Ta tzw. prędkość dryfu elektronów w czasie przepływu prądu jest bardzo niewielka (rzędu  $10^{-4}$  m/s ) i znacznie mniejsza od prędkości ruchów cieplnych.



## Prawo Joule'a - Lenza

Jeżeli ładunek  $dQ$  jest przenoszony przez różnicę potencjałów  $U$ , to wykonana zostaje praca  $dW = U dQ$ . Jeżeli w przewodniku płynie prąd  $I$ , to w czasie  $dt$  przepłynie w nim ładunek  $dQ = I dt$ . Zatem praca wykonana przez źródło pola elektrycznego wynosi:

$$dW = U dQ = U I dt = I^2 R dt$$

Nośniki ładunku ulegają w przewodniku ciągłym zderzeniom, w których energia uzyskiwana przez nie od pola elektrycznego zamienia się na energię ruchu cieplnego. Moc wydzielana na oporniku wynosi:

$$P = \frac{dW}{dt} = U I = \frac{U^2}{R} = I^2 R$$