

Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 12

Z poprzedniego wykładu

Pole magnetyczne opisywane jest przy pomocy wektora indukcji magnetycznej \mathbf{B} o tej własności, że na ładunek elektryczny poruszający się z prędkością \mathbf{v} działa w punkcie $P(x,y,z)$ siła dana wzorem

$$\vec{F}(x, y, z) = q(\vec{v} \times \vec{B}(x, y, z)) \quad \text{siła Lorentza}$$

Jednostką indukcji magnetycznej w układzie SI jest tesla (T)

$$[B] = \frac{Ns}{Cm} \equiv T = \frac{Vs}{m^2}$$

$$\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_n I_n$$

Prawo Ampere'a w postaci całkowej

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Prawo Ampere'a w postaci różniczkowej

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Całkowity strumień indukcji magnetycznej po dowolnej powierzchni zamkniętej wynosi zero !

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

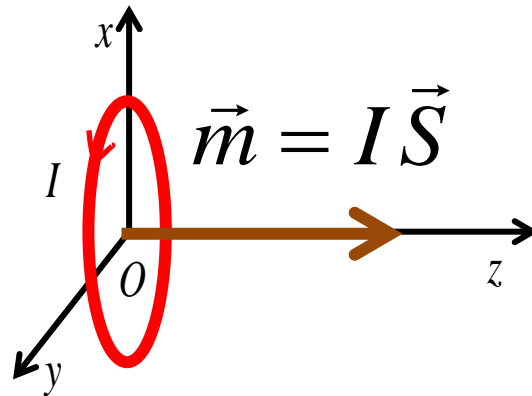
Dywergencja indukcji magnetycznej wynosi zero ! Pole magnetyczne jest bezźródłowe !

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Potencjał wektorowy

(klasyczny) dipol magnetyczny to niekoniecznie płaski obwód z prądem

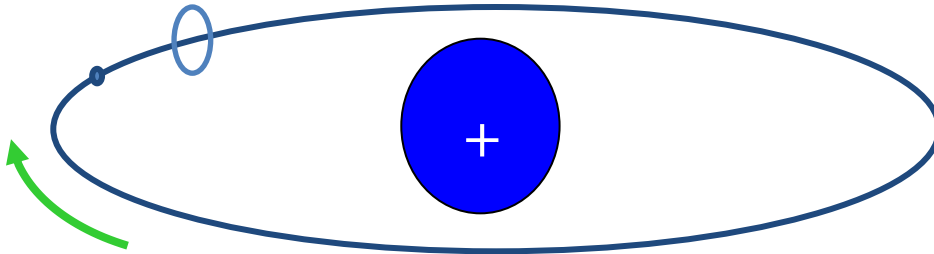
Magnetyczny moment dipolowy



http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/prawo_Biota_Savarta_ramki.nb

Momenty magnetyczne atomów i jąder atomowych

Rozważmy najpierw klasyczny model atomu wodoru: wokół dodatnio naładowanego protonu krąży po **orbicie** kołowej elektron o masie m_e .

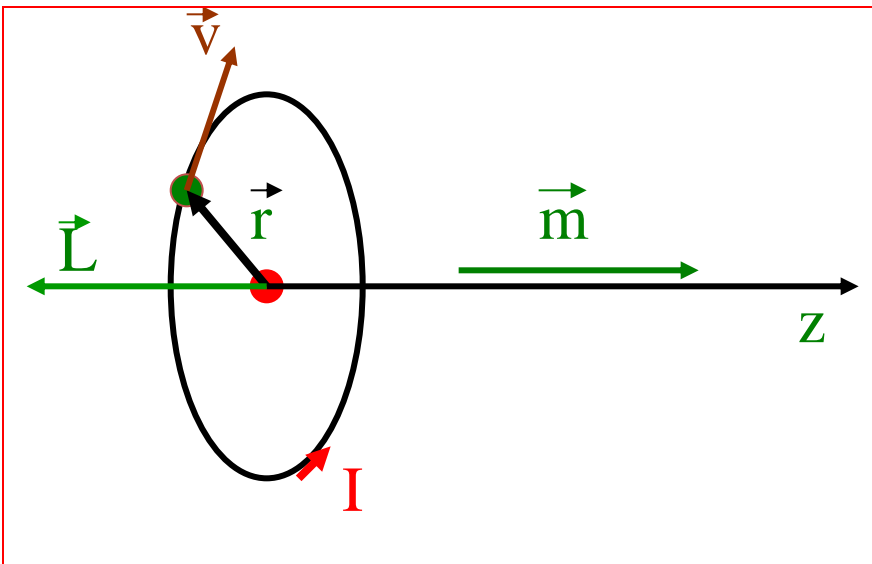


Możemy przyjąć, że przez orbitę płynie prąd o natężeniu ładunek/okres:

$$I = \frac{ev}{2\pi r},$$

a (orbitalny) moment magnetyczny elektronu wynosi:

$$m = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} evr$$



Uwaga: v jest szybkością (długością wektora prędkości) elektronu na orbicie wokół protonu

Krążący po orbicie elektron posiada moment pędu równy:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m_e \vec{v}$$

Możemy więc magnetyczny orbitalny moment dipolowy napisać jako:

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}, e > 0$$

W mechanice kwantowej rzut wektora \mathbf{L} na dowolny kierunek (np. oś z) przybiera wartości nieciągłe, czyli **skwantowane** !

stała Plancka

$$(\vec{L})_z = m_l \hbar, m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

(h kreślone) elementarny kwant orbitalnego momentu pędu

W takim razie magnetyczny orbitalny moment dipolowy też jest skwantowany i przyjmuje wartości

$$(\vec{m})_z = -\frac{e}{2m_e}(\vec{L})_z = -\underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{\mu_B} m_l$$

$$\mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.27 \times 10^{-24} \text{ Am}^2 \quad \text{magneton Bohra}$$

Bardzo niezwykle jest to, że **punktowy** elektron ma także **własny** (tzw. spinowy) **moment pędu**, którego rzut na dowolny kierunek (np. oś z) przybiera tylko dwie wartości:

$$(\vec{L}_s)_z = m_s \hbar, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Magnetyczny spinowy moment dipolowy też jest skwantowany i przyjmuje wartości

$$\left(\vec{m}_{spin}\right)_z = -g_s \underbrace{\frac{e\hbar}{2m_e}}_{\mu_B} m_s$$

↑
 dodatkowy czynnik ≈ 2
 (historia fizyka: Pauli, Dirac, QED)

Tak samo jest dla innych leptonów, mionu i taonu !

Jakie są spinowe momenty magnetyczne składników jąder atomowych ?
 Rzut spinowego momentu pędu protonu i neutronu na dowolny kierunek (np. oś z) przybiera, tak jak dla elektronu, tylko dwie wartości: $\pm\frac{1}{2}$!

Odpowiednikiem magnetonu Bohra jest magneton jądrowy:

$$\mu_N \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 5.05 \times 10^{-27} \text{ Am}^2$$

← masa protonu

Magnetyczny moment dipolowy protonu

$$m_{prot} = 2.79 \mu_N$$

Magnetyczny moment dipolowy neutronu

$$m_{neut} = -1.91 \mu_N$$

Te wartości wskazują na to, że proton i neutron zbudowane są z bardziej elementarnych składników – kwarków !

Z kolei **momenty magnetyczne jąder** wynikają z własnych momentów magnetycznych protonów i neutronów oraz ruchu względnego nukleonów !

Pole magnetyczne w materii

Zjawiska magnetyczne są spowodowane ruchem ładunków; w skali atomowej płyną mikroskopowe „prądy”, którym odpowiadają dipole magnetyczne. Zwykle znoszą się wzajemnie z powodu przypadkowego ułożenia atomów.

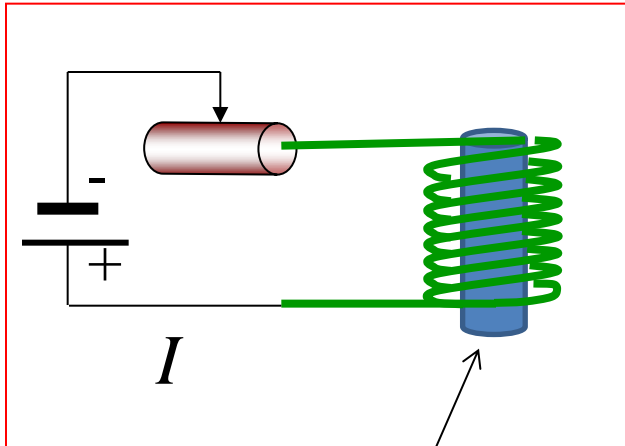
W zewnętrznym polu magnetycznym te dipole magnetyczne ustawiają się wzdłuż linii pola → substancja staje się spolaryzowana magnetycznie (namagnesowana !)

Mały (ale makroskopowy) fragment materii może posiadać magnetyczny moment dipolowy. Magnetyzacją, inaczej polaryzacją magnetyczną, (wektor oznaczany literą \mathbf{M}) nazywamy magnetyczny moment dipolowy na jednostkę objętości.

Trzy rodzaje materiałów:

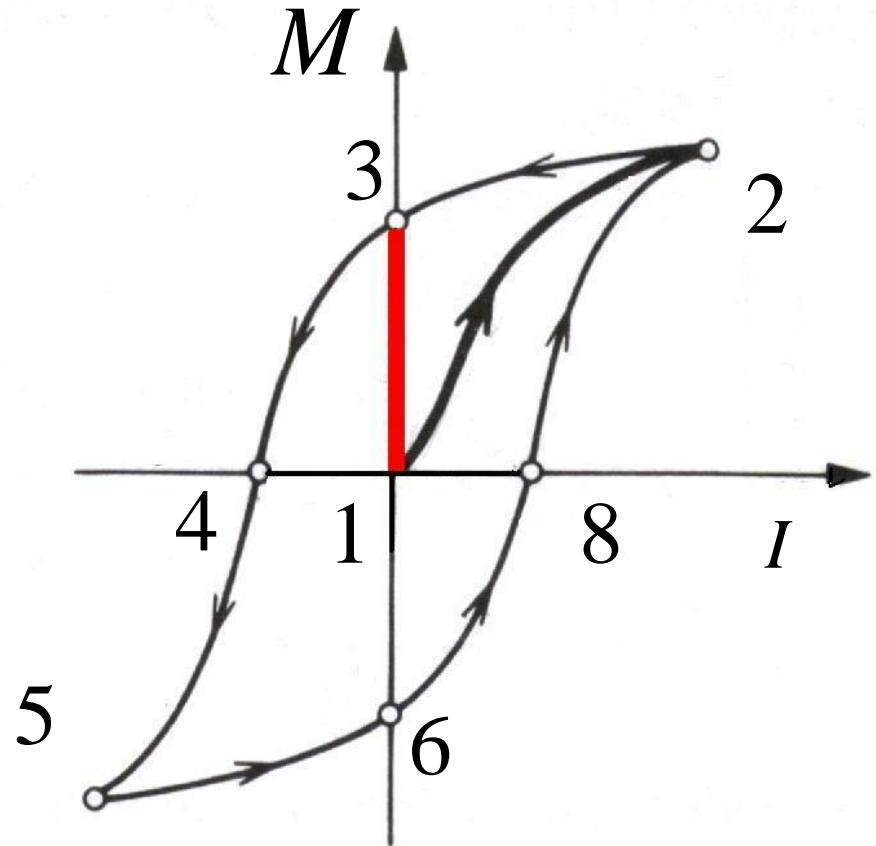
- paramagnetyki: namagnesowanie w tym samym kierunku i tym samym zwrocie, co pole \mathbf{B} . Zwykle są to substancje zbudowane z atomów lub cząsteczek o nieparzystej liczbie elektronów (Na, Li, K). Decydujące znaczenie spinowego momentu dipolowego niesparowanego elektronu. Wciągane do pola magnetycznego.
- diamagnetyki: namagnesowanie w tym samym kierunku, ale o przeciwnym zwrocie do pola \mathbf{B} . Typowe diamagnetyki zbudowane są z atomów lub cząsteczek, które mają parzystą liczbę elektronów (złoto, srebro, rtęć, miedź, cynk, wiele związków organicznych oraz wszystkie gazy obojętne). Niezwykle „mocnymi” diamagnetykami są bizmut i antymon. Decydujące znaczenie ma zmiana momentów dipolowych związanych z orbitalnym momentem pędu. Wypychane z pola magnetycznego.
- ferromagnetyki: namagnesowanie nie znika, gdy zewnętrzne pole \mathbf{B} zostaje wyłączone (żelazo, kobalt, nikiel, gadolin). Własności wynikają z oddziaływania między sąsiednimi atomami lub jonami w sieci krystalicznej. Typowe jest występowanie domen (obszarów zawierających miliardy zgodnie ustawionych dipoli), które pod wpływem pola zewnętrznego mogą obejmować całą objętość próbki.

Magnesowanie



materiał, który
chcemy
namagnesować

Pętla histerezy



Ferromagnetyzm dużo silniejszy niż dia- lub paramagnetyzm \rightarrow czynnik 10^4 - 10^5

W temperaturze wyższej niż tzw. temperatura Curie ferromagnetyk staje się paramagnetykiem ! Dla żelaza to około 770°C

Przypomnienie: dla dielektryków, rozważając **spolaryzowane ciało** (z rozkładem gęstości dipoli elektrycznych), doszliśmy do pojęcia objętościowej i powierzchniowej gęstości **ładunków związanych**.

Teraz, analogiczny rachunek pokazujący indukcję magnetyczną wytworzoną przez **namagnesowane ciało**, prowadzi do gęstości objętościowej i powierzchniowej **prądów związanych**.

formalny dowód na
stronach 8-11

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\vec{j}_{sw} + \vec{j}_{zw})$$

$$\vec{j}_{zw} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j}_{sw} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right)}_{\vec{H}} = \vec{j}_{sw}$$

← natężenie pola magnetycznego

Dla para- i diamagnetyków wektor magnetyzacji \vec{M} jest proporcjonalny do wektora \vec{B} (dla niezbyt silnych pól).

Piszemy zwyczajowo: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$
← podatność magnetyczna

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \vec{H} \equiv \mu \vec{H}$$

← przenikalność magnetyczna

Materiał	Podatność magnetyczna dla $t = 20^{\circ}\text{C}$
Paramagnetyki	
Uran	$40 \cdot 10^{-5}$
Platyna	$26 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Sód	$0.72 \cdot 10^{-5}$
Tlen (gaz)	$0.19 \cdot 10^{-5}$
Diamagnetyki	
Bizmut	$-16.6 \cdot 10^{-5}$
Rtęć	$-2.9 \cdot 10^{-5}$
Srebro	$-2.6 \cdot 10^{-5}$
Węgiel (diament)	$-2.1 \cdot 10^{-5}$
Ołów	$-1.8 \cdot 10^{-5}$
Chlorek sodu	$-1.4 \cdot 10^{-5}$
Miedź	$-1.0 \cdot 10^{-5}$
Woda	$-9.0 \cdot 10^{-6}$

Na następnych slajdach pokazuję przeliczenia prowadzące od pola magnetycznego namagnesowanego ciała do prądów związanych. Wygodniej jest policzyć potencjał wektorowy od takiego ciała, a nie samą indukcję magnetyczną !

Potencjał wektorowy pojedynczego dipola dany jest wzorem

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Każdy element objętości namagnesowanego ciała daje swój wkład do potencjału wektorowego, bo jest w nim moment dipolowy $\vec{M}(\vec{r}') d\vec{r}'$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$$

Skorzystamy z wzoru

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

gradient względem
wielkości primowanych

i zapiszemy:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\vec{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left[\vec{M}(\vec{r}') \times \left(\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right) \right] d\vec{r}' \end{aligned}$$

Następnie używamy trójwymiarowego wzoru na całkowanie przez części i pochodną iloczynu

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d\vec{r}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] d\vec{r}'\end{aligned}$$

Drugą z całek przekształcamy w całkę powierzchniową po powierzchni obejmującej obszar Ω :

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d\vec{r}' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{brzeg } \Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}' \right]\end{aligned}$$

Obie całki wyglądają tak, jakby pochodziły od prądów - pierwsza całka od prądu objętościowego, a druga od prądu powierzchniowego. To są właśnie prądy związane !

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}') \right] d\vec{r}' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{brzeg } \Omega} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\vec{M}(\vec{r}') \times d\vec{S}' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{j}_{zw}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{brzeg } \Omega} \frac{\vec{K}_{zw}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS',\end{aligned}$$

gdzie

$$\vec{j}_{zw}(\vec{r}') \equiv \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \times \vec{M}(\vec{r}'),$$

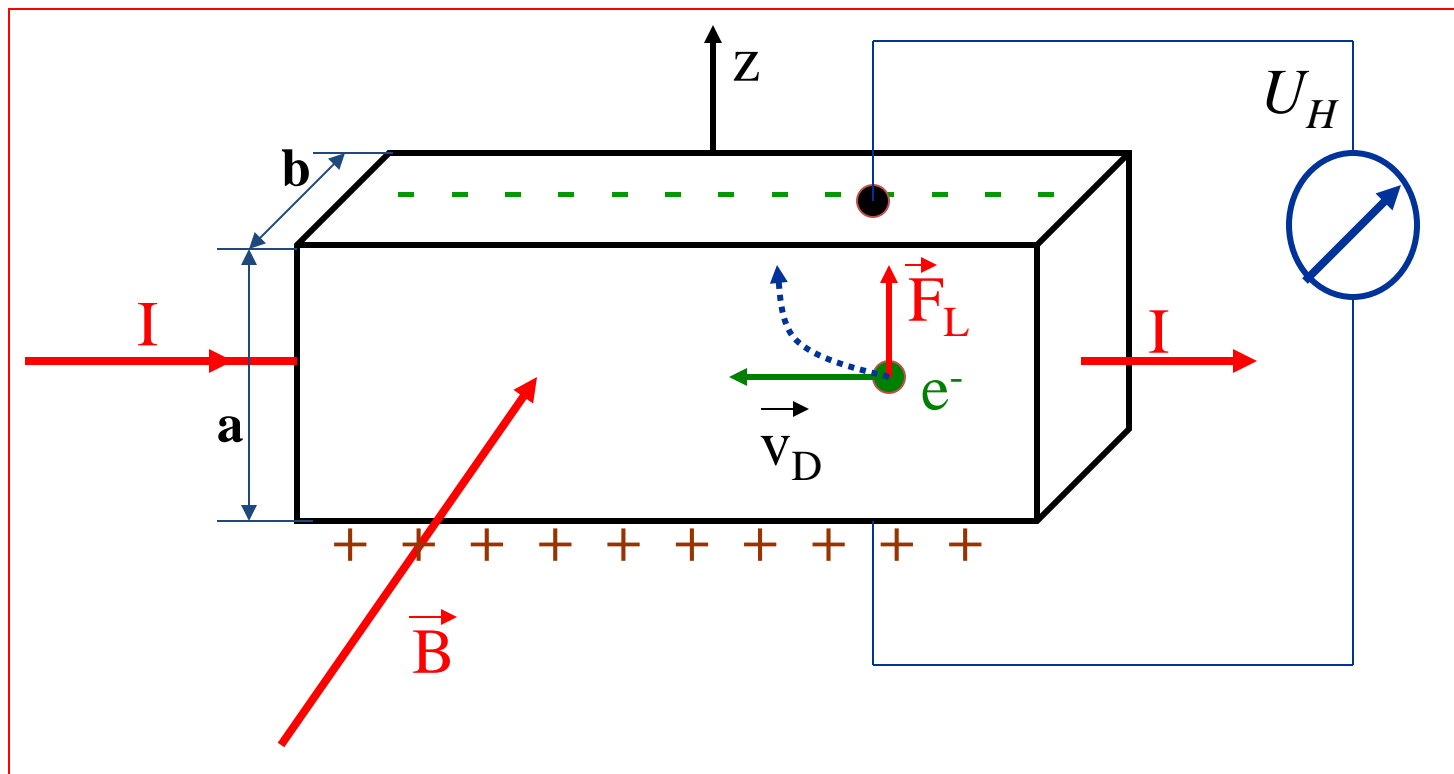
$$\vec{K}_{zw}(\vec{r}') \equiv \vec{M}(\vec{r}') \times d\hat{S}'$$

Udowodniliśmy
wzór wykorzystany
na stronie 5

jednostkowy wektor
prostopadły do
powierzchni

Efekt Halla

Cienka (małe b) płytką przewodząca w polu magnetycznym



Elektrony przewodnictwa, które poruszają się ze średnią prędkością dryfu \vec{v}_D , są odchylane w kierunku z .

Tworzy się różnica potencjałów pomiędzy „górną” i „dolną” krawędzią przewodnika. Pojawia się więc siła elektryczna wynikająca z tej różnicy potencjałów. Jest ona skierowana przeciwnie do siły Lorentza. Zrównanie się tych dwóch sił oznacza stan równowagi.

$$-ev_D B = F_L = F_E = -e \frac{U_H}{a}$$

Z teorii przewodnictwa elektronowego wiadomo, że

$$v_D = \frac{j}{ne} = \frac{I}{neab}$$

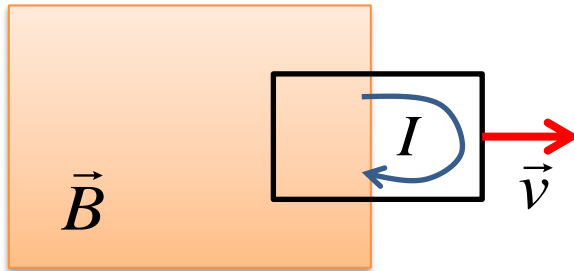
Otrzymujemy więc wzór na różnicę potencjałów generowaną w efekcie Halla

$$U_H = \frac{IB}{neb}$$

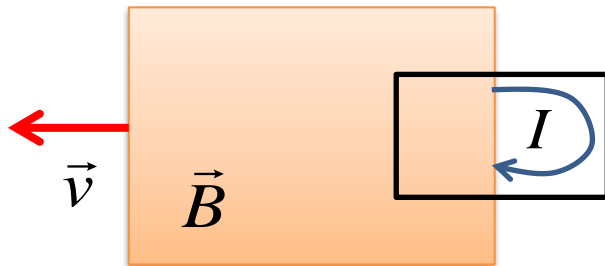
W tym wzorze mamy zależność od koncentracji nośników prądu !

Indukcja elektromagnetyczna

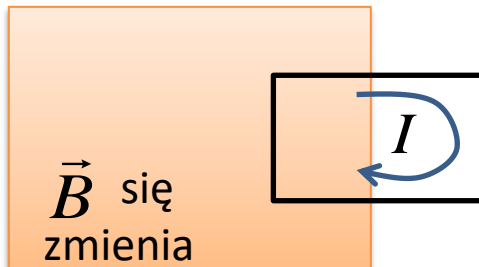
Wyobraźmy sobie trzy doświadczenia



(1) Wysuwamy zamkniętą pętlę wykonaną z drutu w prawo, poza obszar pola



(2) Przesuwamy magnes w lewo, a pętla pozostaje nieruchoma



(3) Pętla i magnes pozostają nieruchome, ale zmieniamy pole magnetyczne

We wszystkich trzech przypadkach w obwodzie płynie prąd !

Wszystkie trzy przypadki można zawrzeć w „uniwersalnej regule strumienia”

Jeśli (z dowolnego powodu) zmienia się strumień magnetyczny przenikający przez obwód, w obwodzie indukuje się siła elektromotoryczna.

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi_M}{\partial t}$$

Dla przypadku (3) otrzymujemy prawo Faradaya (w postaci całkowej)

$$\mathcal{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi_M}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Korzystając z twierdzenia Stokesa, całkę po konturze zamkniętej zamieniamy na całkę po powierzchni S rozpiętej na konturze Γ z rotacji pola \mathbf{E} .

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

W postaci różniczkowej prawo Faradaya ma postać:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

To już na pewno nie jest elektrostatyka, gdzie było $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

W którym kierunku płynie indukowany prąd ?

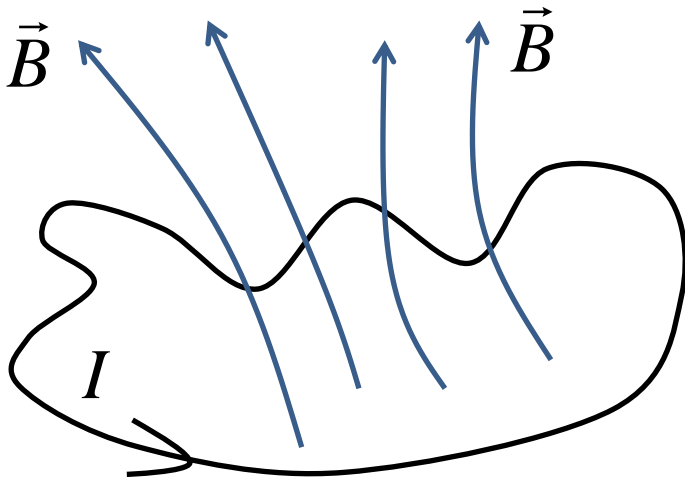
Indukowany prąd płynie w takim kierunku, że dodatkowy strumień powstały w wyniku jego przepływu sprzeciwia się zmianie pierwotnego strumienia. Jest to treść tzw. reguły Lenza (*„Natura nie znosi zmiany strumienia”*) i sens znaku „minus” we wzorze

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi_M}{\partial t}.$$

Jakie są bezpośrednie konsekwencje reguły strumienia ?

Indukcyjność wzajemna i samoindukcja !

Indukcyjność własna



Zmiana natężenia prądu indukuje siłę elektromotoryczną w tej samej pętli, w której płynie prąd ! Strumień jest proporcjonalny do płynącego prądu, więc

$$\Phi = L I$$

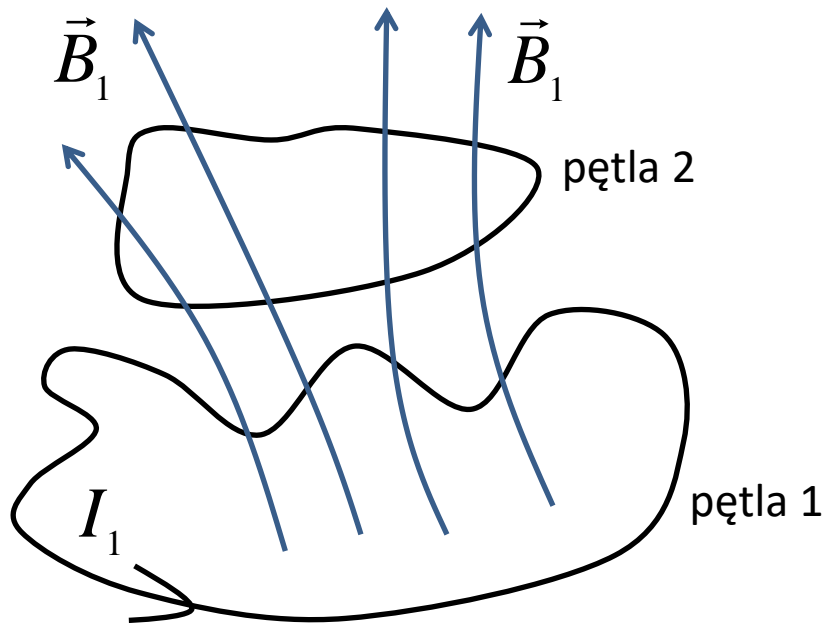
$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L \frac{dI}{dt}.$$

L jest wielkością czysto geometryczną, zależną od rozmiarów i kształtu obwodu. Jednostką indukcyjności wzajemnej i indukcyjności własnej jest henr (H):

$$[M] = [L] = H = \frac{V s}{A}$$

Indukcyjność własna jest miarą bezwładności i odpowiednikiem masy: im większa indukcyjność własna, tym trudniej zmienić natężenie w obwodzie.

Indukcyjność wzajemna



Mamy dwie nieruchome przewodzące pętle.

Prąd o natężeniu I_1 płynący w pętli 1 wytwarza strumień pola magnetycznego przez pętlę 2, który jest proporcjonalny do I_1 :

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

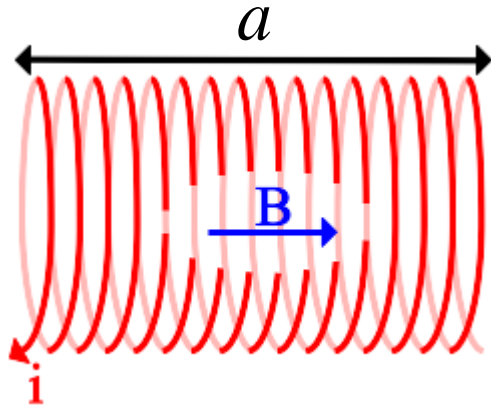
Można pokazać, że $M_{21} = M_{12} \equiv M$,

gdzie M jest wielkością czysto geometryczną, zależną od rozmiarów, kształtów i wzajemnego położenia obu pętli. Jeśli zmieniamy natężenie prądu I_1 , to strumień magnetyczny przez drugą pętlę także się zmienia i indukuje w drugiej pętli siłę elektromotoryczną

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Ważny przykład :

Indukcyjność własna (nieskończenie długiego) solenoidu w kształcie walca o promieniu R , na który ciasno nawinięto przewodnik z prądem.



Znamy indukcję magnetyczną B

$$B = \mu_0 n I$$

n jest liczbą zwojów na jednostkę długości

Policzymy indukcyjność fragmentu cewki o długości a .

Ponieważ w tym fragmencie mamy na zwojów, więc strumień dany jest wzorem

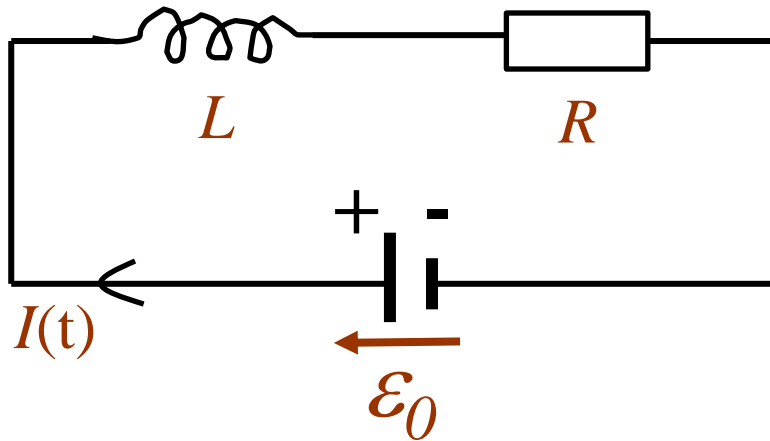
$$\Phi = \mu_0 n I n a \pi R^2 \rightarrow L = \mu_0 n^2 a \pi R^2$$

Indukcja elektromagnetyczna ma kolosalne znaczenie praktyczne

Praktycznie wszystkie urządzenia przetwarzające energię mechaniczną na energię elektryczną (od dynama rowerowego do potężnych generatorów w elektrowniach), silniki na prąd zmienny, transformatory, wszystkie urządzenia zasilane prądem zmiennym i każde urządzenie wykorzystujące prąd zmienny (radio, telewizor, telefon, komputer, ...) ma coś wspólnego z prawem indukcji Faradaya !

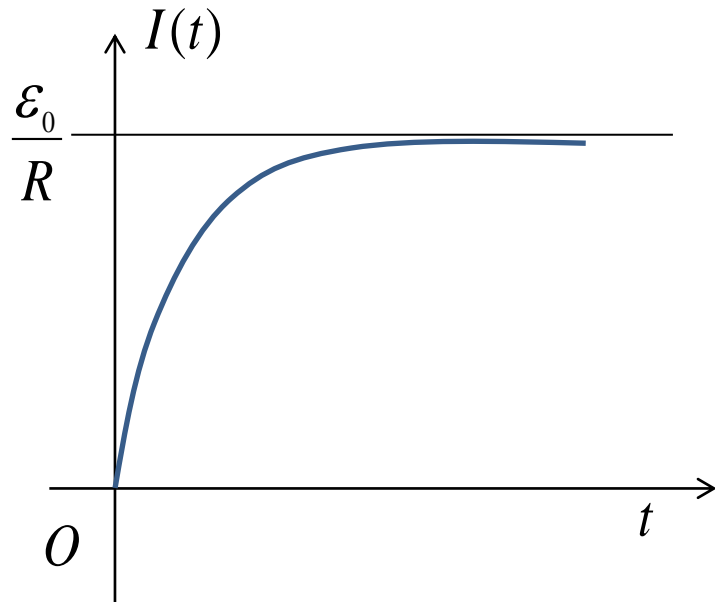
Obwód z indukcyjnością

Bateria o stałej sile elektromotorycznej \mathcal{E}_0 zostaje włączona do obwodu z oporem R i indukcyjnością L . Jak zmienia się natężenie prądu płynącego w tym obwodzie ?



Całkowita siła elektromotoryczna jest sumą siły elektromotorycznej baterii i indukowanej siły elektromotorycznej:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI \\ WP : I(t=0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$



Ładunek przepływający przez przewodnik w jednostce czasu jest równy I , więc całkowita praca wykonana w jednostce czasu wynosi

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E} I = LI \frac{dI}{dt}$$

$$dW = LI dI \rightarrow W = \frac{1}{2} LI^2 = E_{mag}$$

Aby w obwodzie popłynął prąd, należy wykonać pracę przeciwko przeciwstawnej sile elektromotorycznej. W obwodzie zostanie zmagazynowana energia ! Jest to w istocie energia pola magnetycznego.

Czyli mamy kolejny odpowiednik zjawiska z elektrostatyki. Tam mieliśmy ładowanie kondensatora od zera do ładunku Q , a teraz tworzymy prąd od zera do I !

W przypadku cewki o skończonej długości pole magnetyczne istnieje tylko w ograniczonym obszarze i przy zaniedbaniu efektów brzegowych jest takie same w całej cewce. (Znowu mamy odpowiednik z kondensatorem płaskim o skończonych rozmiarach).

Możemy więc znaleźć wzór na energię pola magnetycznego wyrażony przez gęstość energii (ilość energii w jednostce objętości)

$$E_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{R^3} \vec{B}^2 dV \quad \left(E_{el} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{R^3} \vec{E}^2 dV \right)$$

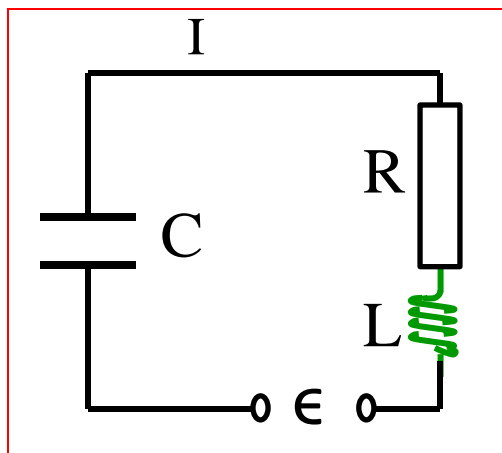
To było w próżni. Jeśli wewnątrz cewki byłoby wypełnione materia o przenikalności magnetycznej μ , wtedy

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{B} \cdot \vec{H} dV \quad \left(E_{el} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{E} \cdot \vec{D} dV \right)$$

Obwody zawierające opór, pojemność i indukcyjność

Mamy teraz już wystarczającą wiedzę, by opisać zachowanie obwodów, w których występują nie tylko oporniki, ale także kondensatory i cewki z indukcyjnością. Zewnętrzna siła elektromotoryczna nie musi być stała ! Prawa Kirchhoffa stają się równaniami różniczkowymi.

Przykład: szeregowy obwód RLC



$$V_L + V_C + V_R = \varepsilon(t)$$

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = \varepsilon(t), \quad I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{1}{L} \varepsilon(t)$$

równanie różniczkowe II rzędu na $Q(t)$

Równanie dla szeregowego obwodu RLC bardzo przypomina równanie oscylatora harmonicznego z zewnętrzną siłą wymuszającą dla tłumienia proporcjonalnego do prędkości !

Obwód RLC
$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \varepsilon(t)$$

Oscylator harmoniczny
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + k x = F(t)$$

Analogie:

$m \leftrightarrow L$	$x(t) \leftrightarrow Q(t)$
$\gamma \leftrightarrow R$	$v = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow I = \frac{dQ}{dt}$
$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$	$F(t) \leftrightarrow \varepsilon(t)$

Polecam notebooki:

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/obwod_RLC_wersja_ostateczna_weak.nb

http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/obwod_RLC_wersja_ostateczna_strong.nb

Równania elektromagnetyzmu w próżni przed Maxwellem

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j}$$

Uwaga:

To są równania zapisane
w układzie SI !

W jednym z tych równań czegoś brakuje !

Do równania

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j}$$

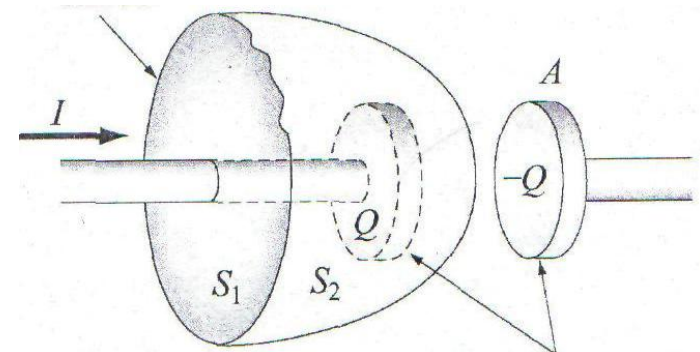
doszliśmy, startując z postaci całkowej $\oint_K \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

i zmieniając całkę krzywoliniową po konturze K na całkę po powierzchni S , która rozpięta jest na krzywej K .

Rozpatrzmy ładowanie kondensatora
Którą powierzchnię wybrać ?

Przez powierzchnię S_1 prąd płynie, a przez powierzchnię S_2 prąd nie płynie i mamy sprzeczność w wyrażeniu z całką !

kontur całkowania K



okładki kondensatora

Obrazek ze strony:

<http://indukcja.cba.pl/pradprzesu.php>

James Clerk Maxwell (1831-1879)



obrazek z Wikipedii

Jego największym osiągnięciem było podanie ostatecznej postaci równań rządzących zjawiskami elektromagnetycznymi. Równania te do dziś nazywamy równaniami Maxwella

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

„Tylko tyle” dodał sam Maxwell.
To tzw. gęstość prądu przesunięcia

Rotacja indukcji magnetycznej
dana jest przez wektor gęstości
prądu oraz zmianę w czasie
pola elektrycznego !

Komplet równań Maxwella w próżni

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Uwaga:

To są równania w układzie SI !

Uwagi:

(1) To są równania w postaci różniczkowej. Każdemu równaniu odpowiada równanie w postaci całkowej. Na przykład:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \leftrightarrow \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{wew}}{\epsilon_0} \quad \begin{array}{l} \text{prawo} \\ \text{Gaussa} \end{array}$$

(2) Równania dotyczą **dowolnego przypadku**, nie ograniczają się do elektrostatyki lub magnetostatyki ! Wektory \mathbf{E} i \mathbf{B} zależą nie tylko od punktu przestrzeni, ale **także od czasu**. W szczególności prawo Gaussa jest słuszne dla ładunków poruszających się z dowolną prędkością !

(3) Równania Maxwella zawierają w sobie równanie ciągłości wiążące wektor gęstości prądu oraz gęstość ładunku elektrycznego

(4) Z równań Maxwella wynika istnienie fal elektromagnetycznych

(5) Równania Maxwella są zgodne z STW

Równania Maxwella w materii

Równania Maxwella

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Równania Maxwella muszą być uzupełnione o równania materiałowe:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

Dla ośrodka liniowego wielkości μ i ε są stałe i nie zależą od punktu w przestrzeni.

Dla próżni należy zastąpić:

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$$

$$\mu \rightarrow \mu_0$$

Fale elektromagnetyczne

Punkt wyjścia: równania Maxwella (układ SI !)

Najpierw dla próżni

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

ϵ_0 – przenikalność dielektryczna próżni

μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni

ρ – gęstość objętościowa ładunku

\vec{J} - gęstość objętościowa prądu

$$\varepsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$

$$T \text{ (tesla)} = \frac{N}{Am}$$



jednostka indukcji magnetycznej

pole
elektryczne

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\vec{r}, t) \equiv \vec{E}(x, y, z, t) \\ &\equiv \left(E_x(x, y, z, t), E_y(x, y, z, t), E_z(x, y, z, t) \right)\end{aligned}$$

indukcja
magnetyczna

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}(\vec{r}, t) \equiv \vec{B}(x, y, z, t) \\ &\equiv \left(B_x(x, y, z, t), B_y(x, y, z, t), B_z(x, y, z, t) \right)\end{aligned}$$

Wektory pola elektrycznego i indukcji magnetycznej
zależą od czasu i punktu przestrzeni !

Zakładamy, że w przestrzeni nie ma ani ładunków, ani prądów

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Liczmy rotację obu stron ostatnich dwóch równań; rotacja zawiera pochodne po współrzędnych przestrzennych, więc możemy zmienić kolejność różniczkowania po t oraz po x, y i z

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Przypomnienie: rotacja dowolnego wektora to *wektor*

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &\equiv \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &\equiv \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Przypomnienie: dywergencja dowolnego wektora to *skalar*

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Pochodna po czasie dowolnego wektora to *wektor*

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial t}, \frac{\partial A_y}{\partial t}, \frac{\partial A_z}{\partial t} \right)$$

Dla dowolnego wektora mamy (rotacja z rotacji)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Dlatego

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \equiv \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Każda składowa pola elektrycznego i indukcji magnetycznej spełnia w próżni bez ładunków i prądów równanie falowe !

W dodatku *dokładnie*, bez żadnych przybliżeń !

Prędkość rozchodzenia się fali (fazowa)

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Powszechne oznaczenie to $v_p \equiv c \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$

c to jedna z podstawowych stałych przyrody !

Nikogo nie trzeba przekonywać o praktycznych zastosowaniach fal elektromagnetycznych:

- Radio
- TV
- Radar
- Laser
- Kuchenka mikrofalowa
- Telefonia komórkowa
- Internet bezprzewodowy
- GPS
- ...

Na następnym wykładzie omówimy pracę niejakiego Alberta Einsteina:

Zur Elektrodynamik bewegter Körper

(O elektrodynamice ciał w ruchu)

Annalen der Physik **17**, 891-921 (1905).

Z kolei na kolejnych wykładach zajmiemy się kwantową elektrodynamiką (QED).

To NIESTETY/NA SZCZĘŚCIE (niepotrzebne skreślić) ŻART
ale warto mieć świadomość, że równania Maxwella
„przeżyły” rewolucję zwaną Szczególną Teorią Względności
i są punktem wyjścia dla najdokładniejszej teorii fizycznej,
jaką jest QED.