

# Fizyka dla Informatyki Stosowanej

Jacek Golak  
Semestr zimowy 2024/2025

Wykład nr 13

## Co to jest właściwie fala ?

Fala to zaburzenie lub zmiana, która przemieszcza się w ośrodku. Ośrodek, w którym fala się przemieszcza może doznawać lokalnych zmian np. oscylacji, ale cząstki ośrodka nie wędrują razem z falą.

Zaburzenia mogą przyjmować bardzo różne formy, od impulsu o skończonej szerokości do nieskończenie długiej fali sinusoidalnej.

**Potrzebna jest matematyka, aby precyzyjnie opisywać fale !**

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\Delta u(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2}$$

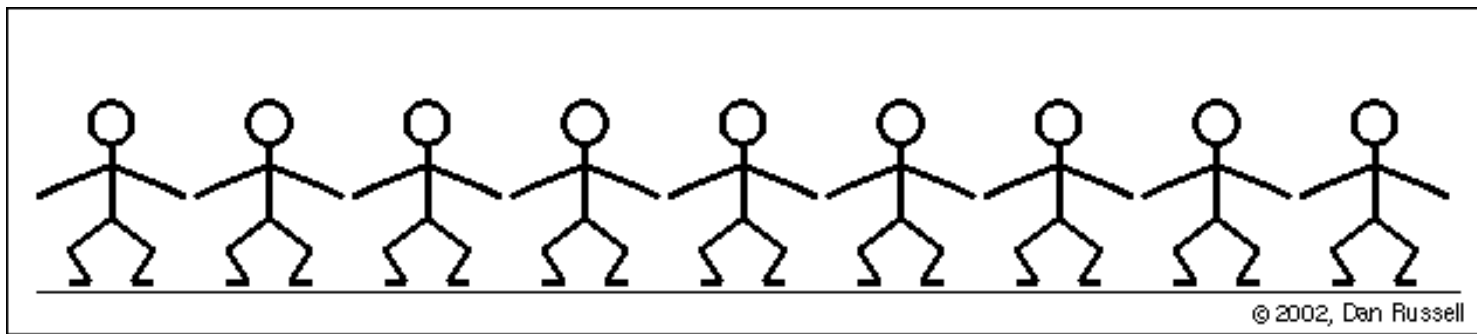
To podstawowe równanie falowe musi być odpowiednio zmodyfikowane, by opisać na przykład tłumienie fali

## Rodzaje fal:

- mechaniczne (rozchodzące się na naprężonym sznurze, na membranie, na wodzie, dźwiękowe, sejsmiczne,...)  
wymagają ośrodka, w którym się poruszają
- elektromagnetyczne (światłne, radiowe, radarowe,...)  
rozchodzą się nie tylko ośrodkiem materialnym, ale także w próżni
- fale materii (związane z każdą cząstką materialną)  
mechanika falowa = mechanika kwantowa

# Przykład 1

„Meksykańska fala”: Grupa ludzi podskakuje i siada z powrotem, ludzie siedzący blisko widzą to i też podskakują, a siedzący dalej naśladowują to zachowanie. Zaburzenie (podskakujący ludzie) wędruje wokół stadionu, ale żadna z osób nie zmienia swego miejsca na stadionie !



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

## Przykład 2

Podłużne fale dźwiękowe w powietrzu zachowują się podobnie. Kiedy przechodzi fala, cząstki powietrza oscylują wokół położeń równowagi, ale to zaburzenie wędruje (w postaci zagęszczonych rejonów), a nie indywidualne cząstki ośrodka.



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

## Przykład 3

W przypadku fali poprzecznej przemieszczenie cząstek ośrodka jest prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Animacja pokazuje falę biegnącą w prawo, a cząstki ośrodka poruszają się jedynie w górę i w dół wokół położenia równowagi.



Animation created by Mats Bengtsson

## Przykład 4

Poprzeczne fale na sznurze: sznur jest odkształcany w górę i w dół, kiedy fala przemieszcza się w prawo, ale sznur jako całość nie wykazuje żadnego wypadkowego ruchu. To jest pojedynczy impuls.



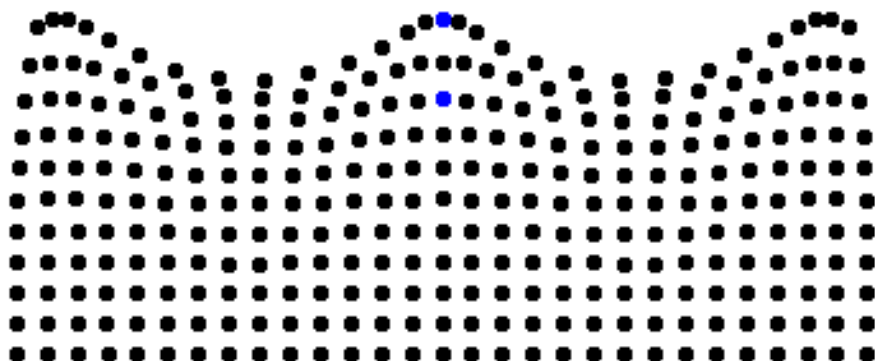
---

©2002, Dan Russell

animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

## Przykład 5

Fale na wodzie są przykładem fal, w których cząstki ośrodka wykonują kombinację ruchów podłużnego i poprzecznego. Kiedy fala wędruje przez wodę, cząsteczki ośrodka przemieszczają się po okręgach, zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Promień tych okręgów maleje wraz z głębokością. Fala przemieszcza się w prawo.



©1999, Daniel A. Russell

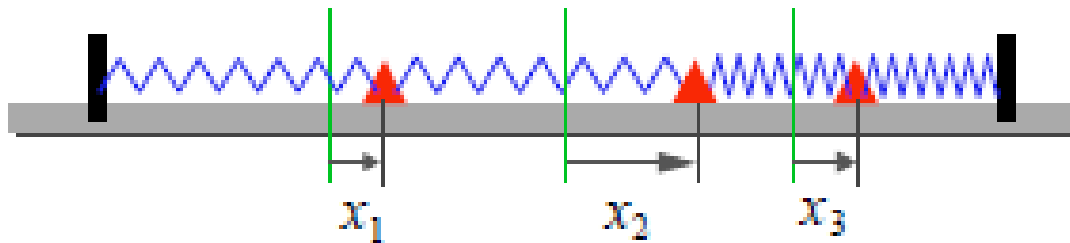
animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>



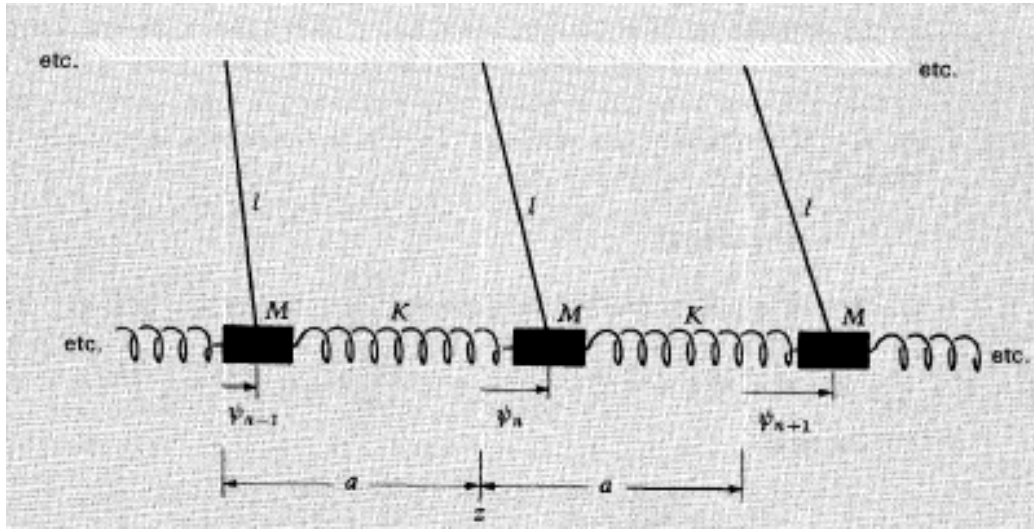
Jak przejść od drgań do fal ?



Potrzebujemy modelu sprzężenia między cząsteczkami ośrodka

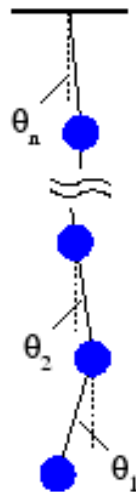


Przykład 1:  
masy i sprężyny

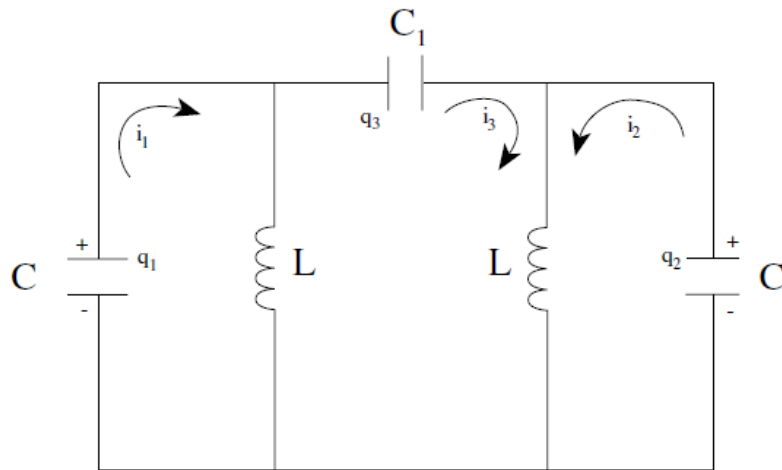


Ilustracja z książki F.C. Crawforda Waves

Przykład 2:  
wahadła  
sprzężone  
przy pomocy  
sprężyn



Przykład 3:  
wahadło  
wielokrotne  
(albo wiszący  
łańcuch)

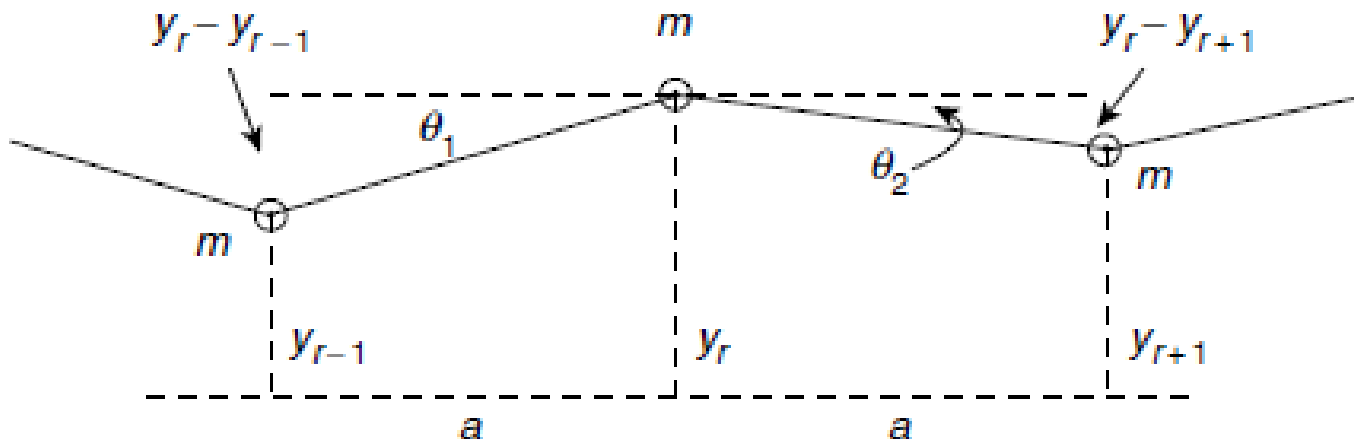


Przykład 4:  
 dwa  
 identyczne  
 obwody  
 drgające LC  
 sprzężone  
 przy pomocy  
 pojemności

$$\frac{q_1}{C} = L \frac{d}{dt} \left[ i_1 \left( 1 + \frac{C_1}{C} \right) - \frac{C_1}{C} i_2 \right]$$

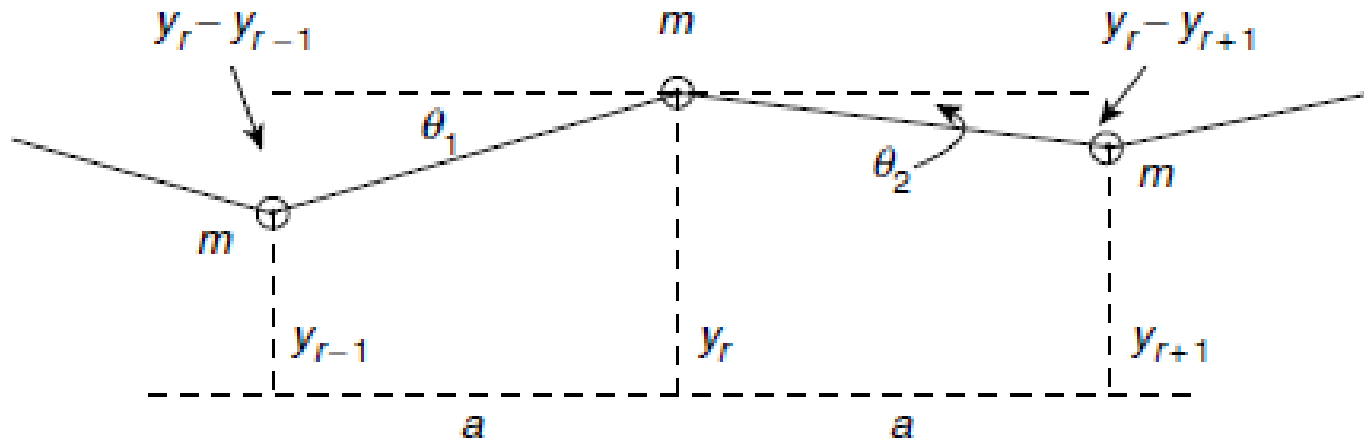
$$\frac{q_2}{C} = L \frac{d}{dt} \left[ i_2 \left( 1 + \frac{C_1}{C} \right) - \frac{C_1}{C} i_1 \right]$$

Przykład 5: drgania poprzeczne nieważkiej struny obciążonej punktowymi masami



Ilustracja z książki H.J. Paina The Physics of Vibrations and Waves

Jakie siły działają na masę  $r$  ?



Ilustracja z książki H.J. Paina *The Physics of Vibrations and Waves*

Masa  $r$  jest ciągnięta w dół w kierunku położenia równowagi przez siłę  $T\sin(\theta_1)$  (naprężenie z lewej strony) i przez siłę  $T\sin(\theta_2)$  (naprężenie z prawej strony).

Ponieważ

$$\sin \theta_1 = \frac{y_r - y_{r-1}}{a}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{y_r - y_{r+1}}{a}$$

równanie ruchu ma postać

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= -T (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \\ &= -T \left( \frac{y_r - y_{r-1}}{a} + \frac{y_r - y_{r+1}}{a} \right) \end{aligned}$$

i po uproszczeniu dostajemy

$$\frac{d^2 y_r}{dt^2} = \ddot{y}_r = \frac{T}{ma} (y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1})$$

Zapiszmy wyrażenie w nawiasie przy pomocy szeregu Taylora

$$f(x + \delta x) = f(x) + f'(x) \delta x + \frac{1}{2} f''(x) (\delta x)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T}{m} \left( \frac{y_{r+1} - y_r}{a} - \frac{y_r - y_{r-1}}{a} \right) \\ &= \frac{T}{m} \left( \frac{\delta x \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2} (\delta x)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\delta x} - \frac{\delta x \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2} (\delta x)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\delta x} \right) \end{aligned}$$

co daje

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{m} \frac{(\delta x)^2}{\delta x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{T}{m} \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Masy  $m$  były punktowe.

Teraz „rozsmarowujemy”  $m$  na odcinku  $\delta x$ ,  
wprowadzając gęstość liniową  $\rho = m/\delta x$   
(masa struny na jednostkę długości)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$T/\rho$  ma wymiar kwadratu prędkości  
→ oznaczenie:  $T/\rho = c^2 \equiv v^2$

Dostaliśmy **równanie falowe** na funkcję dwóch zmiennych  $y(t,x)$

*Prosta interpretacja rozwiązania równania falowego:*

$y(t,x)$  jest wychyleniem pionowym sznura w chwili  $t$  w punkcie o współrzędnej  $x$  !



## Równanie falowe dla jednowymiarowej (cienkiej) struny

$$-\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = 0$$

### Równanie różniczkowe

- (1) cząstkowe (bo na funkcję więcej niż jednej zmiennej)
- (2) II rzędu
- (3) liniowe (sumując proste rozwiązania budujemy inne rozwiązania)
- (4) jednorodne
- (5) posiada bardzo wiele różnego typu rozwiązań

Aby dostać jednoznaczne rozwiązanie, należy podać

(1) warunki początkowe

(a)  $u(x,t=0)$  - kształt struny w chwili  $t=0$

(b)  $\partial u(x,t=0)/\partial t$  - rozkład prędkości punktów struny w chwili  $t=0$

(2) warunki brzegowe – co dzieje się na końcach struny dla  $t > 0$  (na przykład czy struna jest swobodna lub sztywno umocowana)

Ze względu na (2) będziemy po kolei rozważać rozwiązania

- dla struny nieskończonej (cała prosta)
- dla strony ograniczonej z jednej strony (półprosta)
- dla struny o skończonej długości (odcinek)

Struna nieskończona

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Wzór d'Alemberta

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(a) da$$

## Dlaczego to jest właściwe rozwiązanie ? (twierdzenie o różniczkowaniu pod znakiem całki)

Jeżeli funkcja  $f(x, y)$  jest określona i ciągła w prostokącie  $[a, b] \times [c, d]$ , a krzywe

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad (c \leq y \leq d)$$

są ciągłe i nie wychodzą poza ten prostokąt oraz, że ma w nim ciągłą pochodną  $f'_y(x, y)$  i że istnieją pochodne  $\alpha'(y)$  i  $\beta'(y)$ , to całka

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx$$

będzie miała pochodną względem parametru, wyrażającą się wzorem

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) \, dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y) \quad (*)$$

## Sens składników we wzorze d'Alemberta

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\underbrace{\varphi(x + vt)}_{\text{Impuls poruszający się w lewo}} + \underbrace{\varphi(x - vt)}_{\text{Impuls poruszający się w prawo}}) + \underbrace{\frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(a) da}_{\text{Poprawka na początkowy rozkład prędkości punktów struny}}$$

Impuls  
poruszający  
się w lewo

Impuls  
poruszający się  
w prawo

Poprawka  
na początkowy  
rozkład prędkości  
punktów struny

Jeśli wszystkie punkty struny są w spoczynku dla  $t=0$ , to

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(a) da$$

Rozwiązanie jest sumą dwóch impulsów poruszających się w przeciwnych kierunkach !

Jak stworzyć pojedynczy impuls poruszający się w prawo lub w lewo ?  
Wziąć jeden kawałek !

Impuls biegnący w prawą stronę:

$$u(x, t) = \varphi(x - vt)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi'(x - vt)(-v)$$

$$\psi(x) \equiv \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = \varphi'(x)(-v)$$

Rozkład prędkości dla  $t=0$  jest już jednoznacznie wyznaczony !

Impuls biegnący w lewą stronę:

$$u(x, t) = \varphi(x + vt)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varphi'(x + vt)(v)$$

$$\psi(x) \equiv \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = \varphi'(x)(v)$$

Rozkład prędkości dla  $t=0$  jest już jednoznacznie wyznaczony !



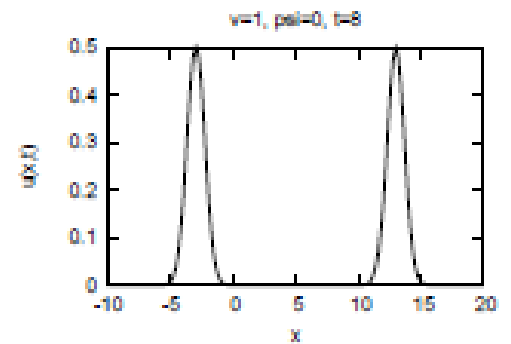
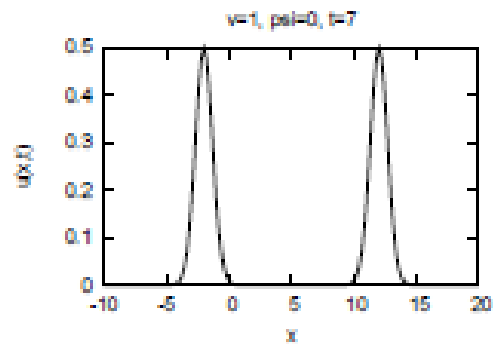
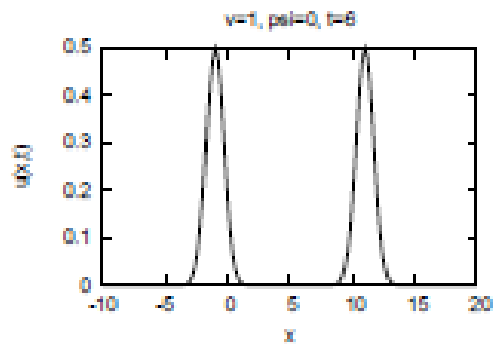
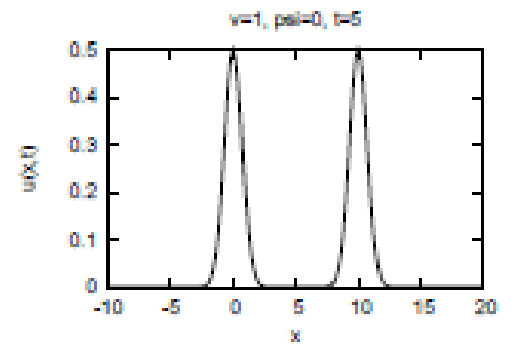
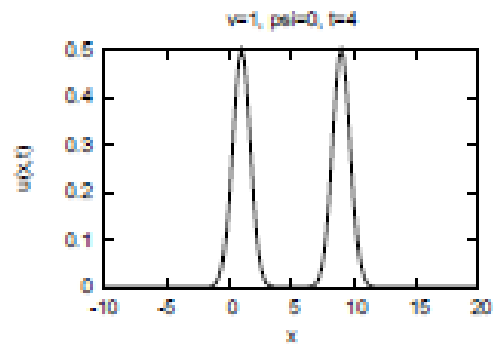
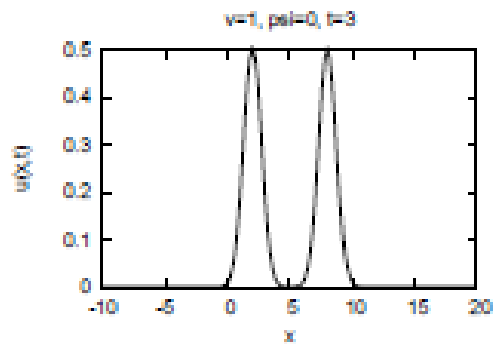
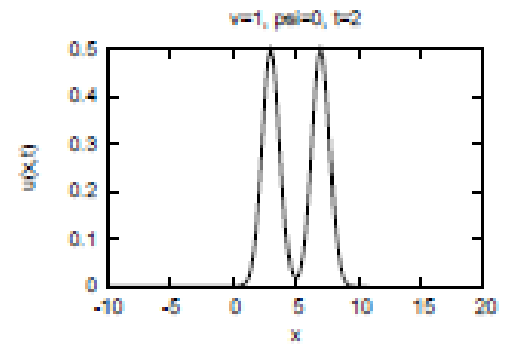
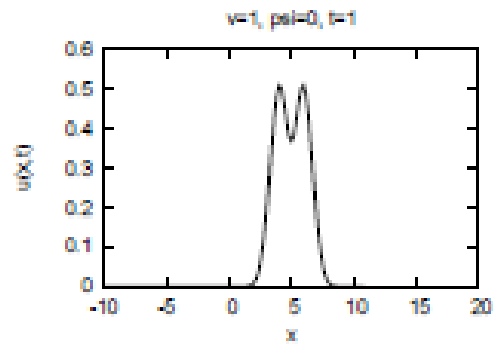
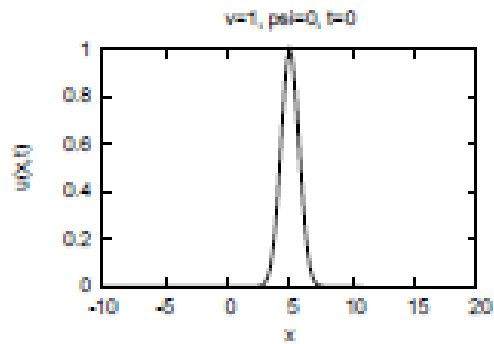
Przykłady dla

$$\nu = 1$$

$$\varphi(x) = \exp(-(x - 5)^2)$$

Impuls gaussowski

Impuls się rozdwaja, bo w chwili  $t=0$  punkty struny mają prędkość zero !



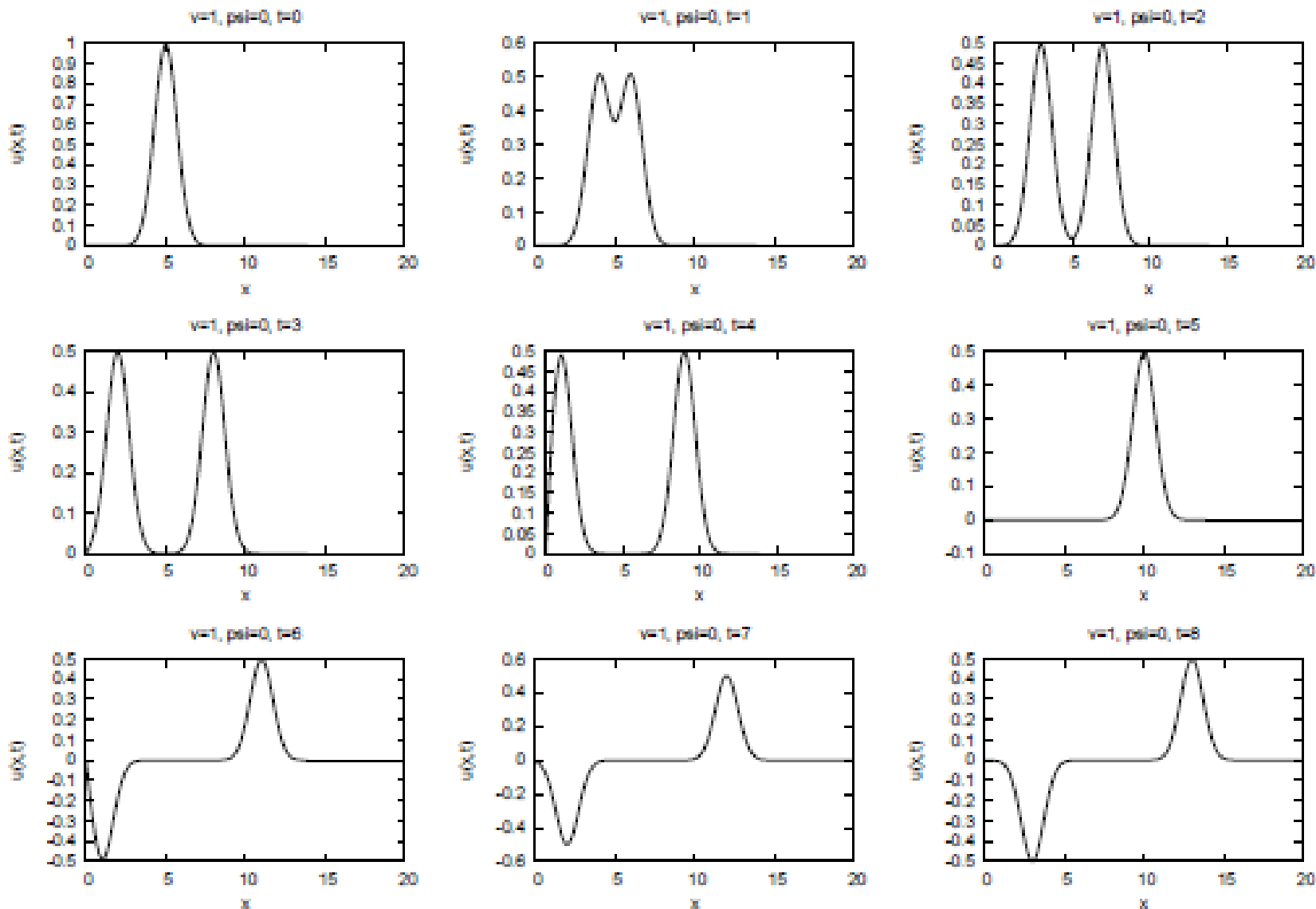
Struna ograniczona z jednej (lewej) strony:  $x \geq 0$

(a) struna sztywno umocowana w  $x=0$

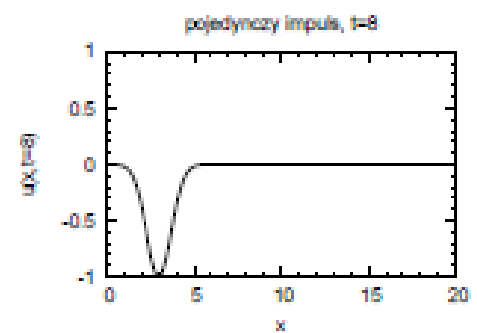
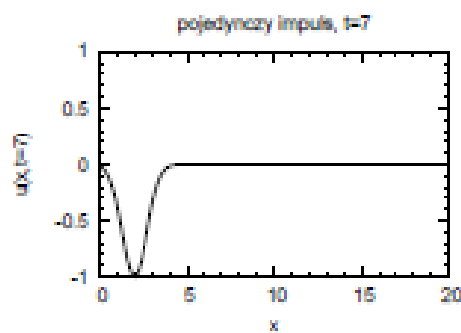
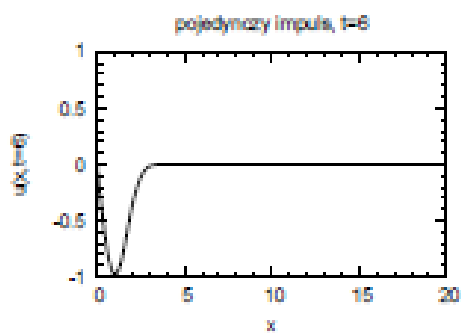
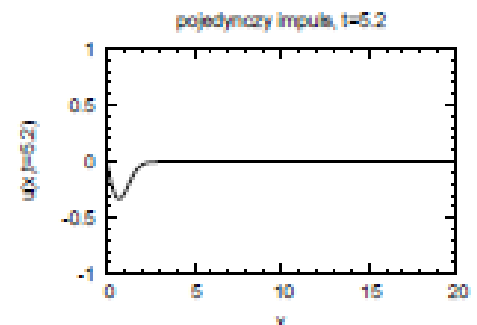
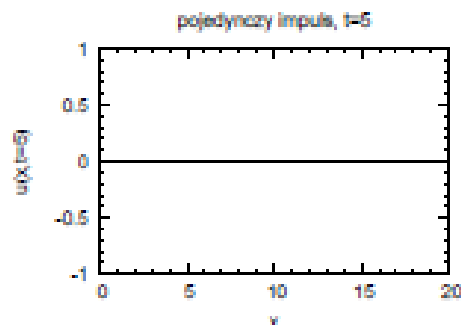
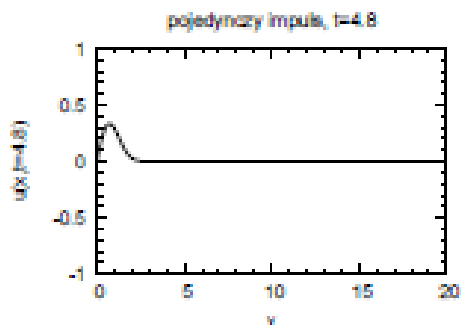
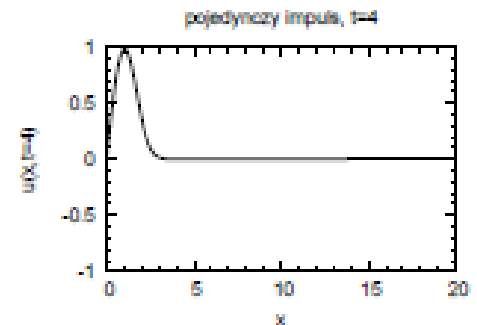
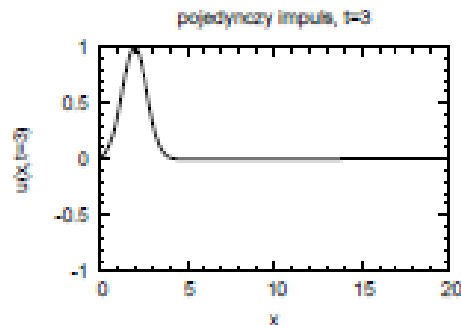
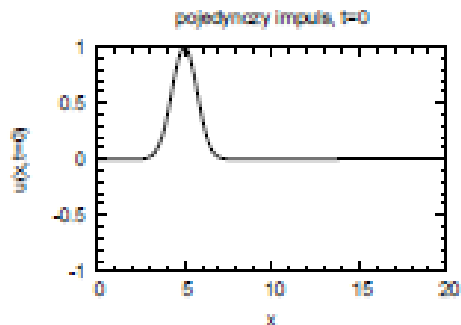
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t > 0 \\ u(x, t = 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \geq 0 \\ u(0, t > 0) &= 0, \end{aligned}$$

$$u(x, t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} (\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(a) da, & x \geq vt \\ \frac{1}{2} (\varphi(x + vt) - \varphi(-x + vt)) + \frac{1}{2v} \int_{-x+vt}^{x+vt} \psi(a) da, & x \leq vt \end{cases}$$

Taki sam impuls, jak dla przypadku struny nieograniczonej z obu stron



Impuls się nie rozdwaja, bo w chwili  $t=0$  punkty struny mają odpowiednio dobrany rozkład prędkości !





Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

(b) struna swobodna w  $x=0$

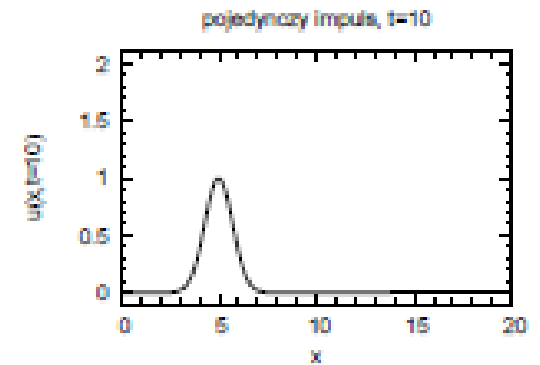
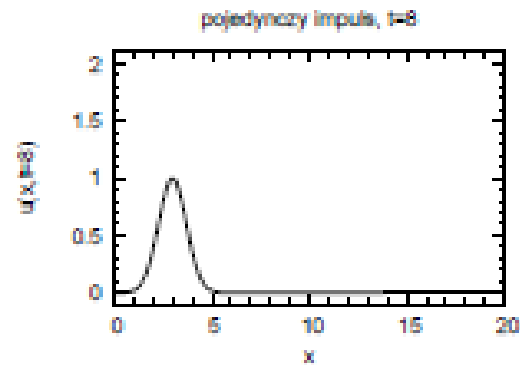
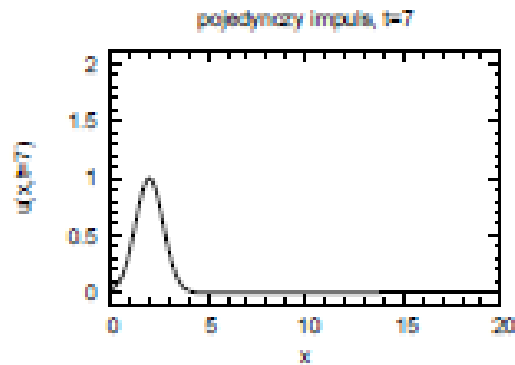
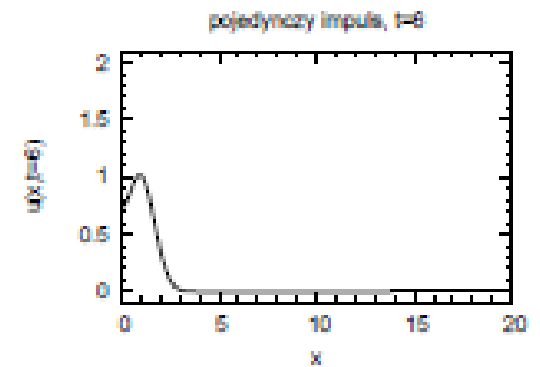
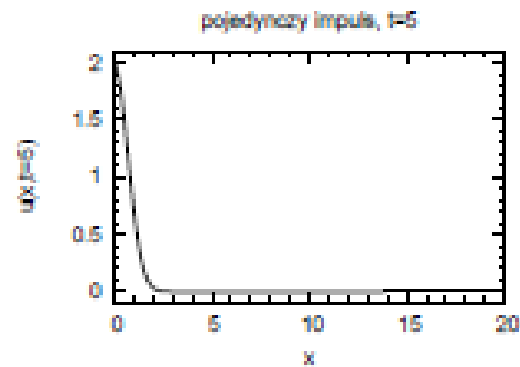
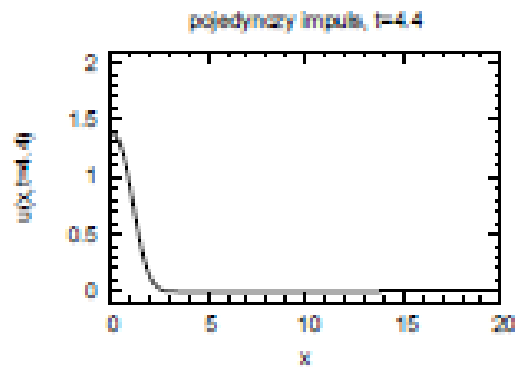
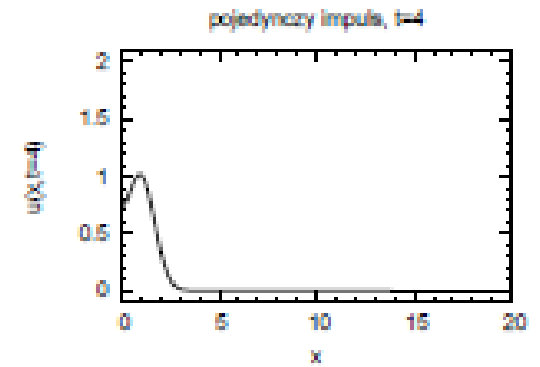
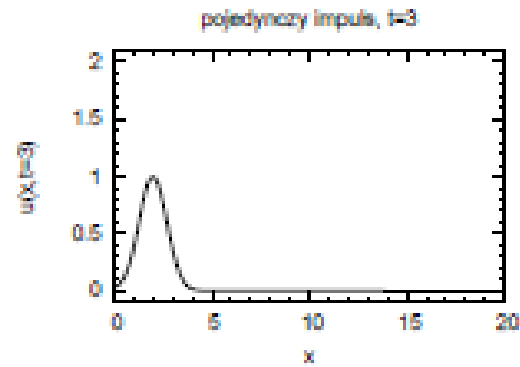
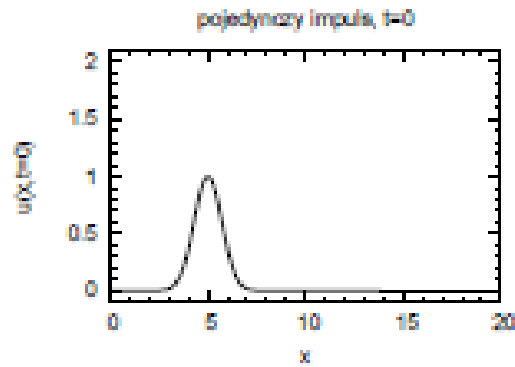
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t > 0$$

$$u(x, t = 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad t > 0$$

$$\frac{\partial u(x = 0, t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\varphi(x + vt) + \varphi(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(a) da, & x \geq vt \\ \frac{1}{2} (\varphi(x + vt) + \varphi(-x + vt)) + \frac{1}{v} \int_0^{-x+vt} \psi(a) da + \frac{1}{2v} \int_{-x+vt}^{x+vt} \psi(a) da, & x \leq vt \end{cases}$$

Taki sam pojedynczy impuls jak poprzednio, ale inne warunki dla odbicia







animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

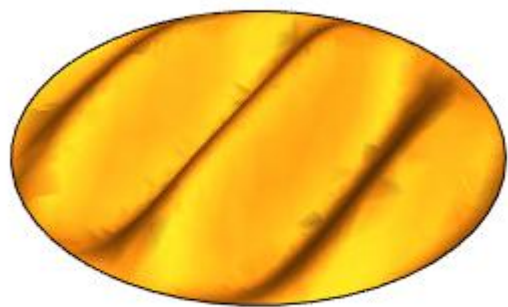
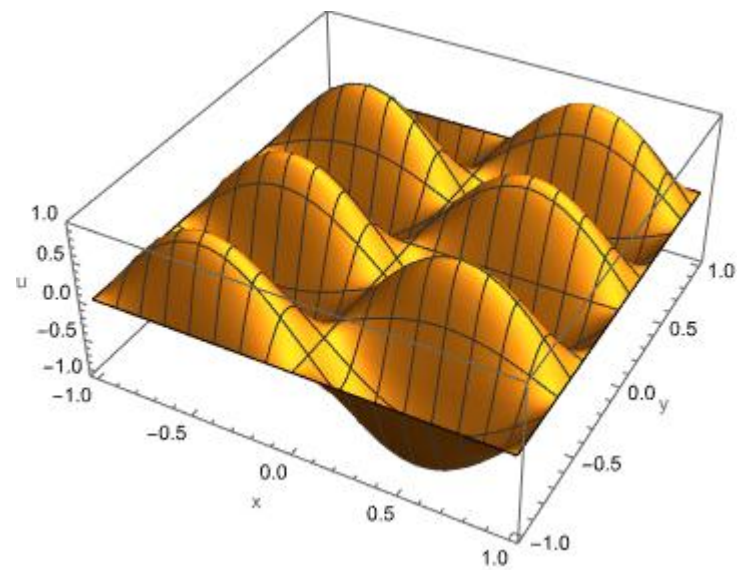
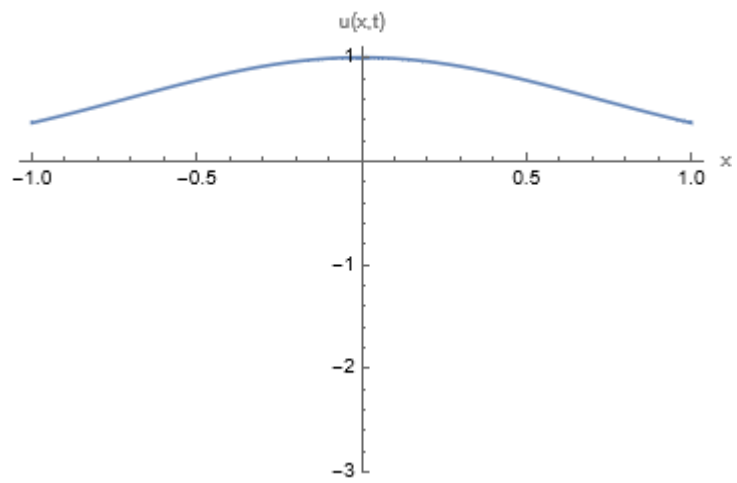
Polecam notebooki ze strony wykładu:

<http://users.uj.edu.pl/~golak/F24-25/>

[jednowymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_wb1.nb](#)  
[jednowymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_wb2.nb](#)

[jednowymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_wp1.nb](#)  
[jednowymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_wp2.nb](#)  
[jednowymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_wp3.nb](#)  
[jednowymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_wp4.nb](#)

[dwywymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_kwadrat.nb](#)  
[dwuwymiarowe\\_równanie\\_falowe\\_kolo.nb](#)



Do tej pory bawiliśmy się impulsami, ale przecież postać  $\phi(x)$  jest dowolna. Teraz rozważymy szczególnie ważny rodzaj fal  
→ *fale sinusoidalne*

$$u(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \phi],$$

czyli

$$\phi(x) = A \sin[kx + \phi]$$

Musi być stała  $k$ , bo nie może być  $\sin(1\text{metra})$

Równoważne formy:

$$u(x, t) = A \sin[k(x - vt) + \phi],$$

$$u(x, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \phi\right],$$

$$u(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right) + \phi\right],$$

$$u(x, t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \phi\right],$$

$$u(x, t) = A \sin[kx - \omega t + \phi],$$

Jeszcze inne formy:

$$u(x, t) = A \cos[k(x - vt) + \phi],$$

...,

$$u(x, t) = A \cos[kx - \omega t + \phi],$$

Wygodna w rachunkach postać zespolona

$$u(x, t) = A \exp i[kx - \omega t + \phi] =$$

$$u(x, t) = A(\cos[kx - \omega t + \phi] + i \sin[kx - \omega t + \phi])$$

## Sens różnych wielkości i ich powiązania

$v$  to prędkość fazowa fali,  $A$  to amplituda fali

Jeśli ustalimy  $x$ , to mamy okresową funkcję  $t$

Wtedy  $\omega$  jest częstością kołową powiązaną

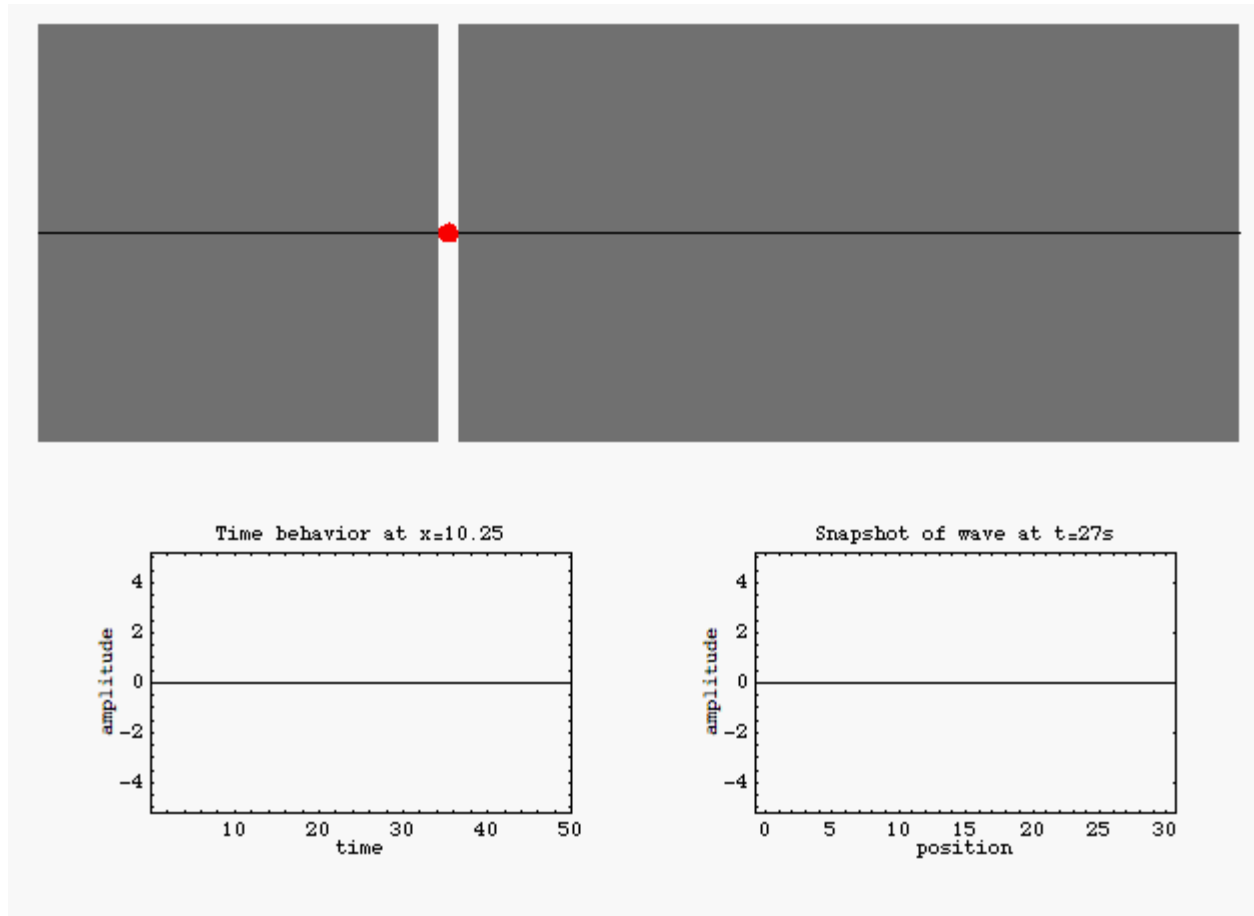
w zwykły sposób z okresem  $T$  i częstością  $f$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

Jeśli ustalimy  $t$ , to mamy okresową funkcję  $x$  z okresem  $\lambda$  (zwanym długością fali) powiązanym z liczbą falową  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT}$$

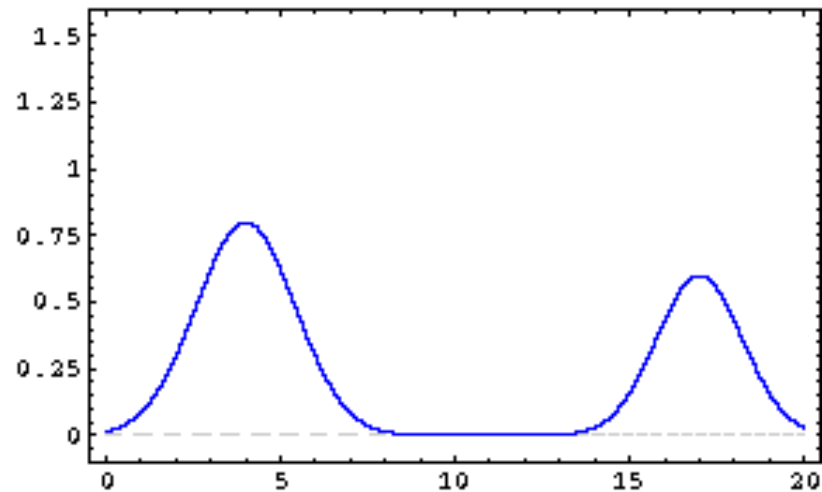
Aplet ma pomóc zrozumieć podwójną zależność  $u(x,t)$ ,  
od  $x$  i  $t$



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>



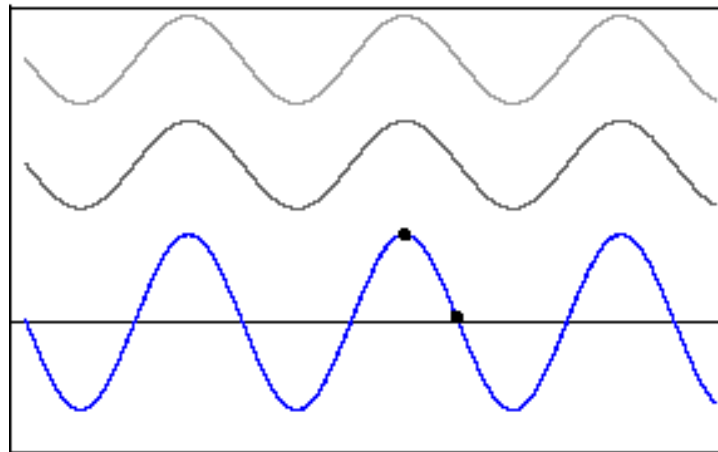
# Dodawanie impulsów falowych



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Dodawanie dwóch fal sinusoidalnych o tej samej częstotliwości, biegnących w tę samą stronę, ale przesuniętych w fazie

$$\begin{aligned}y(x, t) &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi) \\ &= 2y_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)\end{aligned}$$

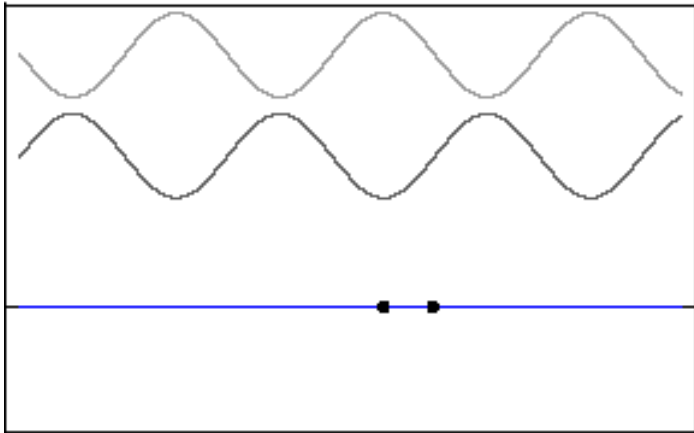


animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Dodawanie dwóch fal sinusoidalnych o tej samej częstotliwości, biegnących w przeciwne strony, bez przesunięcia w fazie

→ *fala stojąca* !

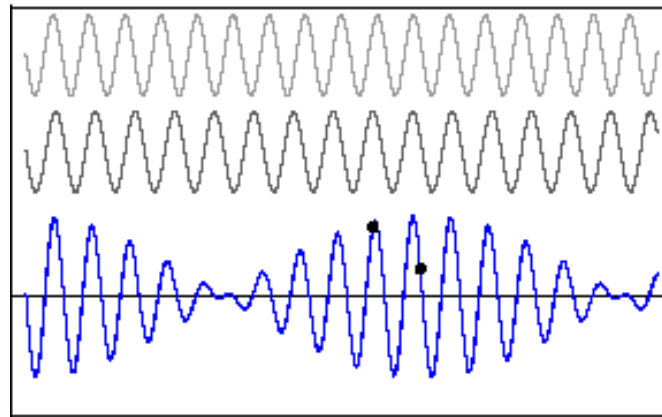
$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) \\ &= 2y_m \sin kx \cos \omega t \end{aligned}$$



Zależność  
czasowa i  
przestrzenna w  
formie osobnych  
czynników !

Dodawanie dwóch fal sinusoidalnych o różnych częstościach, biegnących w tę samą stronę, bez przesunięcia w fazie

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_m \sin(k_1 x - \omega_1 t) + y_m \sin(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2y_m \cos\left[\frac{(k_1 - k_2)}{2}x - \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t\right] \sin\left[\frac{(k_1 + k_2)}{2}x - \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t\right] \end{aligned}$$



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

## Fala i własności ośrodka

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{\text{sprężystość}}{\text{bezwładność}}}$$

**sprężystość**  $\leftrightarrow$  energia **potencjalna** struny

**bezwładność**  $\leftrightarrow$  energia **kinetyczna** struny

Co się dzieje, gdy zmieniają się własności ośrodka ?

Wprowadzamy nową wielkość

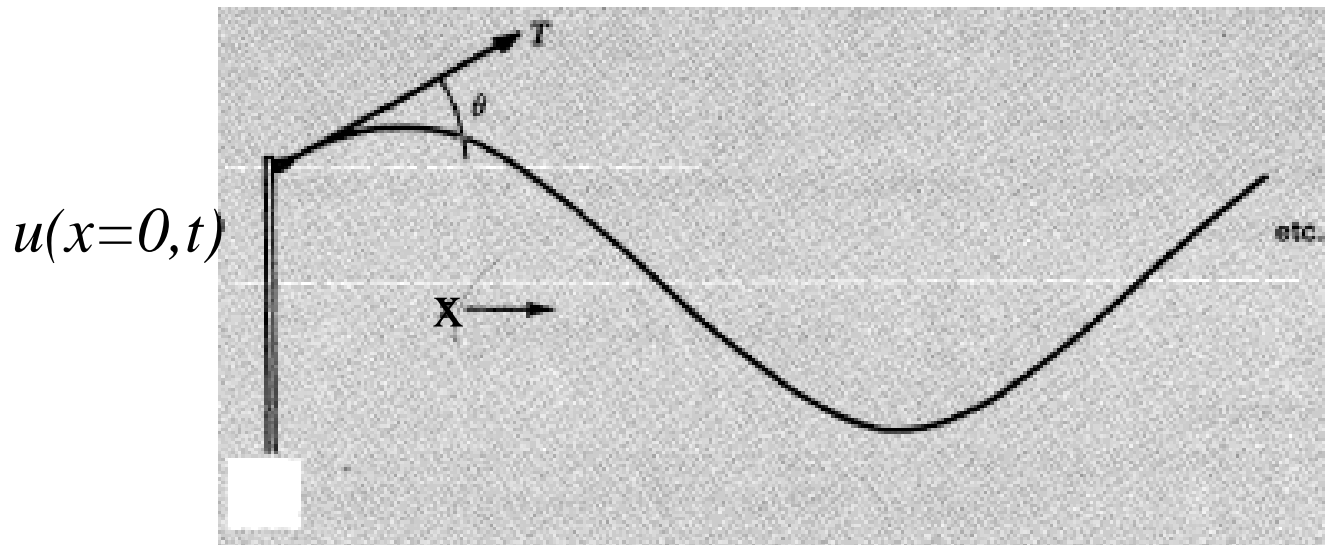
**Z** – impedancja charakterystyczna struny

Zakładamy, że generator drgań sinusoidalnych przyczepiony jest do lewego końca struny i emituje falę biegnącą w prawo

$$u(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$$

Poprzeczna składowa siły wywieranej przez strunę na wyjściowy element generatora

$$F_{\text{poprz}} = T \sin(\theta) \approx T \operatorname{tg}(\theta) = -T \frac{\partial u}{\partial x}$$



Ilustracja z książki F.C. Crawforda *Fale*

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t)$$

Dlatego  $F_{\text{poprz}}$  dana jest wzorem

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{T}{v} \frac{\partial u}{\partial t} \equiv Z \frac{\partial u}{\partial t},$$

poprzeczna  
składowa  
prędkości  
struny  
dla  $x=0$

gdzie

$$Z = \frac{T}{v} = \sqrt{T\rho} = \rho v \quad (\text{bo } v = \sqrt{\frac{T}{\rho}})$$



Generator emituje falę; struna przeciwstawia się temu z siłą proporcjonalną i przeciwnie skierowaną do nadawanej jej prędkości. Współczynnik proporcjonalności  $Z$  to impedancja charakterystyczna.

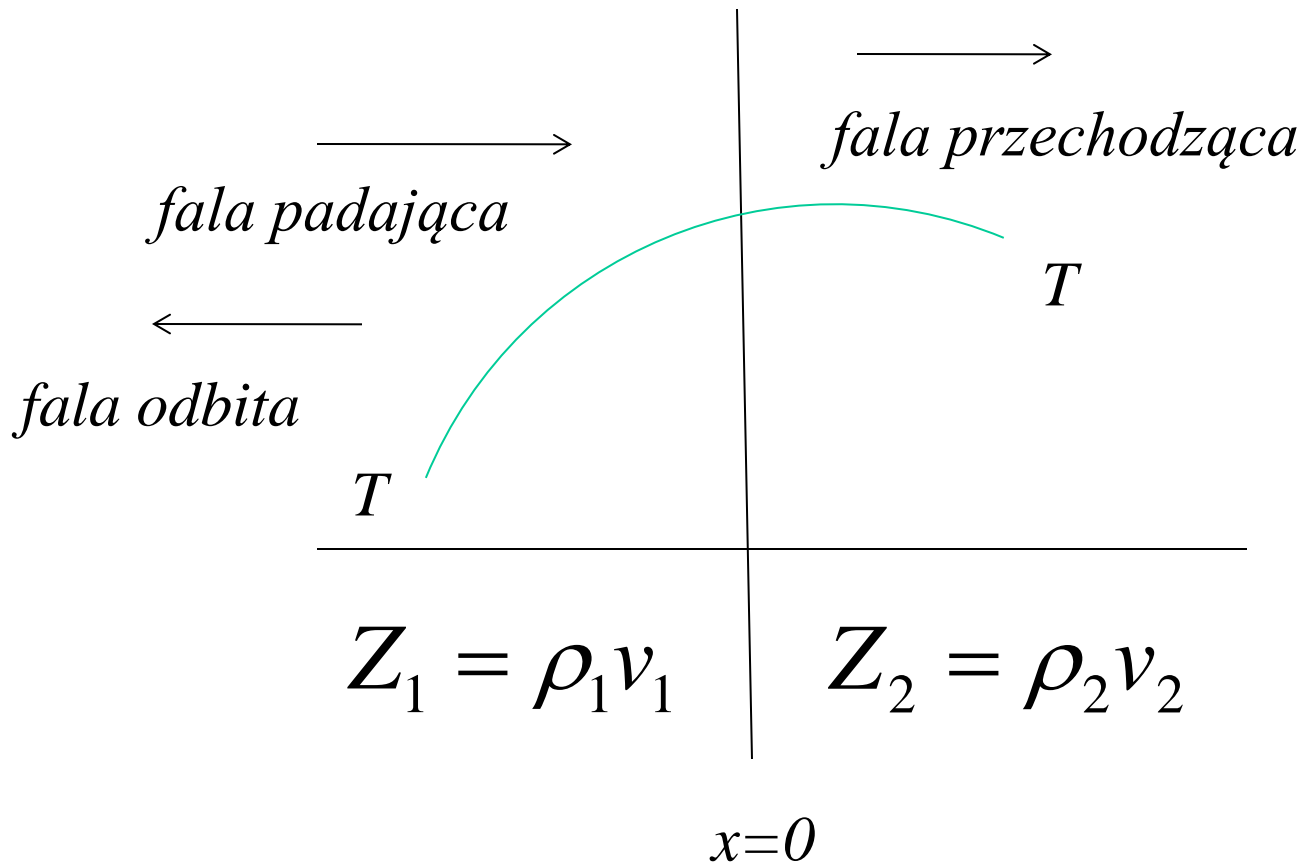
Rozumując jak dla oscylatora wymuszonego  $P(t)=F(t)v(t)$ :

Moc wyjściowa generatora w chwili  $t$   $P(t)$  to ogólnie

$$P(t) = F_{\text{poprz}} \frac{\partial u}{\partial t},$$

a dla fali biegnącej

$$P(t) = Z \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$



granica dwóch ośrodków  
 (u nas dwa kawałki struny o różnych gęstościach)

Uwagi:

(1) wybieramy  $x=0$ , bo najprostsze rachunki;  
generator trzeba odsunąć bardziej w lewo

(2) częstość się nie zmienia

$$u_{pad}(x, t) = A_1 \cos[(k_1 x - \omega t)]$$

$$u_{przech}(x, t) = A_2 \cos[(k_2 x - \omega t)]$$

$$u_{odb}(x, t) = A_3 \cos[(k_1 x + \omega t)]$$

Potrzebne tzw. warunki ciągłości

(1) funkcja  $u(x,t)$  jest ciągła w  $x=0$ , bo struna nie może być rozerwana

(2) składowa poprzeczna siły  $T(\partial u / \partial x)$  musi być ciągła w  $x=0$ ; inaczej różnica sił działająca na nieskończenie małą masę dawałaby nieskończone przyspieszenie

Te warunki prowadzą do współczynnika odbicia

$$(A_3 / A_1)$$

i współczynnika przejścia

$$(A_2 / A_1)$$

dla amplitud

```
In[1]:= (* liczymy współczynniki odbicia i przejścia dla fali na
strunie *)
```

```
In[2]:= upad[x_, t_] := A1 * Cos[(k1 * x - w * t)] ;
```

```
In[3]:= uprzech[x_, t_] := A2 * Cos[(k2 * x - w * t)] ;
```

```
In[4]:= uodb[x_, t_] := A3 * Cos[(k1 * x + w * t)] ;
```

```
In[5]:= l1 = upad[0, t] + uodb[0, t];
```

```
In[6]:= r1 = uprzech[0, t];
```

```
In[7]:= l2 = T * (D[upad[x, t] + uodb[x, t], x) /. x → 0;
```

```
In[8]:= r2 = T * D[uprzech[x, t], x] /. x → 0;
```

```
In[9]:= Solve[{l1 == r1, l2 == r2}, {A2, A3}]
```

```
Out[9]=  $\left\{ \left\{ A2 \rightarrow \frac{2 A1 k1}{k1 + k2}, A3 \rightarrow -\frac{-A1 k1 + A1 k2}{k1 + k2} \right\} \right\}$ 
```

notebook: *odbicie\_i\_przechodzenie\_fali\_na\_strunie\_real.nb*

Dostajemy więc

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

bo

$$k_i = \frac{\omega}{v_i} = \frac{\omega}{T} Z_i$$

Szczególne przypadki już znamy:

(1) Umocowany koniec sznura odpowiada  $Z_2 \rightarrow \infty$

$A_2 = 0$  (nic nie przechodzi do drugiego ośrodka)

$A_3/A_1 = -1$  (odbita fala zmienia fazę o  $\pi$ )

(2) Swobodny koniec sznura odpowiada  $Z_2 = 0$

$A_3/A_1 = 1$

$A_2/A_1 = 2$

(zwiększenie amplitudy fali

przy swobodnym końcu struny)

## Transport energii w strunie

Traktujemy każdą jednostkę długości struny jak oscylator, który ma energię

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

Fala wędruje z prędkością  $v$ , więc szybkość transportu energii to

$$\text{energia} \times v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v = \frac{1}{2}Z\omega^2 A^2$$

Cała energia docierająca do granicy ośrodków jest albo w odbitej, albo w przechodzącej fali



$$\frac{\text{energia odbita}}{\text{energia padająca}} = \frac{Z_1 A_3^2}{Z_1 A_1^2} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$\frac{\text{energia przechodząca}}{\text{energia padająca}} = \frac{Z_2 A_2^2}{Z_1 A_1^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Jeśli  $Z_1 = Z_2$ , to nie ma odbitej energii i mówimy, że *impedancje ośrodków są dopasowane*

Odbicie dla  $Z_2 \rightarrow \infty$



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Odbicie dla  $Z_2 = 0$



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Odbicie dla  $Z_1 < Z_2$  ( $v_1 > v_2$ )



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

Odbicie dla  $Z_1 > Z_2$  ( $v_1 < v_2$ )



animations courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University  
<http://paws.kettering.edu/~drussell/Demos.html>

## Dopasowanie impedancji (warstwa przeciwo odbiciowa)

Bardzo ważny problem w mechanice, akustyce i optyce !

Cały ośrodek (u nas struna) może być podzielony na trzy części

$$(1) \quad -\infty < x < 0 \quad (Z_1, k_1)$$

$$(2) \quad 0 < x < L \quad (Z_2, k_2)$$

$$(3) \quad L < x < +\infty \quad (Z_3, k_3)$$

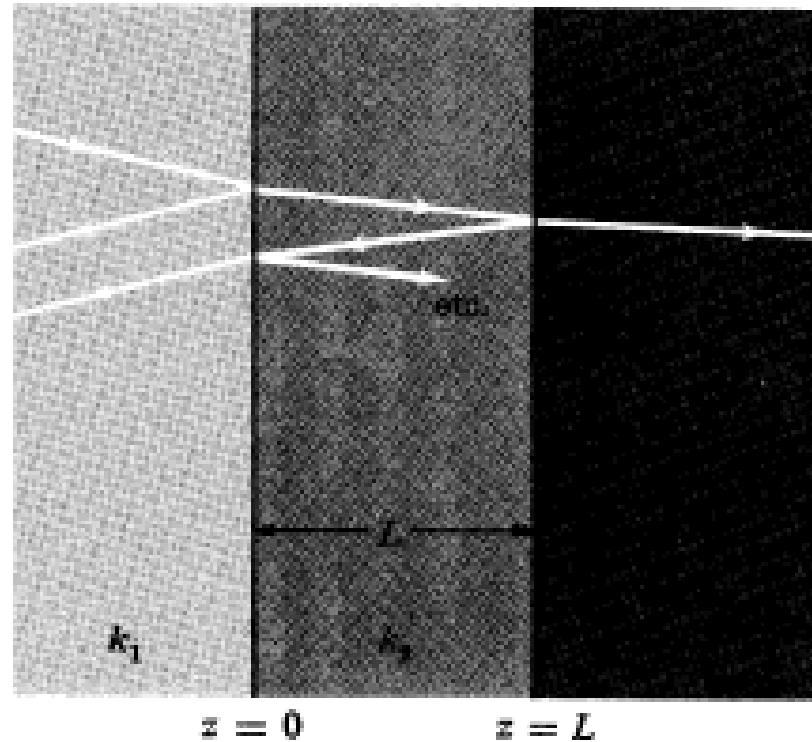
Jaka musi być impedancja  $Z_2$  i długość warstwy nr 2 ( $L$ ), by nie było odbicia i cała energia padającej fali wchodziła do ośrodka (3) ? Odpowiedzi szukamy dla *ustalonego*  $\omega$  !

Pomysł: fale odbite w  $x=0$  i w  $x=L$  powinny się znieść w ośrodku (1) dzięki interferencji destruktywnej.

Odpowiedź w przybliżeniu słabego odbicia:

$$Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3}$$

$$L = \frac{1}{4} \lambda_2 = \frac{\pi}{2k_2}$$



Ilustracja z książki F.C. Crawforda *Fale*

Podobne rozważania można przeprowadzić dla fal dźwiękowych i elektromagnetycznych.

Na przykład zachowanie się fali elektromagnetycznej na granicy dwóch ośrodków wynika z warunków ciągłości wyprowadzanych z równań Maxwella.