

# I PRACOWNIA FIZYCZNA



# I PRACOWNIA FIZYCZNA

redakcja naukowa

Andrzej Magiera

Wydanie drugie poprawione i uzupełnione

Instytut Fizyki  
Uniwersytet Jagielloński  
2010

© Copyright by Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 2010

All rights reserved

Wydanie trzecie poprawione i uzupełnione

Autorzy rozdziałów:

A. Budkowski: 1.2, 4.15

J. Czerwiec: 3.1

B. Dybiec: 4.8

B. Głowacz: 3.3

T. Jaworska-Gołąb: 1.2, 1.4, 2.5, 2.8, 3.1, 3.2, 4.3, 4.4, 4.15, A.2

A. Kapanowski: 1.1, 1.6, 1.7, 1.8, 1.11, 2.7, 2.6, 2.10, 2.11, 3.1, 3.4, 4.2, 4.5, 4.6

T. Kawalec: 2.9

M. Kleiner: 4.13

J. Kołodziej: 1.3

P. Korecki: 1.3, 4.1

R. Marcinek: 2.1, 3.1, 4.9

L. Muszyński: 1.9, 1.10

B. Pukowska: 4.3, 4.4, 4.7, 4.11, 4.16, A.4

R. Skibiński: 2.1

M. Stankiewicz: 4.1

B. Such: 1.5

M. Zawada: 2.2, 2.3, 2.4

M. Zimna-Starnawska: 1.3, 3.3, 3.5, 4.1, 4.7, 4.9, 4.10, 4.12, 4.14, A.1, A.3, A.4

Ilustracje - G. Domośławska, A. Kaczmarski, A. Magiera

Skład - A. Kaczmarski, A. Magiera

Okładka - A. Magiera

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Wojciech Łużny

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, Akademia Górniczo-Hutnicza

prof. dr hab. Władysław Waluś

Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński

Publikacja finansowana przez:

Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Rektorski Fundusz Rozwoju Dydaktyki „Ars Docendi”

# Spis treści

<b>Od Redaktora</b>	<b>7</b>
<b>1 Mechanika</b>	<b>9</b>
1.1 Wahadło anharmoniczne . . . . .	9
1.2 Badanie drgań tłumionych wahadła torsyjnego . . . . .	13
1.3 Drgania tłumione i wymuszone oscylatora harmonicznego . . . . .	21
1.4 Badanie drgań wahadeł sprzężonych . . . . .	29
1.5 Badanie drgań modelu cząsteczki czteroatomowej . . . . .	35
1.6 Badanie ruchu obrotowego bryły sztywnej . . . . .	45
1.7 Badanie ruchu precesyjnego żyroskopu . . . . .	50
1.8 Wiskozymetr rotacyjny . . . . .	53
1.9 Pomiar współczynnika lepkości cieczy metodą Stokesa . . . . .	59
1.10 Pomiar współczynnika lepkości cieczy metodą Poiseuille'a . . . . .	62
1.11 Wyznaczanie modułu sztywności prętów metodą dynamiczną . . . . .	66
<b>2 Ciepło</b>	<b>71</b>
2.1 Cechowanie termopary i termistora . . . . .	71
2.2 Wyznaczanie ciepła topnienia lodu . . . . .	75
2.3 Wyznaczanie ciepła parowania wody . . . . .	79
2.4 Wyznaczanie ciepła właściwego ciał stałych . . . . .	81
2.5 Wyznaczanie ciepła właściwego cieczy metodą ostygnięcia . . . . .	83
2.6 Wyznaczanie współczynnika napięcia powierzchniowego cieczy . . . . .	86
2.7 Równanie stanu gazu doskonałego . . . . .	90
2.8 Pomiar stosunku $C_p/C_V$ metodą Clémenta-Désormes'a . . . . .	95
2.9 Badanie zależności temperatury wrzenia wody od ciśnienia . . . . .	101
2.10 Badanie przewodnictwa cieplnego izolatorów . . . . .	105
2.11 Gaz klockowy . . . . .	109
<b>3 Elektryczność</b>	<b>115</b>
3.1 Temperaturowa zależność oporu przewodników . . . . .	115
3.2 Wyznaczanie pojemności kondensatora metodą rozładowania . . . . .	125
3.3 Wyznaczanie współczynnika Halla . . . . .	130
3.4 Badanie charakterystyk tranzystora . . . . .	137

---

3.5	Wyznaczanie stosunku $e/m$ . . . . .	142
<b>4</b>	<b>Fale</b> . . . . .	<b>149</b>
4.1	Obsługa oscyloskopu . . . . .	149
4.2	Analiza fourierowska . . . . .	164
4.3	Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu metodą fali biegnącej . . . . .	169
4.4	Wyznaczanie prędkości dźwięku w cieczach metodą fali biegnącej . . . . .	174
4.5	Zjawisko Dopplera w powietrzu . . . . .	177
4.6	Pomiar prędkości dźwięku w cieczy w oparciu o zjawisko Dopplera . . . . .	179
4.7	Pomiar prędkości dźwięku w metalach metodą echa ultradźwiękowego . . . . .	181
4.8	Wyznaczanie ogniskowych soczewek i badanie wad soczewek . . . . .	186
4.9	Badanie stanu polaryzacji światła . . . . .	194
4.10	Skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła w cieczach . . . . .	202
4.11	Badanie widm emisyjnych za pomocą spektroskopu przyzmatycznego . . . . .	206
4.12	Badanie zjawiska dyfrakcji i interferencji światła laserowego . . . . .	211
4.13	Pomiar długości fali świetlnej z wykorzystaniem pierścieni Newtona . . . . .	226
4.14	Pomiar długości fali świetlnej za pomocą siatki dyfrakcyjnej . . . . .	230
4.15	Badanie dyfrakcji światła laserowego na kryształach koloidalnym . . . . .	235
4.16	Pomiar prędkości dźwięku w cieczy metodą optyczną . . . . .	242
<b>A</b>	<b>Uzupełnienia</b> . . . . .	<b>247</b>
A.1	Analiza niepewności pomiarowych . . . . .	247
A.2	Jak prowadzić zeszyt laboratoryjny . . . . .	255
A.3	Zasada działania noniusza . . . . .	256
A.4	Lasery . . . . .	257
A.5	Przydatne tablice i widma spektralne . . . . .	261
	<b>Spis literatury</b> . . . . .	<b>265</b>

# Od Redaktora

Książka przygotowana została dla potrzeb studentów wykonujących ćwiczenia na I Pracowni Fizycznej. Zebrane w niej opisy eksperymentów powstały w wyniku wieloletniej pracy wielu asystentów prowadzących te ćwiczenia w Instytucie Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Dzięki temu autorzy poszczególnych rozdziałów korzystali z bardzo bogatego doświadczenia dydaktycznego, zarówno swojego jak i kolegów prowadzących wcześniej te zajęcia.

Pierwsze wydanie tej książki ukazało się w 2006 roku. W praktyce okazało się, że książka ta stanowi doskonałą pomoc zarówno dla asystentów w prowadzeniu zajęć, jak i dla studentów wykonujących ćwiczenia na I Pracowni Fizycznej. Wydanie drugie zostało uzupełnione o opis jednego ćwiczenia. Obecne wydanie trzecie uzupełnione zostało o opis kilku nowych ćwiczeń, które ostatnio zostały wprowadzone na pracownię. Na podstawie uwag zebranych od prowadzących zajęcia i studentów wprowadzone zostały także poprawki. Były to zarówno korekty literówek jak i merytoryczne zmiany dotyczące szczególnie metod opracowywania wyników niektórych pomiarów.

Zajęcia na I Pracowni Fizycznej prowadzone są dla studentów kilku kierunków: fizyki, inżynierii materiałowej, chemii, biologii, biofizyki, ochrony środowiska, biotechnologii oraz Studiów Matematyczno-Przyrodniczych. Program nauczania fizyki i matematyki na tych różnych kierunkach jest bardzo zróżnicowany. Dlatego celem wszystkich autorów było opracowanie podręcznika, który uwzględni różny poziom przygotowania studentów poszczególnych kierunków z fizyki oraz matematyki.

Opis każdego ćwiczenia zawiera wprowadzenie teoretyczne, zawierające podstawy fizyczne konieczne do zrozumienia zagadnień związanych z wykonywanym pomiarem. Podany jest spis zagadnień, których znajomość jest wymagana przed przystąpieniem do wykonywania pomiarów. Te podstawowe wiadomości studenci powinni starać się uzupełnić korzystając z dodatkowej literatury, której spis podany jest przy każdym ćwiczeniu. Każdy eksperyment wymaga użycia specyficznej aparatury, która opisana jest szczegółowo dla wszystkich ćwiczeń. Wszyscy studenci powinni jednak wcześniej zapoznać się z wykorzystywaną aparaturą, co na pewno usprawni późniejsze wykonywanie doświadczenia. Każdy rozdział zawiera opis przebiegu prowadzonych pomiarów. Na jego podstawie studenci powinni przygotować szczegółowy plan pracy, uwzględniając ograniczony czas dostępny do wykonywania pomiarów. Wyniki otrzymane w eksperymentach powinny zostać opracowane, co polega na podaniu ostatecznych wielkości wyznaczanych w każdym ćwiczeniu. Każdy rozdział zawiera opis metody, którą należy

zastosować przy opracowywaniu wyników pomiarów. W opracowaniu wyników należy zwrócić uwagę na wyznaczenie niepewności pomiarowych mierzonych wielkości. W tym celu konieczne jest zapoznanie się, z opisanymi w uzupełnieniu, metodami analizy niepewności pomiarowych.

Mam nadzieję, że książka ta ułatwi studentom zrozumienie zagadnień fizycznych badanych w poszczególnych eksperymentach oraz przyczyni się do sprawnego wykonywania tych doświadczeń oraz ich analizy. Chciałbym także aby książka była pomocna dla wszystkich asystentów umożliwiając sprawniejsze prowadzenie zajęć.

Dotychczas sprzedane zostało 1200 egzemplarzy książki z pierwszego i drugiego wydania. Obecne trzecie wydanie pojawia się tylko w wersji elektronicznej. Powinno to ułatwić dostęp do książki studentom i asystentom nie tylko z Uniwersytetu Jagiellońskiego, ale także z innych uczelni. Dodatkową zaletą wersji elektronicznej jest możliwość łatwego wprowadzania zmian związanych z modernizacją istniejących zestawów eksperymentalnych, jak również z uruchamianiem nowych ćwiczeń na naszej I Pracowni Fizycznej.



# 1 Mechanika

## 1.1 Wahadło anharmoniczne

Celem ćwiczenia jest zbadanie drgań anharmonicznych wahadła fizycznego (zależność okresu drgań wahadła od amplitudy jego drgań, bilans energetyczny wahadła).

Zagadnienia do przygotowania:

- oscylator harmoniczny;
- wahadło fizyczne;
- oscylator anharmoniczny;
- wykresy fazowe.

Literatura podstawowa: [1], [2], [5], [4].

### 1.1.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne to bryła, która może obracać się wokół osi  $O$  nie przechodzącej przez środek ciężkości  $CM$  (rysunek 1.1.1). Niech kąt  $\theta$  oznacza wychylenie z położenia równowagi. Moment siły  $N$  działający na wahadło, pochodzący od siły ciężkości, wyraża się wzorem:

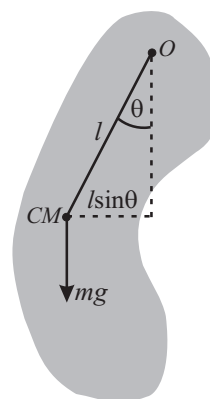
$$N = -mgl \sin \theta, \quad (1.1.1)$$

gdzie  $m$  to masa wahadła,  $l$  odległość środka ciężkości od punktu podparcia, czyli od osi obrotu. Równanie ruchu wahadła ma postać:

$$N = J\ddot{\theta}, \quad (1.1.2)$$

gdzie  $J$  jest momentem bezwładności względem osi obrotu. Wprowadzając oznaczenie  $\omega_0^2 = mgl/J$  można równanie ruchu zapisać w postaci:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (1.1.3)$$



Rys. 1.1.1: Wahadło fizyczne.

### Przybliżenie oscylatora harmonicznego

Dla małych wychyleń możemy zrobić przybliżenie  $\sin \theta \approx \theta$ . Wtedy równanie (1.1.3) sprowadza się do równania ruchu oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (1.1.4)$$

Rozwiązaniem równania (1.1.4) jest funkcja postaci:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad (1.1.5)$$

gdzie  $\theta_0$  to amplituda, a  $\phi_0$  faza początkowa.

### Okres drgań wahadła fizycznego

Ruch opisany funkcją (1.1.5) jest okresowy z okresem  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Dla pewnych warunków początkowych ruch opisany równaniem (1.1.3) jest również okresowy. Aby obliczyć okres drgań  $T$  mnożymy równanie (1.1.3) przez  $\dot{\theta}$  i po separacji zmiennych całkujemy obustronnie uwzględniając warunek  $\dot{\theta} = 0$  dla  $\theta = \theta_0$ . Otrzymujemy wtedy równanie ruchu:

$$\dot{\theta}^2 - 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) = 0. \quad (1.1.6)$$

Przy przejściu wahadła od kąta 0 do  $\theta_0$  upływa czas równy  $T/4$ . Więc rozdzielając zmienne i całkując równanie (1.1.6) po czasie w granicach  $(0, T/4)$  oraz po kącie w granicach  $(0, \theta_0)$  otrzymujemy:

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}}. \quad (1.1.7)$$

W całce z równania (1.1.7) wykonujemy zamianę zmiennych z  $\theta$  na  $\alpha$  poprzez podstawienie  $\sin \alpha = \sin(\theta/2) / \sin(\theta_0/2)$ . Otrzymujemy całkę eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju:

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \alpha}}. \quad (1.1.8)$$

Całkę eliptyczną można wyrazić przez funkcję hipergeometryczną  ${}_2F_1$  lub jej rozwinięcie w szereg. Wtedy okres drgań wynosi:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \cdot {}_2F_1 \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right] = \\ &= T_0 \left[ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left( \frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

W przybliżeniu małych wychyleń otrzymujemy okres drgań:

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 - \dots \right]. \quad (1.1.10)$$

### Przybliżenie oscylatora anharmonicznego

Dla większych wychyleń musimy uwzględnić kolejne wyrazy rozwinięcia w szereg funkcji  $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$ . Wtedy równanie (1.1.3) sprowadza się do równania ruchu oscylatora anharmonicznego:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2 \theta^3}{6} = 0. \quad (1.1.11)$$

Można znaleźć przybliżone rozwiązanie tego równania w postaci [4]:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \frac{\theta_0^3}{192} \sin(3\omega t), \quad (1.1.12)$$

gdzie  $\omega \approx \omega_0 (1 - \theta_0^2/16)$ .

### Wykresy fazowe

Ruch wahadła fizycznego (i innych układów mechanicznych) można wygodnie przedstawić na płaszczyźnie fazowej  $(\theta, \dot{\theta})$  [4]. Korzystając z równania (1.1.6) możemy zapisać energię mechaniczną wahadła fizycznego (energia potencjalna określona względem najniższego położenia wahadła):

$$E = \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta_0). \quad (1.1.13)$$

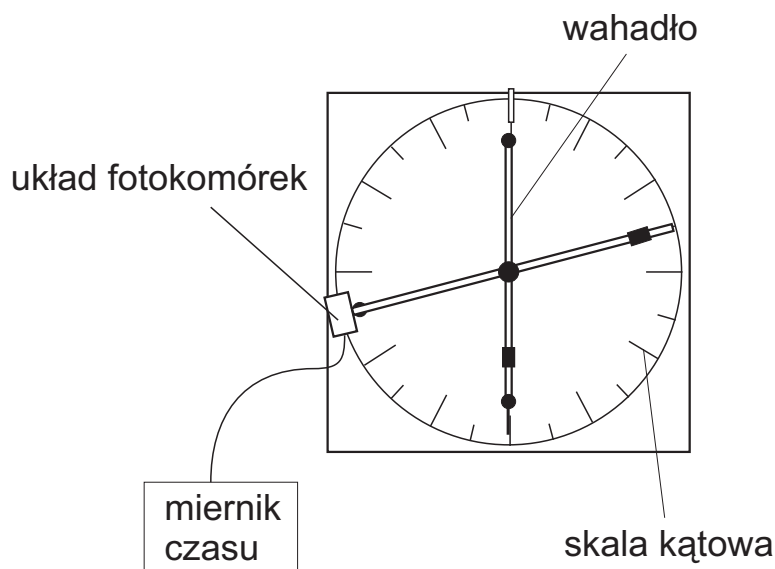
Różnym wartościom energii  $E$  odpowiada rodzina krzywych na płaszczyźnie fazowej. Jeżeli  $E = 0$ , to wahadło pozostaje w spoczynku. Odpowiada temu punkt  $(0, 0)$  na płaszczyźnie fazowej. Dla  $0 < E < 2mgl$  otrzymujemy krzywe zamknięte otaczające punkt  $(0, 0)$ , a ruch jest periodyczny względem położenia równowagi. Dla  $E > 2mgl$  mamy krzywe otwarte, a ruch odbywa się tylko w jednym kierunku.

Przy rysowaniu krzywych wygodnie jest wprowadzić bezwymiarową energię  $\epsilon = 2E/(J\omega_0^2)$  i prędkość  $v = \dot{\theta}/\omega_0$ . Wtedy na płaszczyźnie  $(\theta, v)$  rysujemy krzywe  $v^2 = \epsilon - 4 \sin^2(\theta/2)$ . Ruch periodyczny mamy dla  $0 < \epsilon < 4$ .

#### 1.1.2 Przebieg pomiarów

##### Układ doświadczalny

Przyrządy: wahadło fizyczne ze skalą kątową, miernik czasu z układem fotokomórek (schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rysunku 1.1.2).



Rys. 1.1.2: Schemat układu do badania drgań anharmonicznych.

### Badanie zależności okresu od amplitudy

Zmierzyć okres drgań wahadła  $T$  w zależności od amplitudy  $\theta_0$  przy stałym położeniu fotokomórki, np. w najniższym położeniu wahadła.

### Sprawdzanie bilansu energetycznego

Fotokomórkę umieścić w najniższym położeniu wahadła. Zmierzyć prędkość  $\dot{\theta}$  w zależności od kąta początkowego  $\theta_0$ . W tej serii pomiarów ze wzrostem kąta początkowego ustalamy coraz większą całkowitą energię mechaniczną układu. Prędkość w całym doświadczeniu obliczać jako odwrotność czasu przelotu pomiędzy bramkami. Przyjąć umowne jednostki prędkości, ponieważ jest to wystarczające do naszych rozważań. Ponadto unika się kłopotliwego pomiaru odległości kątowej pomiędzy bramkami.

W następnej serii pomiarów wahadło wprawić w ruch za każdym razem z ustalonego położenia początkowego  $\theta_0$ . W ten sposób układ ma za każdym razem tę samą całkowitą energię mechaniczną. Zmierzyć prędkość  $\dot{\theta}$  w funkcji kąta  $\theta_1$  pod jakim umieszczona jest fotokomórka. Wahadło nie może być w ruchu dłużej niż przez czas połowy jednego drgania, aby wpływ tarcia był minimalny.

### Badanie dyssypacji energii

Wahadło wprawić w ruch z ustalonego położenia początkowego  $\theta_0$ . Zmierzyć prędkość  $\dot{\theta}$  w zależności od kąta  $\theta_1$ , w którym umieszczona jest fotokomórka. Tym razem notować prędkości w obu kierunkach i na przestrzeni kilku okresów.

### 1.1.3 Opracowanie wyników

#### Zależność okresu od amplitudy

Narysować wykres zależności  $T$  od  $\theta_0^2$  dla danych doświadczalnych i dopasować prostą  $T = a\theta_0^2 + b$  (wykorzystać tylko punkty z przedziału od 0 do 1 rad<sup>2</sup>). Parametry otrzymane z dopasowania porównać z przewidywaniami równania (1.1.10). Parametr  $b = T_0$  porównać ze zmierzonymi wartościami okresu  $T$  dla małych wychyleń. Sprawdzić czy stosunek parametrów  $b$  i  $a$  zgodnie z równaniem (1.1.10) w granicy niepewności wynosi  $b/a = 16$ . Narysować wykres zależności  $T/T_0$  od  $\theta_0$  dla danych doświadczalnych. Na tym samym wykresie przedstawić zależność teoretyczną daną równaniem (1.1.9).

#### Bilans energetyczny

Narysować wykresy zależności  $\dot{\theta}^2$  od  $(1 - \cos \theta_0)$  oraz  $\dot{\theta}^2$  od  $(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)$ . Do danych eksperymentalnych dopasować zależność liniową i obliczyć współczynnik korelacji. Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że energia kinetyczna wahadła w najniższym położeniu jest równa energii potencjalnej wahadła w najwyższym położeniu. Dlatego oczekujemy zależności liniowej  $\dot{\theta}^2$  od  $(1 - \cos \theta_0)$ . Ponieważ w każdej chwili energia kinetyczna wahadła jest równa ubytkowi energii potencjalnej wahadła, to również w drugim przypadku oczekujemy zależności liniowej zmiennych  $\dot{\theta}^2$  od  $(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)$ . Oznacza to, że w obydwóch przypadkach powinno otrzymać się współczynnik korelacji bliski jedności. W rozważaniach tych pominięto wpływ tarcia, który rozważany jest w przypadku dyssypacji energii.

#### Dyssypacja energii

Na wykresie fazowym  $(\theta, \dot{\theta})$  zaznaczyć kolejne pozycje wahadła. Zaobserwować stopniowe zbliżanie się do punktu  $(0, 0)$ . Wynik ten potwierdza istnienie tarcia w układzie, które powoduje stopniowe zmniejszanie całkowitej energii mechanicznej układu. Energia mechaniczna zamienia się na inne formy energii, głównie na ciepło.

## 1.2 Badanie drgań tłumionych wahadła torsyjnego

Celem ćwiczenia jest badanie małych drgań swobodnych i tłumionych wahadła torsyjnego oraz wyznaczenie parametrów drgań tłumionych dla różnych rodzajów tłumienia.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- *ruch harmoniczny: okres drgań, częstość drgań, wychylenie, amplituda;*
- *oscylator harmoniczny: równanie ruchu oscylatora harmonicznego, zależność amplitudy i okresu od czasu;*

- oscylator harmoniczny tłumiony stałym momentem siły lub momentem siły zależnym od czasu: równanie ruchu, zależność amplitudy i okresu od czasu, logarytmiczny dekrement tłumienia;
- dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej: moment bezwładności (definicja i wzory na moment bezwładności kuli i pręta), twierdzenie Steinera, zasady dynamiki ruchu obrotowego bryły sztywnej, wahadło torsyjne.

Literatura podstawowa: [25] §16.1-16.6, 16.8, [4]; literatura dodatkowa: [2], [10].

### 1.2.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Drgania swobodne wahadła torsyjnego

We wszystkich działach fizyki, gdy mamy do czynienia z małymi drganiami układów wokół położenia równowagi, pojawia się pojęcie oscylatora harmonicznego. Oscylatorem harmonicznym nazywamy ciało fizyczne (np. punkt materialny) poruszające się ruchem harmonicznym. Ruch harmoniczny jest periodycznym ruchem drgającym zachodzącym między dwoma punktami zwrotnymi będącymi punktami maksymalnego wychylenia z położenia równowagi trwałej. Jeśli rozważymy punkt materialny, oscylujący wokół położenia równowagi, to zmianę jego energii potencjalnej w funkcji wychylenia opisuje równanie:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (1.2.1)$$

Siłę działającą na tak oscylujący punkt materialny można wyrazić poprzez pochodną energii potencjalnej:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (1.2.2)$$

Widać stąd, że działająca siła jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi, ale ma zwrot do niego przeciwny. Możemy więc powiedzieć, że oscylatorem harmonicznym nazywamy punkt materialny, którego ruch odbywa się pod wpływem siły proporcjonalnej do wychylenia z położenia równowagi, ale zwrocie do niego przeciwnym.

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona można zapisać:

$$F(x) = ma = m\ddot{x}, \quad (1.2.3)$$

gdzie  $a$  jest przyspieszeniem z jakim porusza się rozważane ciało o masie  $m$ . Porównując równania (1.2.2) i (1.2.3) otrzymujemy:

$$-kx = m\ddot{x}. \quad (1.2.4)$$

Po przekształceniu otrzymuje się równanie ruchu prostego oscylatora harmonicznego w postaci:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.2.5)$$

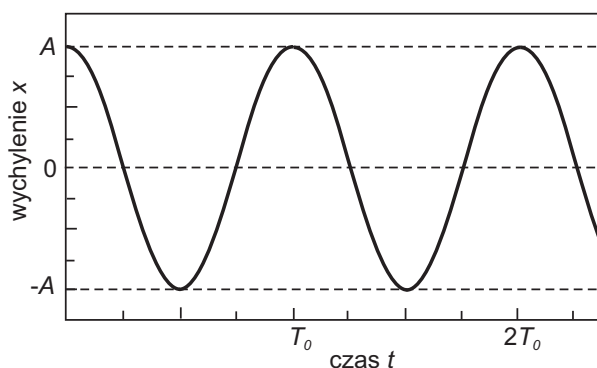
Aby znaleźć położenie badanego układu w danej chwili należy znaleźć rozwiązanie tego równania różniczkowego. Rozwiązaniem musi być pewna funkcja  $x(t)$ , której druga pochodna równa jest jej samej ze znakiem przeciwnym i stałym współczynnikiem  $k/m$ . Jak wiemy własność taką posiadają funkcje sinus i cosinus. Nie rezygnując z ogólności możemy więc przyjąć, że rozwiązanie ma postać:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \delta\right). \quad (1.2.6)$$

Łatwo sprawdzić, że spełnia ono równanie ruchu (1.2.5) jeżeli  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Wielkość  $\omega_0$  nazywamy częstością kołową ( $\omega_0 = 2\pi f_0$ , gdzie  $f_0 = 1/T_0$  jest częstotliwością drgań, a  $T_0$  jest okresem drgań),  $\delta$  jest przesunięciem fazowym, a stała  $A$  określa amplitudę ruchu. Przesunięcie fazowe i amplituda zależą od początkowych wartości położenia i prędkości punktu materialnego, natomiast okres drgań zależy tylko od parametrów układu tworzącego oscylator harmoniczny:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (1.2.7)$$

Jak widać okres drgań harmonicznych jest niezależny od ich amplitudy (własność tę nazywamy izochronizmem). Zależność wychylenia od czasu trwania ruchu, opisaną równaniem (1.2.6), przedstawia rysunek 1.2.1.



Rys. 1.2.1: Zależność wychylenia od czasu  $x(t)$  w ruchu harmonicznym prostym dla  $\delta = 0$ .

Właściwości układów drgających wykonujących drgania harmoniczne przeanalizujemy na przykładzie drgań torsyjnych kuli. Rozważmy kulę zawieszoną na sztywno zamocowanym drucie (rysunek 1.2.2). Jeśli skręcimy ją w płaszczyźnie poziomej z położenia równowagi  $O$  do położenia  $B$  to drut ulegnie skręceniu i na kulę zacznie działać moment siły wywołany sprężystością drutu, który stara się przywrócić ją do położenia

równowagi. Dla małego skręcenia przyjmujemy, że ten moment siły  $N_1$  jest proporcjonalny do wartości kąta wychylenia z położenia równowagi  $\varphi$  i wyraża się równaniem:

$$N_1 = -D_1\varphi. \quad (1.2.8)$$

Wielkość  $D_1$  nazywa się momentem kierującym i zależy od rozmiarów drutu oraz materiału z jakiego jest on wykonany.

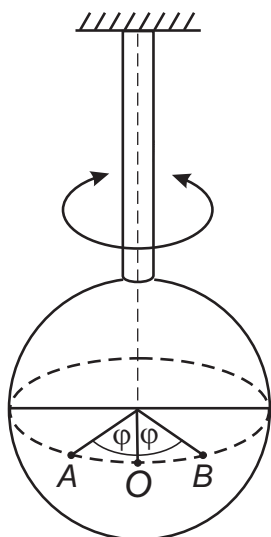
Pod działaniem momentu siły  $N_1$  kula wykonuje drgania harmoniczne obracając się wokół stałej osi. Równanie ruchu takiego układu można zapisać w postaci:

$$J\ddot{\varphi} = -D_1\varphi, \quad (1.2.9)$$

gdzie wielkość  $J$  jest momentem bezwładności bryły względem osi obrotu. Dla kuli, obracającej się względem osi przechodzącej przez jej środek, moment bezwładności wynosi:

$$J_{kuli} = \frac{2MR^2}{5}, \quad (1.2.10)$$

gdzie  $M$  jest masą kuli a  $R$  jej promieniem. Rozwiązaniem równania ruchu (1.2.9) jest funkcja postaci:



Rys. 1.2.2: Wahadło torsyjne.

$$\varphi(t) = \Phi \cos(\omega_0 t + \delta) = \Phi \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \delta\right). \quad (1.2.11)$$

Okres drgań wynosi więc:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D_1}}. \quad (1.2.12)$$

Widać, że mierząc okres drgań wahadła torsyjnego o znanym momencie bezwładności można wyznaczyć moment kierujący drutu.

### Wahadło torsyjne tłumione stałym momentem siły

Rozważmy teraz ruch wahadła torsyjnego tłumionego stałym momentem siły o wartości  $N$  skierowanym przeciwnie do prędkości kątowej kuli (czyli moment siły wynosi  $-N\dot{\varphi}/|\dot{\varphi}|$ ). Przypadek taki ma miejsce między innymi podczas tłumienia drgań mechanicznych tarcie kulombowskim. Sytuację taką można zrealizować praktycznie przedstawiając pod kulę metalową sprężynę. W przypadku tłumienia stałym momentem siły równanie ruchu przyjmuje postać:

$$J\ddot{\varphi} = -D_1\varphi - N \frac{\dot{\varphi}}{|\dot{\varphi}|}. \quad (1.2.13)$$



Ogólnym rozwiązaniem równania (1.2.13) jest funkcja (dla uproszczenia przyjęto, że dla  $t = 0$  wychylone wahadło spoczywa):

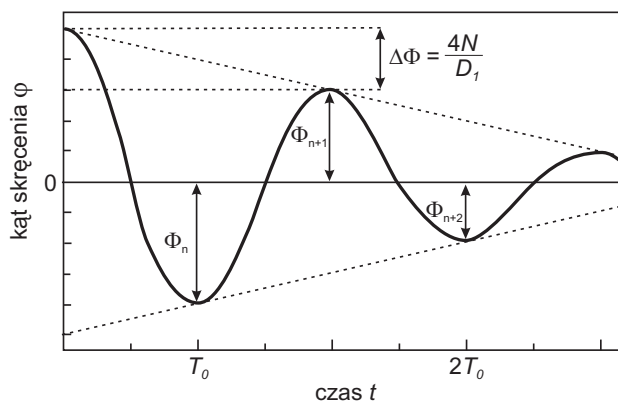
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Phi \cos(\omega_0 t) + \frac{N}{D_1} & \text{dla } \dot{\varphi} < 0 \\ \varphi(t) &= \Phi \cos(\omega_0 t) - \frac{N}{D_1} & \text{dla } \dot{\varphi} > 0 \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Okres drgań pozostaje niezmienny w porównaniu z okresem drgań wahadła swobodnego. Każde z rozwiązań jest słuszne pomiędzy dwoma kolejnymi punktami maksymalnego wychylenia, w których wahadło się zatrzymuje. Oznacza to, że w ciągu połowy okresu ruch odbywa się harmonicznym, a maksymalne wychylenie jakie osiąga wahadło po połowie okresu stanowi warunki początkowe dla ruchu w następnej połowie okresu. Wraz z warunkiem na ciągłość funkcji  $\varphi(t)$  równanie (1.2.14) pozwala na otrzymanie ogólnego rozwiązania dla ruchu wahadła w czasie pomiędzy  $n$  i  $n + 1$  maksymalnym wychyleniem (rysunek 1.2.3):

$$\varphi(t) = \Phi_n \cos(\omega_0 t) + (-1)^n \frac{N}{D_1}, \quad (1.2.15)$$

gdzie kolejne amplitudy spełniają związek rekurencyjny:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n - \frac{2N}{D_1}. \quad (1.2.16)$$



Rys. 1.2.3: Zależność kąta skręcenia  $\varphi$  od czasu  $t$  dla wahadła torsyjnego tłumionego stałym momentem siły.

Otrzymaną zależność kąta skręcenia  $\varphi$  od czasu  $t$  przedstawia rysunek 1.2.3. Korzystając z równania (1.2.16) można wyznaczyć różnicę amplitud  $\Delta\Phi$  w czasie równym jednemu okresowi drgań:

$$\Delta\Phi = \Phi_n - \Phi_{n+2} = \frac{4N}{D_1}. \quad (1.2.17)$$

Badanie drgań wahadła torsyjnego tłumionych stałym momentem siły pozwala na wyznaczenie momentu siły tarcia ze związku:

$$N = \frac{D_1 \Delta \Phi}{4}. \quad (1.2.18)$$

### Wahadło torsyjne tłumione momentem siły zależnym od czasu

W przypadku mechanicznych drgań ciała zanurzonego w lepkiej cieczy mamy do czynienia z tłumieniem momentem siły proporcjonalnym do prędkości ruchu i przeciwnie do niej skierowanym. Tarcie tego typu, zwane wiskotycznym, wnosi dodatkowy moment siły równy  $N_2 = -D_2 \dot{\varphi}$ . Równanie takiego ruchu zapisujemy w postaci:

$$J\ddot{\varphi} = -D_1\varphi - D_2\dot{\varphi}. \quad (1.2.19)$$

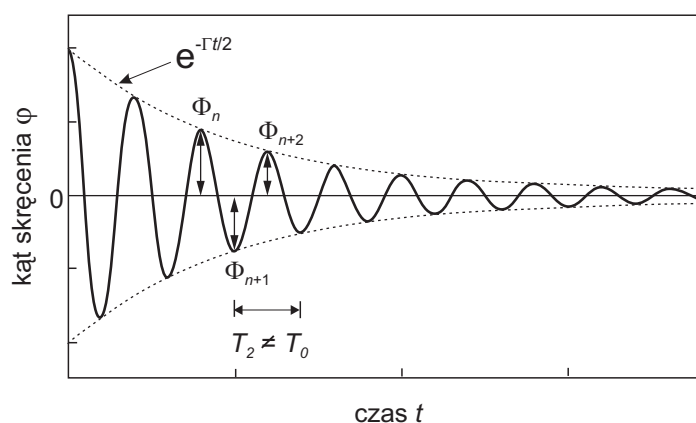
Jeśli tłumienie jest zbyt duże to nie ma możliwości zaobserwowania oscylacji, gdyż wychylenie eksponencjalnie maleje do zera. Dla słabego tłumienia ( $D_2$  małe) rozwiązaniem powyższego równania ruchu jest funkcja:

$$\varphi(t) = \Phi e^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_2 t + \delta) = \Phi e^{-\Gamma t/2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \delta\right), \quad (1.2.20)$$

gdzie  $\Gamma = D_2/J$  i  $\omega_2^2 = D_1/J - \Gamma^2/4$ . Zatem okres drgań  $T_2$  wyrażony przez okres drgań wahadła swobodnego  $T_0$ , wynosi:

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - D_2^2/4JD_1}}. \quad (1.2.21)$$

W przypadku tłumienia momentem siły proporcjonalnym do prędkości okres drgań wydłuża się w porównaniu do okresu drgań swobodnych. Zależność kąta skręcenia  $\varphi$  od czasu  $t$  dla tłumienia wiskotycznego przedstawia rysunek 1.2.4.



Rys. 1.2.4: Zależność kąta skręcenia  $\varphi$  od czasu dla wahadła tłumionego wiskotycznie.

Wielkością charakterystyczną dla drgań tłumionych oporem wiskotycznym jest tak zwany logarytmiczny dekrement tłumienia  $d$ . Jest on w prosty sposób związany z parametrami ruchu. Obliczmy stosunek dwóch kolejnych amplitud po tej samej stronie położenia równowagi:

$$\frac{\Phi_n}{\Phi_{n+2}} = \frac{e^{-\Gamma t/2}}{e^{-\Gamma(t+T_2)/2}} = e^{\Gamma T_2/2}. \quad (1.2.22)$$

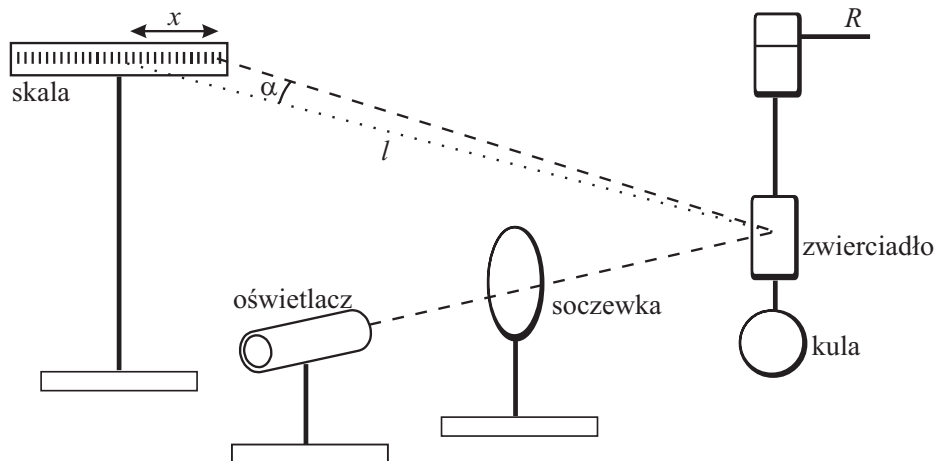
Stosunek ten jest wielkością stałą. Jego logarytm naturalny jest szukanym logarytmicznym dekrementem tłumienia:

$$d = \ln \frac{\Phi_n}{\Phi_{n+2}} = \frac{D_2 T_2}{2J}. \quad (1.2.23)$$

## 1.2.2 Przebieg pomiarów

### Układ pomiarowy

W skład układu doświadczalnego wchodzi: wahadło torsyjne (kula zaopatrzona w lustro, zawieszona na sztywno zamocowanym pręcie), skala na statywie, oświetlacz (lampka na statywie), soczewka skupiająca na statywie. Do dyspozycji jest również sprężyna na statywie, zlewka z gliceryną, stoper, suwmiarka, przymiar metrowy. Schemat układu doświadczalnego przedstawiony jest na rysunku 1.2.5.



Rys. 1.2.5: Schemat układu do badania drgań wahadła torsyjnego.

### Metoda pomiarowa

Światło odbija się od lusterka zamocowanego na drucie, na którym zawieszona jest kula. Jeżeli kula obraca się o kąt  $\varphi$  to promień światła ulega skręceniu o kąt  $\alpha = 2\varphi$ .

Używając skali milimetrowej można dzięki temu zmierzyć odchylenie  $x$  od położenia równowagi, co pozwala na wyznaczenie kąta skreślenia  $\varphi$ . Analizując geometrię układu doświadczalnego przedstawionego schematycznie na rysunku 1.2.5, kąt obrotu wahadła  $\varphi$  można powiązać z odchyleniem  $x$  poprzez  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\varphi = x/l$ , gdzie  $l$  jest odległością skali od lusterka. Zakładając niewielkie wychylenia z położenia równowagi (małe wartości kąta skreślenia  $\varphi$ ) możemy zastosować przybliżenie  $\operatorname{tg} 2\varphi \approx 2\varphi$  i wobec tego  $\varphi \approx x/2l$ .

### Przebieg doświadczenia

Kilkakrotnie zmierzyc suwmiarką średnicę kuli i oszacować niepewność pomiaru. Masa kuli podana jest przy zestawie pomiarowym. Zestawić układ eksperymentalny do badania drgań torsyjnych swobodnych (bez tłumienia) według schematu przedstawionego na rysunku 1.2.5. Następnie, przy skrajnym położeniu rączki  $R$ , dobrać odpowiednio odległości i kąt nachylenia oświetlacza tak, aby uzyskać ostry obraz nici (pionowej linii zaznaczonej na okienku oświetlacza) na podziałce skali. W położeniu równowagi wahadła torsyjnego powinien on znajdować się możliwie blisko zera skali. Zmierzyc kilkakrotnie odległość skali od lusterka.

Wprawić kulę w drgania torsyjne skreścając ją o niewielki kąt od położenia równowagi. Kulę należy wprowadzać w ruch obrotowy przy pomocy rączki  $R$ , przez przesunięcie jej ze skrajnego położenia (ruchem powolnym tak aby obraz nici pozostał na skali) i powrót do niego (ruchem szybkim). Zanotować kilkanaście wartości wychyleń po tej samej stronie położenia równowagi. Pomiar powtórzyć kilkakrotnie. Zmierzyc czas trwania dziesięciu kolejnych okresów drgań torsyjnych kuli. Pomiar powtórzyć dziesięciokrotnie.

Zestawić układ do badania drgań torsyjnych tłumionych stałym momentem siły, wstawiając metalową sprężynę bezpośrednio pod kulę. Nacisk sprężyny dobrać tak, aby można było odczytać kilkanaście kolejnych wychyleń po tej samej stronie położenia równowagi. Przeprowadzić pomiary wychyleń i okresu tak, jak dla drgań swobodnych.

Zestawić układ do badania drgań torsyjnych tłumionych oporem lepkościowym. W tym celu usunąć sprężynę, a kulę umieścić w zlewce z gliceryną. Głębokość zanurzenia kuli dobrać tak, aby można było odczytać kilkanaście kolejnych wychyleń po tej samej stronie położenia równowagi. Pomiary wychyleń i okresu przeprowadzić tak, jak dla drgań swobodnych.

### 1.2.3 Opracowanie wyników

W przypadku drgań torsyjnych nietłumionych wykonać wykres zależności amplitudy od czasu (dla kilku punktów zaznaczyć prostokąty niepewności pomiarowych). Obliczyć okres drgań wahadła i oszacować jego niepewność pomiarową (metodą najmniejszych kwadratów). Obliczyć moment bezwładności wahadła, a następnie moment kierujący  $D_1$ . Oszacować ich niepewności pomiarowe (metodą różniczki zupełnej lub metodą pochodnej logarytmicznej).

W przypadku drgań torsyjnych tłumionych stałym momentem siły (tarcie Coulombowskim) wykonać wykres zależności amplitudy od czasu. Obliczyć okres drgań wahadła (wraz z niepewnością pomiarową), porównać go z wartością otrzymaną dla wahadła nietłumionego. Wyznaczyć średnią różnicę dwóch kolejnych amplitud, a następnie korzystając z wzoru (1.2.18) obliczyć moment siły tarcia i jego niepewność pomiarową (metodą różniczki zupełnej lub metodą pochodnej logarytmicznej).

W przypadku tłumienia oporem wiskotycznym sporządzić wykres zależności amplitudy od czasu oraz zależności logarytmu amplitudy od czasu. Obliczyć okres drgań wahadła, logarytmiczny dekrement tłumienia oraz współczynnik  $D_2$ . Sprawdzić, czy okres drgań wyznaczony eksperymentalnie jest zgodny z wartością obliczoną na podstawie wzoru (1.2.21).

### 1.3 Drgania tłumione i wymuszone tłumionego oscylatora harmonicznego

Celem ćwiczenia jest badanie drgań tłumionych i wymuszonych oscylatora harmonicznego. W szczególności, należy wykonać pomiar zaniku drgań oscylatora tłumionego i zbadać krzywe rezonansowe oscylatora wymuszonego dla różnych parametrów tłumienia.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- oscylator harmoniczny - równanie ruchu i jego rozwiązanie, częstotliwość własna;
- oscylator tłumiony - równanie ruchu i jego rozwiązanie, parametr tłumienia, tłumienie krytyczne;
- drgania wymuszone - wymuszenie siłą sinusoidalną, zjawisko rezonansu;
- dynamika bryły sztywnej, wahadło torsyjne.

Literatura podstawowa: [45], [4], [11].

#### 1.3.1 Podstawowe pojęcia i definicje

##### Wahadło torsyjne

W rozdziale 1.1 omawiane było wahadło fizyczne, którego drgania spowodowane są działaniem siły grawitacji. Wahadło torsyjne to inny rodzaj wahadła, którego drgania powstają na skutek sił sprężystości. Przykładem wahadła torsyjnego jest np. bryła zawieszona na skręcającym się sprężystym drucie lub tarcza z umocowaną do niej spiralną sprężyną (włosową lub taśmową).

Dla dostatecznie małych skręceń, wahadło torsyjne zachowuje się jak oscylator harmoniczny i może być ono wykorzystane do obserwacji jego podstawowych cech. W dalszej części tego rozdziału przedstawione są elementarne wiadomości dotyczące drgań tłumionych i wymuszonych oscylatora harmonicznego. Szczegółową analizę tych zagadnień, sposób rozwiązania równań ruchu oraz ich ogólną postać czytelnik może znaleźć np. w [45].

### Oscylator harmoniczny tłumiony

Zakładamy, że skreślenie wahadła torsyjnego o kąt  $\varphi$  z położenia równowagi prowadzi do powstania momentu siły sprężystości  $N_0$  wprost proporcjonalnego do wychylenia (prawo Hooke'a):

$$N_0 = -D_0\varphi, \quad (1.3.1)$$

Stała proporcjonalności  $D_0$  zależy od parametrów użytej sprężyny i jest nazywana momentem kierującym.

Równanie ruchu wahadła o momencie bezwładności  $J$  można zapisać jako:

$$J\ddot{\varphi} + D_0\varphi = 0. \quad (1.3.2)$$

Jest to równanie ruchu oscylatora harmonicznego, którego ogólnym rozwiązaniem jest:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \quad (1.3.3)$$

gdzie amplituda drgań  $\varphi_0$  i ich faza  $\delta$  wyznaczone są przez warunki początkowe, a  $\omega_0$  zdefiniowane jako:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D_0}{J}} \quad (1.3.4)$$

jest częstością drgań własnych wahadła.

Rozważmy teraz oscylator tłumiony momentem siły wprost proporcjonalnym do prędkości kątowej wahadła. W takim przypadku w równaniu ruchu obecny jest dodatkowy człon:

$$N = -D\dot{\varphi}. \quad (1.3.5)$$

Równanie ruchu przyjmuje zatem następującą postać:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (1.3.6)$$

Wprowadzony parametr

$$\Gamma = \frac{D}{J} \quad (1.3.7)$$

to tzw. parametr tłumienia.

W przypadku tłumienia mniejszego niż tzw. tłumienie krytyczne tj. dla  $\Gamma < \Gamma_{kr}$ , gdzie  $\Gamma_{kr} = 2\omega_0$ , ruch wahadła jest oscylacyjny. Dla warunków początkowych  $\varphi(0) = \varphi_0$  i  $\dot{\varphi}(0) = 0$  (wahadło puszczane jest z zerową prędkością kątową z pozycji  $\varphi_0$ ) rozwiązaniem równania ruchu (1.3.6) jest funkcja:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\Gamma t/2} \cos(\omega t), \quad (1.3.8)$$

gdzie

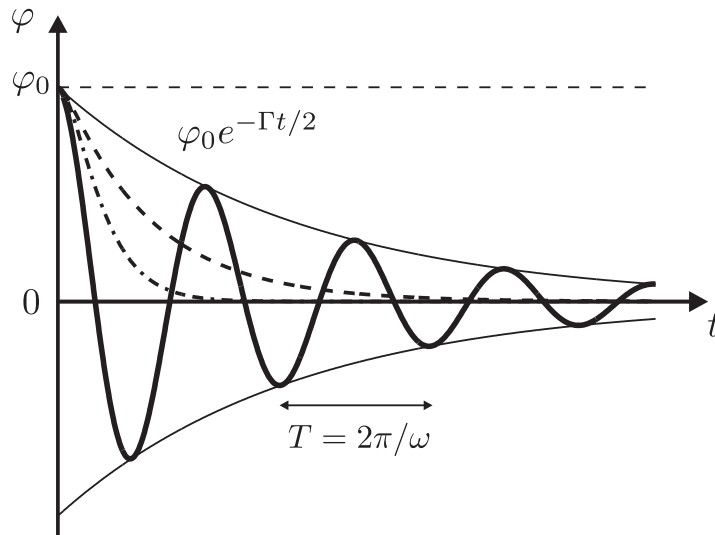
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\Gamma/2)^2} \quad (1.3.9)$$

jest częstotnością drgań tłumionych. Częstość ta jest mniejsza niż częstość drgań własnych. Amplituda drgań zmniejsza się w czasie zgodnie z zależnością  $\varphi_0 e^{-\Gamma t/2}$ . Stałą czasową

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (1.3.10)$$

nazywamy czasem relaksacji. Dla słabego tłumienia, określa ona szybkość zaniku oscylacji tłumionych w układzie.

W przypadku gdy tłumienie jest silne tj. dla  $\Gamma \geq \Gamma_{kr}$  podczas ruchu wahadła oscylacje nie występują. Dla granicznego przypadku tłumienia krytycznego  $\Gamma = \Gamma_{kr}$  szybkość zaniku oscylacji jest maksymalna. Zależność amplitudy drgań oscylatora harmonicznego tłumionego od czasu przedstawiona jest na rysunku 1.3.1.



Rys. 1.3.1: Wychylenie oscylatora harmonicznego tłumionego  $\varphi$  w funkcji czasu. W chwili  $t = 0$  oscylator ma wychylenie początkowe  $\varphi_0$  i zerową prędkość kątową. Krzywa ciągła (—) odpowiada przypadkowi słabego tłumienia  $\Gamma < 2\omega_0$ . Dodatkowo, cienką linią zaznaczono obwiednię oscylacji. Krzywa (·-·) odpowiada tłumieniu krytycznemu  $\Gamma = 2\omega_0$  a krzywa (---) silnemu tłumieniu  $\Gamma > 2\omega_0$ .

### Oscylator wymuszony

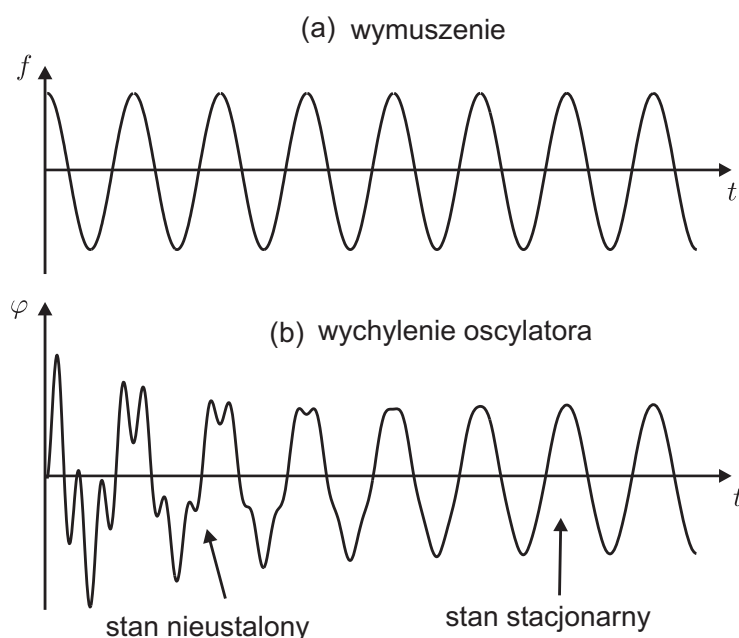
Do opisywanego oscylatora dokładamy układ wymuszający, który wywiera na wahadło torsyjne dodatkowy moment siły  $N_w(t)$  zależny od czasu. Równanie ruchu przyjmuje wtedy postać:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = f(t), \quad (1.3.11)$$

gdzie  $f(t) = N_w(t)/J$ . W naszym przypadku rozważamy wymuszenie harmoniczne:

$$f(t) = f_0 \cos(\Omega t). \quad (1.3.12)$$

Opisywany układ może znajdować się w stanie nieustalonym lub w stanie stacjonarnym. Stany nieustalone mogą występować np. krótko po włączeniu siły wymuszającej lub po zmianie jej częstotliwości. Rozwiązanie równania (1.3.11) dla tych przypadków jest bardziej skomplikowane, dlatego ograniczymy się tylko do stanów stacjonarnych, w których amplituda oscylacji osiąga stałą, niezależną od czasu wartość. Oczekujemy, że dla czasu  $t \gg \tau$  (czyli dla czasów znacznie większych od czasu relaksacji) drgania układu będą zachodzić z częstotliwością siły wymuszającej  $\Omega$  (rysunek 1.3.2).



Rys. 1.3.2: Reakcja tłumionego oscylatora harmonicznego na wymuszenie sinusoidalne. (a) Wymuszenie  $f$  w funkcji czasu. (b) Wychylenie oscylatora  $\varphi$  w funkcji czasu. W chwili  $t = 0$  oscylator spoczywał w położeniu równowagi:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . W czasie kilku pierwszych oscylacji oscylator znajduje się w stanie nieustalonym. Stan stacjonarny osiągnany jest po czasie  $t$  większym niż czas relaksacji  $\tau = 1/\Gamma$ . Po tym czasie oscylator wykonuje drgania z częstotliwością wymuszenia niezależnie od warunków początkowych. Wykresy wykonano dla częstotliwości wymuszenia  $\Omega = 0.25\omega_0$  i parametru tłumienia  $\Gamma = 0.05\omega_0$ .

Przez podstawienie można łatwo sprawdzić, że funkcja:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega t - \delta) \quad (1.3.13)$$



spełnia równanie ruchu (1.3.11), jeśli przyjąć następujące zależności:

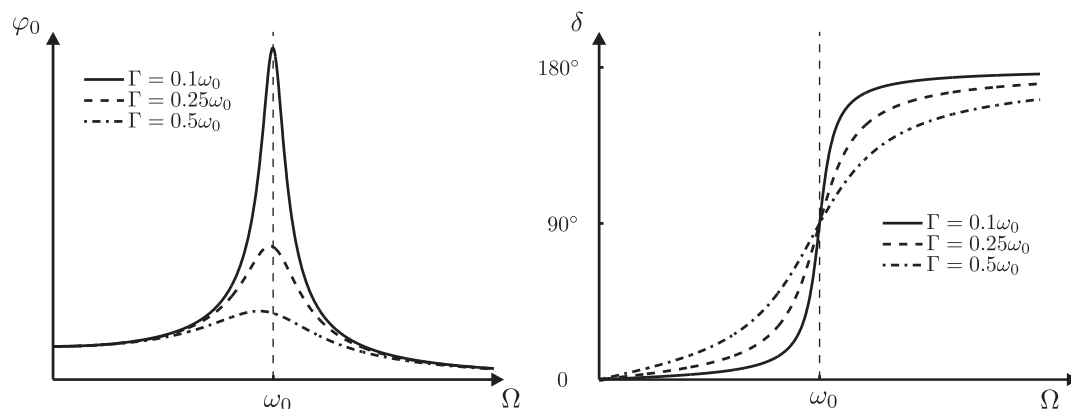
$$\varphi_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}, \quad (1.3.14)$$

$$\tan \delta = \frac{\Gamma \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.3.15)$$

Na rysunku 1.3.3 przedstawiona jest amplituda  $\varphi_0$  i przesunięcie fazowe  $\delta$  stacjonarnych drgań wymuszonych w zależności od częstości siły wymuszającej. W okolicy pewnej częstości  $\omega_r$  amplituda drgań układu wyraźnie wzrasta i osiąga maksimum. Zjawisko to nazywane jest rezonansem. Częstość rezonansową  $\omega_r$  można znaleźć stosując standardową procedurę wyznaczania ekstremów funkcji  $\varphi_0(\Omega)$ . Maksimum funkcji, czyli rezonans występuje dla wartości:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/2}, \quad (1.3.16)$$

która jest mniejsza niż częstość drgań własnych  $\omega_0$ . Odchylenie częstości rezonansowej od częstości drgań własnych rośnie wraz ze wzrostem parametru tłumienia  $\Gamma$ . Współczynnik tłumienia wpływa również na szerokość krzywej rezonansowej oraz jej wysokość. Im większy jest współczynnik tłumienia, tym krzywa rezonansowa jest szersza a jej amplituda mniejsza. Szerokość krzywej rezonansowej określa parametr nazywany szerokością połówkową (szerokość krzywej mierzona w połowie jej wysokości). Dla słabego tłumienia można w dużym przybliżeniu przyjąć, że szerokość połówkowa krzywej rezonansowej jest rzędu  $\sqrt{3}\Gamma$ .



Rys. 1.3.3: Zależności amplitudy (krzywe rezonansowe) i fazy drgań stacjonarnych oscylatora harmonicznego od częstości siły wymuszającej. Wykresy pokazane są dla kilku parametrów tłumienia  $\Gamma$ .

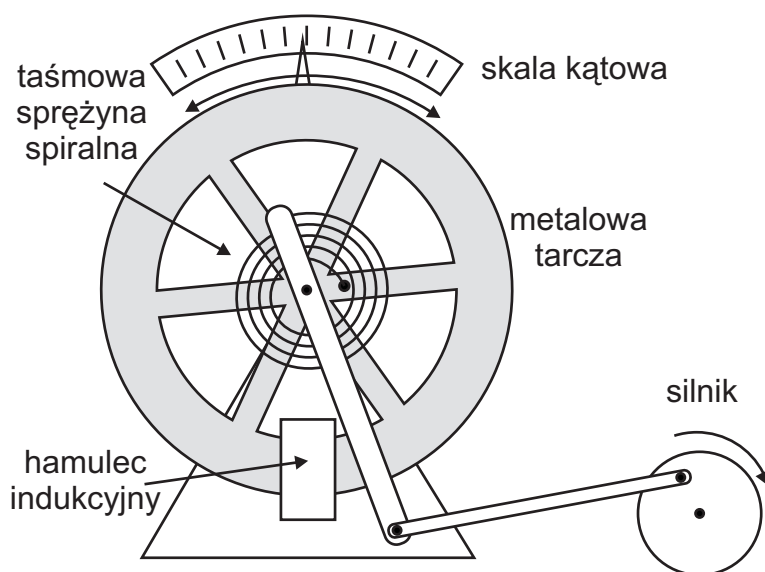
Choć stacjonarne drgania wymuszone zachodzą zawsze z częstością siły wymuszającej  $\Omega$  to przesunięcie fazowe  $\delta$  pomiędzy wymuszeniem a wychyleniem oscylatora silnie zależy od  $\Omega$ . Dla małych częstości, oscylacje wahadła są zgodne z siłą wymuszającą,

dla  $\Omega = \omega_0$  są przesunięte w fazie o  $90^\circ$  a dla wysokich częstotliwości są w przeciwfazie w stosunku do siły wymuszającej.

### 1.3.2 Przebieg pomiarów

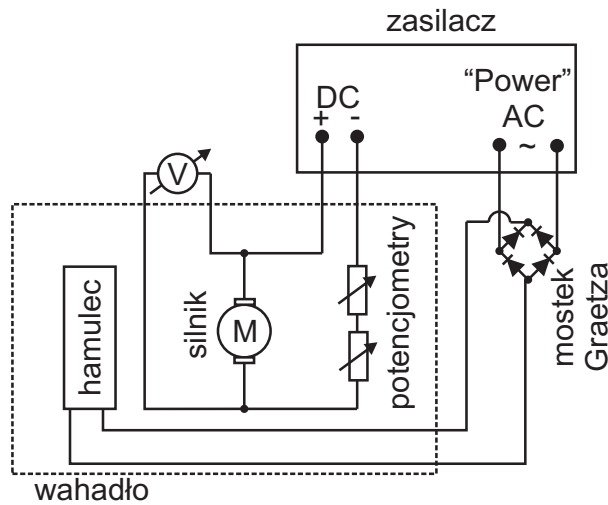
#### Układ doświadczalny

Głównym elementem zestawu doświadczalnego jest wahadło torsyjne tzw. balans, czyli tarcza ze stopu miedzi, do której przymocowana jest spiralna sprężyna (rysunek 1.3.4).



Rys. 1.3.4: Uproszczony rysunek wahadła balansowego używanego podczas doświadczenia. Wahadła tego typu wykorzystywane są np. w zegarkach mechanicznych.

Warto zwrócić uwagę na wykorzystanie takiego elementu np. w zegarkach mechanicznych i jego analogię do wahadła grawitacyjnego w zegarkach ściennych. Wymuszenie odbywa się poprzez układ dwóch prętów umocowanych z jednej strony do sprężyny wahadła a z drugiej strony (mimośrodowo) do silnika stałoprądowego. Przybliżenie oscylatora harmonicznego jest spełnione dla wszystkich kątów wychylenia (mierzonych w jednostkach umownych). Regulacja częstotliwości siły wymuszającej następuje poprzez zmianę napięcia podawanego na silnik. Schemat połączenia układu przedstawiony jest na rysunku 1.3.5. Tłumienie w układzie realizowane jest poprzez hamulec indukcyjny działający w oparciu o powstawanie prądów wirowych. W hamulcu indukcyjnym tłumienie jest wprost proporcjonalne do prędkości kątowej tarczy. Zmiana tłumienia następuje poprzez regulację prądu płynącego przez uzwojenia elektromagnesu, między którymi umieszczone jest koło balansowe, a w praktyce przez zmianę ustawienia tarczy *Power* na zasilaczu.



Rys. 1.3.5: Schemat połączenia układu doświadczalnego.

### Kalibracja częstości siły wymuszającej

Pomiar zależności  $\Omega = \Omega(U)$ , gdzie  $\Omega$  jest częstością siły wymuszającej a  $U$  jest napięciem podawanym na silnik. Ta część ćwiczenia pozwoli na późniejsze przedstawienie krzywych rezonansowych w funkcji częstości.

### Wyznaczenie częstości drgań wahadła

Prosty pomiar stoperem. Puszczając koło balansowe z maksymalnego wychylenia należy zmierzyć okres drgań swobodnych  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  i tłumionych  $T = 2\pi/\omega$  wahadła dla różnych parametrów tłumienia  $\Gamma$ .

### Badanie oscylacji tłumionych

Pomiar amplitudy oscylacji w zależności od czasu  $\varphi_m = \varphi(t_m)$  gdzie  $t_m = mT/2$ ,  $T$  jest okresem drgań tłumionych a  $m = 1, 2, \dots$ . Puszczając koło balansowe z maksymalnego wychylenia można obserwować zanik amplitudy oscylacji. Należy zanotować maksymalne wychylenia wahadła w zależności od numeru oscylacji  $m$  (zarówno dla dodatnich i ujemnych położań czyli co  $t = T/2$ ). Pomiar należy wykonać dla różnych parametrów tłumienia  $\Gamma$ . Pomiar pozwoli na wyznaczenie obwiedni drgań tłumionych (por. rysunek 1.3.1).

### Pomiar krzywej rezonansowej

Pomiar krzywej rezonansowej  $\phi_0 = \phi_0(\Omega)$ , dla różnych wartości współczynnika tłumienia  $\Gamma$ , pozwoli na wykreślenie krzywych rezonansowych analogicznych do krzywych

pokazanych na rysunku 1.3.3. Zmieniając i notując napięcie zasilania silnika, należy zapisać maksymalne wychylenie koła balansowego po ustabilizowaniu się amplitudy drgań. Do precyzyjnej zmiany napięcia należy stosować bardziej czuły potencjometr. Dla małych parametrów  $\Gamma$ , przy zmianie częstości siły wymuszającej, wahadło bardzo wolno dochodzi do stanu stabilnego. Dlatego warto, przy każdorazowej zmianie napięcia, bardzo delikatnie ręcznie lub poprzez wyzerowanie napięcia zatrzymać koło balansowe. Wyraźnie wtedy widać stopniowy proces dochodzenia do stabilnego periodycznego ruchu. Pomocne może być wstępne oszacowanie czasu relaksacji  $\tau$  na podstawie pomiarów drgań tłumionych. Dla małych parametrów  $\Gamma$  koło balansowe zaczyna uderzać w ograniczniki i krzywej rezonansowej nie można zmierzyć w ścisłym rezonansie. W połączeniu z małą precyzją pomiarów, może utrudnić to dalszą analizę danych.

Podczas pomiaru krzywych rezonansowych można w sposób jakościowy wykonać obserwację przesunięcia fazowego między oscylacjami wahadła a siłą wymuszającą.

### 1.3.3 Opracowanie wyników

#### Kalibracja częstości siły wymuszającej

Narysować wykres  $\Omega = \Omega(U)$ . Do zmierzonej zależności, metodą regresji liniowej, dopasować prostą. Otrzymane parametry regresji pozwolą na późniejsze przeliczenie napięcia na częstotliwość i prezentację krzywych rezonansowych w skali częstości.

#### Wyznaczenie częstości drgań wahadła

Wyznaczyć i porównać częstości drgań wahadła swobodnego  $\omega_0$  i tłumionego  $\omega$  dla różnych wartości  $\Gamma$ . W tej części ćwiczenia należy szczególnie zwrócić uwagę na niepewności pomiarowe.

#### Badanie oscylacji tłumionych

Narysować wykresy zaniku amplitudy oscylacji  $\phi_m = \phi(t_m)$  dla różnych parametrów tłumienia. Z wykresów (przez dopasowanie eksponenty lub prostej do zlinearyzowanej zależności) wyznaczyć parametry  $\Gamma$  oraz  $\omega$  dla różnych wartości prądu płynącego przez hamulec indukcyjny.

#### Pomiar krzywej rezonansowej

Narysować krzywe rezonansowe  $\phi = \phi_0(\Omega)$ . Do krzywych dopasować zależność z równania (1.3.14). Wyznaczyć parametry dopasowania  $f_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\Gamma$  oraz wielkość  $\omega_r$ . Porównać otrzymane wartości z wartościami otrzymanymi w poprzednich punktach. Przedyskutować otrzymane wyniki. Opcjonalnie można wykonać wykres przesunięcia fazowego między oscylacjami wahadła a siłą wymuszającą.

## 1.4 Badanie drgań wahadeł sprzężonych

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie okresów drgań normalnych oraz częstości dudnień w ruchu dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych i porównanie uzyskanych wyników z wartościami przewidywanymi na podstawie teorii. Można również badać zależność okresu dudnień od odległości punktu zaczepienia sprężyny sprzęgającej wahadła od osi obrotu wahadeł.

*Zagadnienia do przygotowania:*

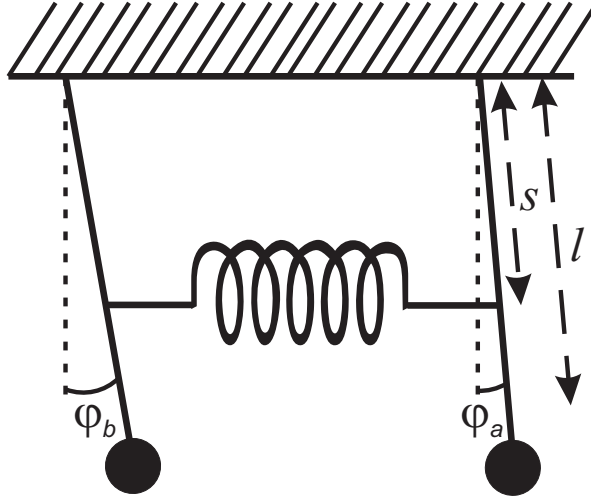
- *dynamika bryły sztywnej: przyspieszenie liniowe, przyspieszenie kątowe, moment bezwładności, moment bezwładności pręta i walca, twierdzenie Steinera, moment siły, II zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego;*
- *oscylator harmoniczny: ruch harmoniczny, ruch wahadła fizycznego przy małych wychyleniach z położenia równowagi (okres, częstość, amplituda, wychylenie, moment kierujący);*
- *opis ruchu wahadeł sprzężonych dla małych wychyleń z położenia równowagi: drgania normalne, dudnienia.*

Literatura podstawowa: [9] §11.6-11.9, 12.5; [25] §18.7, 16.6, 16.2-16.4; [11] §1 str. 17-22, 29-33, 44-52; literatura dodatkowa: [2].

### 1.4.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Rozważmy dwa identyczne wahadła fizyczne, połączone sprężyną, za której pośrednictwem energia drgań będzie przekazywana od jednego wahadła do drugiego. Układ taki, przedstawiony schematycznie na rysunku 1.4.1, nazywamy wahadłami sprzężonymi. Ograniczymy się tutaj do drgań o niewielkich wychyleniach z położenia równowagi, tak aby można je było rozważać jako drgania harmoniczne. Opis ruchu takiego układu w przypadku ogólnym może być dość skomplikowany. Układ dwóch wahadeł ma dwa stopnie swobody czyli do opisu jego ruchu potrzebujemy dwóch zmiennych, dla których otrzymujemy dwa równania ruchu. Zazwyczaj w każdym z równań występują jednocześnie obie zmienne i równań tych nie można rozwiązywać niezależnie. Jeżeli jednak równania ruchu, oprócz wyrazów z drugą pochodną, zawierają wyrazy liniowe w obydwu zmiennych (tzn. wyrazy wprost proporcjonalne do tych zmiennych), to możliwa jest transformacja do dwóch nowych zmiennych. Dla nowych zmiennych otrzymuje się dwa niezależne równania ruchu, tzn. każde z tych równań zależy tylko od jednej zmiennej. Nowe zmienne opisują tzw. drgania normalne (drgania własne) układu. Układ ma tyle rodzajów drgań własnych ile ma stopni swobody, tj. tyle ile jest zmiennych niezależnych opisujących jego ruch. Dowolne drganie każdego elementu układu można opisać jako pewną kombinację drgań normalnych, czyli ich superpozycję (złożenie).

Do opisu ruchu wahadeł sprzężonych najwygodniej jest wybrać kąty ich wychylenia z położenia równowagi  $\varphi_a$  i  $\varphi_b$ , stosując przybliżenie małych kątów, tzn.  $\sin \varphi \approx \varphi$  oraz  $\cos \varphi \approx 1$ . Rozważmy ruch jednego wahadła (dla drgań swobodnych omówiony w rozdziale 1.2). Ruch wahadła swobodnego jest powodowany przez działanie momentu siły  $N_g$  pochodzącego od siły grawitacji:



Rys. 1.4.1: Schemat układu do badania drgań wahadeł sprzężonych.

$$N_g = mgl \sin(-\varphi_a) \approx -mgl\varphi_a = -D\varphi_a, \quad (1.4.1)$$

gdzie  $m$  jest masą wahadła,  $l$  jest odległością środka masy wahadła od punktu zawieszenia,  $g$  to przyspieszenie grawitacyjne, natomiast  $D = mgl$  jest momentem kierującym. W przypadku występowania sprzężenia dodatkowo działa także moment siły sprzężenia  $N_s$ . Wahadła zawieszono są w takiej odległości, że dla położenia równowagi sprężyna nie jest rozciągnięta. Przy wychyleniu wahadeł o kąty  $\varphi_a$  i  $\varphi_b$  sprężyna rozciąga się o  $\Delta x$ :

$$\Delta x = s \sin \varphi_a - s \sin \varphi_b \approx s(\varphi_a - \varphi_b), \quad (1.4.2)$$

gdzie  $s$  jest odległością punktu zawieszenia sprężyny od punktu zaczepienia (długości sprężyny). Jeżeli sprężyna ma stałą sprężystości  $k$  to moment siły pochodzący od sprężyny działający na wahadło  $a$  wynosi:

$$N_s = -sk\Delta x \cos \varphi_a \approx -ks^2(\varphi_a - \varphi_b). \quad (1.4.3)$$

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla drugiego wahadła, pamiętając, że moment siły od sprężyny działający na nie ma przeciwny znak. Oznaczając moment sprzęgający przez  $D_s = ks^2$  otrzymujemy sprzężony układ równań opisujący ruch wahadeł:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_a &= -D\varphi_a - D_s(\varphi_a - \varphi_b) \\ J\ddot{\varphi}_b &= -D\varphi_b - D_s(\varphi_b - \varphi_a) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Po podstawieniu

$$D/J = \omega_0^2 \quad \text{i} \quad D_s/J = K \quad (1.4.5)$$

i odpowiednich przekształceniach otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a + \omega_0^2 \varphi_a + K(\varphi_a - \varphi_b) &= 0 \\ \ddot{\varphi}_b + \omega_0^2 \varphi_b + K(\varphi_b - \varphi_a) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Każde z nich składa się z części znanej z równania dla wahadła swobodnego wykonującego drgania harmoniczne oraz z drugiej części zawierającej obie zmienne  $\varphi_a$  i  $\varphi_b$ . Właśnie ta część sprzęga oba równania ze sobą i nie pozwala na niezależne ich rozwiązanie w zmiennej  $\varphi_a$  lub  $\varphi_b$ . Jeżeli najpierw dodamy, a potem odejmiemy te dwa równania stronami to otrzymamy dwa nowe, równoważne im równania:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a + \ddot{\varphi}_b + \omega_0^2(\varphi_a + \varphi_b) &= 0 \\ \ddot{\varphi}_a - \ddot{\varphi}_b + \omega_0^2(\varphi_a - \varphi_b) + 2K(\varphi_a - \varphi_b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Używając nowych zmiennych

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b) \quad \text{i} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_a - \varphi_b) \quad (1.4.8)$$

otrzymujemy dwa niezależne równania dla każdej z tych zmiennych:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + (\omega_0^2 + 2K) \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

Każde z tych równań ma postać równania oscylatora harmonicznego, którego częstość wynosi odpowiednio:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 && \text{dla drgań opisywanych zmienną } \varphi_1 \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2K} && \text{dla drgań opisywanych zmienną } \varphi_2 \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Rozwiązania równań tego typu są nam już znane:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= A \cos(\omega_1 t + \delta_1) \\ \varphi_2(t) &= B \cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Każde z tych równań opisuje pewne niezależne drganie harmoniczne, są to tzw. drgania normalne wahadeł sprzężonych. Pierwsze drganie normalne odbywa się z częstością  $\omega_1$ , równą częstości drgań własnych wahadła swobodnego  $\omega_0$ , a drugie drganie normalne odbywa się z większą od  $\omega_1$  częstością  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$ . Aby zobaczyć te drgania w ruchu dwóch identycznych wahadeł sprzężonych musimy wiedzieć jak wprowadzić je w ruch. W tym celu musimy powiązać zmienne  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  ze zmiennymi  $\varphi_a$  i  $\varphi_b$ , będącymi kątami wychylenia wahadeł z położenia równowagi. Ponieważ, na mocy wzoru (1.4.8),  $\varphi_a = \varphi_1 + \varphi_2$  i  $\varphi_b = \varphi_1 - \varphi_2$ , to jako rozwiązania otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\varphi_a(t) &= A \cos(\omega_1 t + \delta_1) + B \cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ \varphi_b(t) &= A \cos(\omega_1 t + \delta_1) - B \cos(\omega_2 t + \delta_2)\end{aligned}\quad (1.4.12)$$

Aby układ wykonywał pierwsze drganie normalne potrzeba, aby w dowolnej chwili  $\varphi_2 = 0$ , co jest spełnione gdy  $B = 0$ . Wtedy

$$\varphi_a(t) = A \cos(\omega_1 t + \delta_1) = \varphi_b(t), \quad (1.4.13)$$

czyli każde wahadło drga z częstością  $\omega_1 = \omega_0$  i w dowolnej chwili mamy  $\varphi_a = \varphi_b$ . Podobnie, aby układ wykonywał drugie drganie normalne w dowolnej chwili  $\varphi_1 = 0$ , co jest równoważne wymaganiu aby  $A = 0$ . Wtedy

$$\varphi_a(t) = B \cos(\omega_2 t + \delta_2) = -\varphi_b(t) \quad (1.4.14)$$

i każde z wahadeł drga z częstością  $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2K}$  i w każdej chwili  $\varphi_a = -\varphi_b$ .

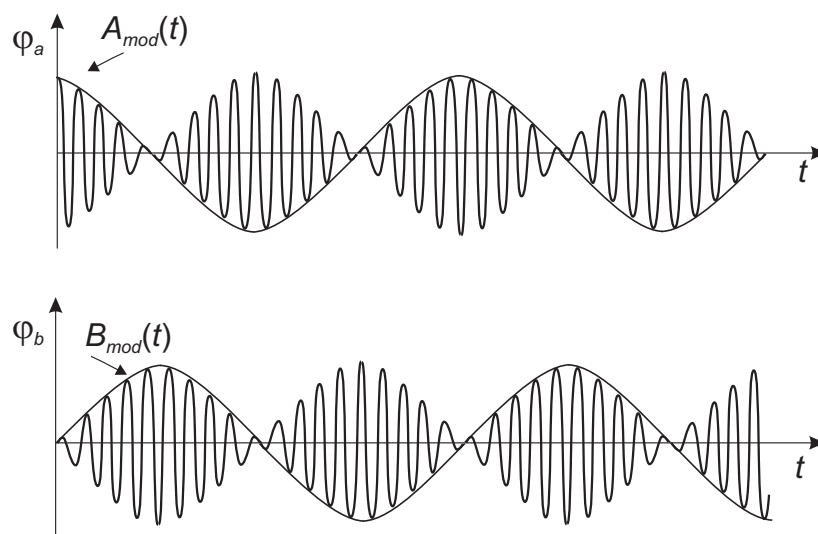
Rozważmy przypadek, gdy dwa drgające jednakowe wahadła sprzężone nie wykonują drgań normalnych. Dowolne rozwiązanie układu równań ruchu można przedstawić jako kombinację liniową znalezionych rozwiązań (1.4.12). Jeżeli, dla prostoty rachunku, przyjmiemy równość amplitud drgań normalnych i fazy początkowe równe zero ( $A = B$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ) to z równań (1.4.12) otrzymamy:

$$\begin{aligned}\varphi_a(t) &= 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) = A_{mod}(t) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) \\ \varphi_b(t) &= 2A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right) = B_{mod}(t) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)\end{aligned}\quad (1.4.15)$$

Powyższe zależności przedstawione są w postaci graficznej na rysunku 1.4.2.

Opisując zachowanie wahadeł na podstawie powyższych równań, możemy powiedzieć, że każde z nich wykonuje drgania o częstości  $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$  i amplitudzie zmieniającej się w czasie z częstością  $\omega_{mod} = (\omega_2 - \omega_1)/2$ . Jednakże, gdy jedno z wahadeł ma maksymalne wychylenie, drugie w tym momencie spoczywa. Następnie amplituda pierwszego wahadła stopniowo maleje, a drugiego rośnie, aż sytuacja się odwróci. Następnie amplituda drugiego wahadła stopniowo maleje, a pierwszego rośnie i sytuacja powtarza się cyklicznie. W ciągu jednego okresu modulacji amplituda każdego





Rys. 1.4.2: Zależność wychylenia od czasu dla wahadeł sprzężonych wykonujących dudnienia (przy założeniu jednakowych amplitud drgań normalnych i faz początkowych równych zero).

wahadła dwukrotnie osiąga wartość maksymalną. Mówimy, że wahadła wykonują dudnienia z częstością  $\omega_d = \omega_2 - \omega_1$ . Dudnienia w układzie wahadeł sprzężonych polegają na okresowym wzmacnianiu i wygaszaniu amplitudy drgania początkowego, są więc wynikiem superpozycji drgań normalnych układu.

Zjawisko dudnień dwóch jednakowych wahadeł sprzężonych jest bardzo ładnym przykładem przekazu energii. W przypadku, gdy nie ma strat energii (dyssypacji energii) wahadła na zmianę przekazują sobie stopniowo całą energię i przekaz ten odbywa się z częstością dudnień.

Zadanie 1. Pokaż, że prawdziwy jest związek:

$$T_d = \frac{T_0 T_2}{T_0 - T_2}, \quad (1.4.16)$$

gdzie  $T_0$  jest okresem drgań swobodnych wahadeł,  $T_2$  jest okresem drugiego drgania normalnego układu jednakowych wahadeł sprzężonych, a  $T_d$  jest okresem dudnień.

Zadanie 2. Wykaż, że w przypadku słabego sprzężenia (tj. dla  $K \ll \omega_0^2$ ) dla układu jednakowych wahadeł sprzężonych możemy zapisać:

$$D_s = 4\pi^2 \frac{J}{T_d T_0}. \quad (1.4.17)$$

Uwaga: skorzystaj ze wzorów (1.4.5) i (1.4.10) oraz przybliżenia  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$  dla małych wartości  $x$ .

## 1.4.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

W skład układu pomiarowego wchodzi: dwa jednakowe wahadła fizyczne, sprężyna (jako urządzenie sprzęgające wahadła), przymiar metrowy, suwmiarka i stoper.

### Przebieg doświadczenia

Zanotuj masy pręta i krążka podane przy ćwiczeniu. Dokonaj pomiarów niezbędnych do wyznaczenia momentów bezwładności wahadeł (moment bezwładności używanego w tym ćwiczeniu wahadła jest sumą momentów bezwładności pręta i krążka liczonych względem osi obrotu wahadła). Wykonaj przynajmniej trzy pomiary każdej wielkości.

Ustal, czy wahadła można uważać za identyczne. Jeżeli nie, dokonaj koniecznej korekty. Zmierz czas trwania dwudziestu okresów drgań każdego wahadła swobodnego. Pomiar powtórz dziesięciokrotnie.

Połącz wahadła za pomocą sprężyny zamocowanej w połowie długości wahadeł. Wykonaj pomiar czasu trwania dwudziestu okresów dla pierwszego i drugiego drgania normalnego. Każdy pomiar powtórz trzykrotnie. Wykonaj pomiar czasu trwania dziesięciu dudnień powtarzając pomiar trzykrotnie. Dla kilku różnych długości sprzężenia  $s$  wykonaj pomiar czasu trwania dziesięciu dudnień. Każdy pomiar powtórz trzykrotnie.

## 1.4.3 Opracowanie wyników

Wyznaczyć okresy drgań wahadeł swobodnych oraz oszacować ich niepewności. Czy wahadła można uważać za jednakowe (czy uzyskane wartości są zgodne w granicach niepewności pomiarowych)? Znaleźć wartość częstości drgań własnych wahadeł swobodnych i jej niepewność. Obliczyć wartości momentu bezwładności  $J$  i momentu kierującego  $D$  wahadeł użytych w tym doświadczeniu oraz oszacować ich niepewności. Korzystając z tych wartości obliczyć częstości drgań własnych. Otrzymany wynik porównać z wartością wyznaczoną eksperymentalnie.

Sprawdzić czy wyznaczone eksperymentalnie wartości  $T_0$ ,  $T_2$  i  $T_d$  spełniają związek (1.4.16). Wyznaczyć częstość pierwszego i drugiego drgania normalnego oraz częstość dudnień i oszacować ich niepewności. Uzyskane wyniki porównać z przewidywaniami teoretycznymi.

Korzystając ze związku (1.4.17) wyznaczyć wartości momentu sprzęgającego  $D_s$  dla różnych wartości długości sprzężenia  $s$  wraz z niepewnościami pomiarowymi. Zależność  $D_s(s)$  przedstawić na wykresie nanosząc prostokąty niepewności pomiarowych. Do danych eksperymentalnych dopasować odpowiedni wielomian.

Wyznaczyć wartości momentu sprzęgającego  $D_s$  korzystając z zależności (1.4.5) i (1.4.10) i oszacować niepewność pomiarową. Czy otrzymana wartość jest zgodna z wartością uzyskaną metodą opisaną powyżej? Która z tych metod zapewnia większą precyzję wyznaczenia momentu sprzęgającego wahadeł?

## 1.5 Badanie drgań modelu cząsteczki czteroatomowej

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie widma drgań układu czterech wahadeł sprzężonych oraz wyznaczenie momentu kierującego i efektywnego momentu bezwładności wahadeł.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- *zjawisko rezonansu mechanicznego;*
- *model cząsteczki czteroatomowej;*
- *drżania układu sprzężonych oscylatorów harmonicznyc.*

Literatura podstawowa: [11], [4], [36], [2].

### 1.5.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Pojęcia oscylatora harmonicznego prostego, tłumionego i wymuszonego omówione są w rozdziałach 1.1 i 1.2. Dodatkowo drżania dwóch wahadeł sprzężonych przedstawione są w rozdziale 1.4.

#### Rezonans

Równanie oscylatora o jednym stopniu swobody wymuszanego siłą harmoniczną można zapisać następująco:

$$\ddot{x}(t) + \Gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (1.5.1)$$

gdzie  $\Gamma$  jest współczynnikiem tłumienia a  $\omega_0$  częstością własną oscylatora. Wygodnie jest przedstawić rozwiązanie tego równania nie za pomocą amplitudy i przesunięcia fazowego, jak się często robi, a za pomocą dwóch amplitud, co z matematycznego punktu widzenia jest równoważne:

$$x(t) = A_{ab} \sin \omega t + A_{el} \cos \omega t. \quad (1.5.2)$$

Podstawiając to rozwiązanie do równania (1.5.1) łatwo jest obliczyć że:

$$A_{ab} = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (1.5.3)$$

$$A_{el} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (1.5.4)$$

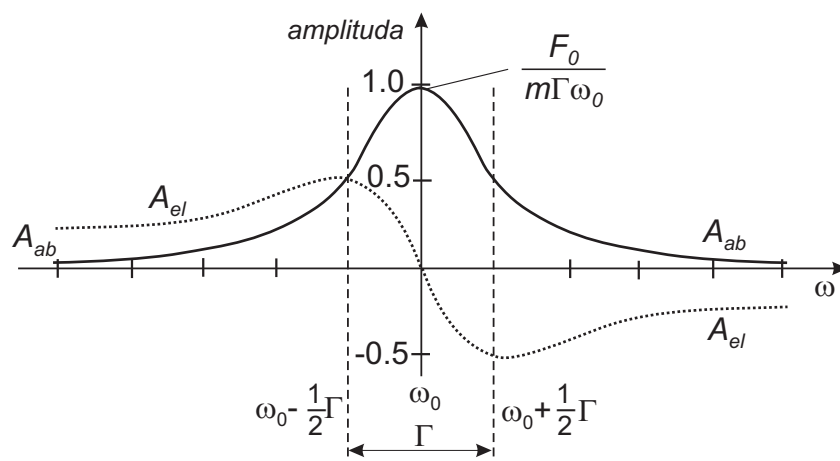
Amplituda  $A_{ab}$  jest amplitudą drgań przeciwnych w fazie do siły wymuszającej (w równaniu (1.5.1) występuje człon  $F_0 \cos \omega t$ ) i tylko ona daje wkład do uśrednionej w czasie absorpcji energii i stąd nazywana jest amplitudą absorpcyjną. Amplituda  $A_{el}$  nazywana jest amplitudą elastyczną. Uśredniona po czasie szybkość absorpcji energii, czyli uśredniona po czasie moc  $P$  wynosi:

$$P = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab}. \quad (1.5.5)$$

Przyjmuje ona wartość maksymalną dla częstości  $\omega = \omega_0$ . Wykresy obu amplitud zamieszczone są na rysunku 1.5.1. Widać, że w pobliżu rezonansu dominująca jest amplituda absorpcyjna, natomiast daleko (przyjmuje się zwykle że „daleko” oznacza w odległości większej niż  $10 \Gamma$ ) dominuje amplituda elastyczna. Amplitudę absorpcyjną (1.5.4) można przekształcić następująco:

$$A_{ab}(\omega) = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} = A_{ab}(\omega_0) \frac{\Gamma^2 \omega_0 \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (1.5.6)$$

gdzie  $A_{ab}(\omega_0) = F_0/m\Gamma\omega_0$ . W pobliżu rezonansu można przybliżyć wszystkie  $\omega$  przez  $\omega_0$  za wyjątkiem wyrazu  $(\omega_0 - \omega)^2$ . Wtedy amplituda absorpcyjna przyjmie postać:



Rys. 1.5.1: Rezonans w przypadku oscylatora harmonicznego wymuszonego siłą  $F_0 \cos \omega t$ .

$$A_{ab}(\omega) = A_{ab}(\omega_0) \frac{(\frac{1}{2}\Gamma)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{1}{2}\Gamma)^2}. \quad (1.5.7)$$

Równanie (1.5.7) opisuje krzywą nazywaną rozkładem Lorentza. Z równania (1.5.7) widać, że szerokość połowkowa, czyli różnica częstości, dla której amplituda spada do połowy wartości maksymalnej, jest równa  $\Gamma$ .

### Układy o większej niż jeden liczbie stopni swobody

Na ogół elementy układu drgającego o kilku stopniach swobody nie poruszają się prostym ruchem harmonicznym. Można jednak pokazać, że ruch takiego układu może

być opisany jako superpozycja tylu niezależnych ruchów harmonicznycch ile jest stopni swobody układu. Drgania te nazywane są drganiami normalnymi. Układ wykonujący drgania normalne ma następujące własności:

- każdy element porusza się prostym ruchem harmonicznym,
- wszystkie elementy poruszają się z taką samą częstością i jednocześnie mijają położenie równowagi,
- drgania poszczególnych elementów mogą się różnić amplitudą.

Dobierając odpowiednio warunki początkowe można doprowadzić do sytuacji, w której układ będzie wykonywał tylko drgania normalne jednej postaci.

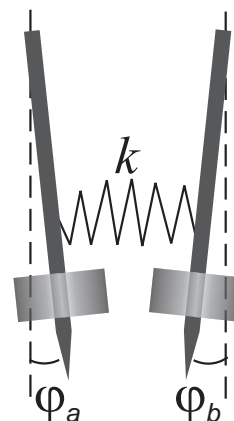
### Dwa wahadła sprzężone

Opis ruchu dwóch sprzężonych wahał przedstawiony został w podrozdziale 1.4.1. Tutaj przedyskutowany jest ponownie przy zastosowaniu innego aparatu matematycznego, który zostanie użyty również do opisu czterech wahał sprzężonych.

Rozważmy ruch dwóch identycznych, nietłumionych, wahał fizycznych o momentach bezładności  $J$ , sprzężonych sprężyną o stałej sprężystości  $k$  (rysunek 1.5.2).

Pochodzący od sił grawitacji moment siły działający na wahała jest równy  $N_g = -mgl \sin \varphi$  (a w przybliżeniu małych kątów  $N_g \approx -mgl\varphi$ ). Wielkość  $D_1 = mgl$  nazywana jest momentem kierującym. Na wahała działa dodatkowo moment siły pochodzący od sprężyny. Jeżeli sprężyna przymocowana jest w odległości  $s$  od punktu zawieszania wahała to działający na wahała moment siły wynosi  $N_s = -ks^2(\varphi_a - \varphi_b)$ . Oznaczając moment sprzęgający przez  $D_s = ks^2$ , ruch wahał można opisać następującym układem równań:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_a &= -D_1\varphi_a - D_s(\varphi_a - \varphi_b) \\ J\ddot{\varphi}_b &= -D_1\varphi_b - D_s(\varphi_b - \varphi_a) \end{aligned} \quad (1.5.8)$$



Rys. 1.5.2: Dwa identyczne wahała sprzężone sprężyną.

Ten układ równań można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_a &= (-\omega_0^2 - K)\varphi_a + K\varphi_b \\ \ddot{\varphi}_b &= K\varphi_a + (-\omega_0^2 - K)\varphi_b \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

gdzie  $\omega_0^2 = D_1/J$  oraz  $K = D_s/J$ . W postaci macierzowej układ równań ma postać:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_a \\ \ddot{\varphi}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 - K & K \\ K & -\omega_0^2 - K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix} \quad (1.5.10)$$

Aby rozwiązać taki układ równań trzeba je rozseparować, aby w każdym z nich występowała tylko jedna zmienna. Sprowadza się to do diagonalizacji macierzy współczynników. W tym celu należy rozwiązać równanie charakterystyczne postaci:

$$\begin{vmatrix} -\omega_0^2 - K - \lambda & K \\ K & -\omega_0^2 - K - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.5.11)$$

Jak łatwo obliczyć wartości własne są równe:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\omega_0^2 \\ \lambda_2 &= -\omega_0^2 - 2K \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

Nasze równania przyjmują wtedy postać:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 - 2K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (1.5.13)$$

czyli:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\omega_0^2 \varphi_1 \\ \ddot{\varphi}_2 &= -(\omega_0^2 + 2K) \varphi_2 \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Nowe zmienne  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  nazywane są zmiennymi normalnymi i obliczyć je można działając macierzą złożoną z wektorów własnych na wektor  $(\varphi_a, \varphi_b)$ . Nowe zmienne można wyrazić jako superpozycje pierwotnych zmiennych:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}(\varphi_a + \varphi_b) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}(\varphi_a - \varphi_b) \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

Wyraz  $1/2$  w tych równaniach pochodzi z normalizacji wektorów własnych. Z równań (1.5.14) łatwo teraz obliczyć odpowiednie częstotliwości drgań normalnych:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_0 \\ \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2K}\end{aligned}\quad (1.5.16)$$

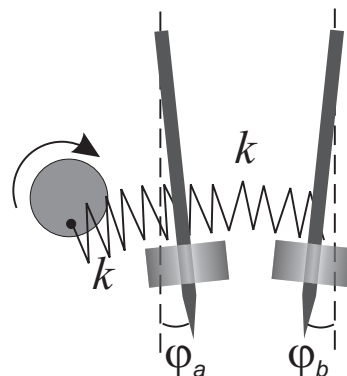
Pierwsze z równań (1.5.14) opisuje ruch obu wahadeł z częstością  $\omega_1$  oraz taką samą fazą, natomiast drugie z równań opisuje ruch z częstością  $\omega_2$  oraz przeciwną fazą.

### Dwa wymuszone i tłumione wahadła sprzężone

Rozważmy teraz układ dwóch tłumionych sprzężonych wahadeł, na który działa moment siły wymuszającej tak jak przedstawiono na rysunku 1.5.3. W takim przypadku ruch wahadeł opisany jest przez układ równań:

$$\begin{aligned}J\ddot{\varphi}_a &= -D_1\varphi_a - D_s(\varphi_a - \varphi_b) - D_2\dot{\varphi}_a + N_0 \cos \omega t \\ J\ddot{\varphi}_b &= -D_1\varphi_b - D_s(\varphi_b - \varphi_a) - D_2\dot{\varphi}_b\end{aligned}, \quad (1.5.17)$$

gdzie  $D_2$  jest momentem siły tłumiącej, a  $N_0 \cos \omega t$  jest momentem siły wymuszającej działającym na wahadło  $a$ . Niestety nie możemy postępować tak samo jak w przypadku wahadła nietłumionego, gdyż w trakcie obliczania wartości własnych musielibyśmy wyciągać pierwiastek z operatora różniczkowania, a nie jest to dobrze określona matematycznie czynność. W zamian wykorzystamy obliczoną w poprzednim rozdziale postać drgań normalnych – równania (1.5.15). Łatwo jest zauważyć, że aby uzyskać wyrażenia na zmienne normalne należy równania (1.5.17) dodać i odjąć stronami, a następnie podzielić przez dwa. W wyniku otrzymujemy:



Rys. 1.5.3: Dwa wymuszone wahadła sprzężone. Obie sprężyny są identyczne.

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 &= -\omega_0^2\varphi_1 - \Gamma\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}a_0 \cos \omega t \\ \ddot{\varphi}_2 &= -(\omega_0^2 + 2K)\varphi_2 - \Gamma\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}a_0 \cos \omega t\end{aligned}\quad (1.5.18)$$

gdzie  $\Gamma = D_2/J$  oraz  $a_0 = N_0/J$ .

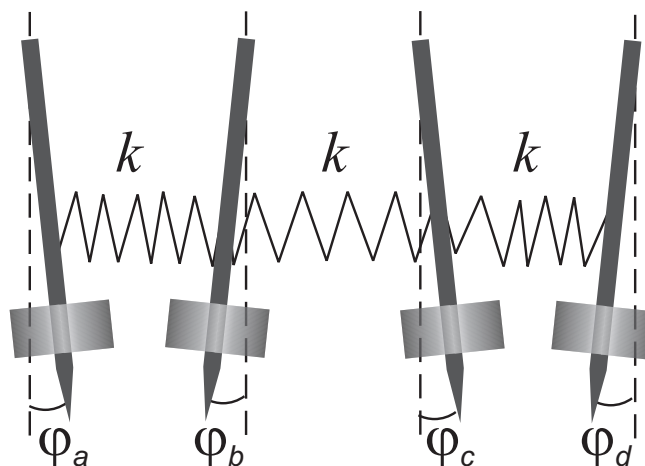
Widać, że obie współrzędne normalne zachowują się jak współrzędne dwóch różnych oscylatorów wymuszanych momentem siły  $1/2N_0 \cos \omega t$ , o różnych częstościach własnych identycznych z częstościami układu niewymuszonego i danymi równaniami

(1.5.16). Zatem jeżeli będziemy badać odpowiedź układu na wymuszanie w zależności od częstotliwości wymuszającej zobaczymy dwa rezonanse o częstotliwościach odpowiednio  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , jeśli oczywiście będą one wystarczająco odseparowane.

### Cztery wahadła sprzężone

Rozważmy teraz przypadek czterech wahadeł sprzężonych, nietłumionych i niewymuszanych (rysunek 1.5.4). Układ równań opisujący ruch w tym przypadku wygląda następująco:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_a &= -\omega_0^2 \varphi_a - K(\varphi_a - \varphi_b) \\ \ddot{\varphi}_b &= -\omega_0^2 \varphi_b - K[(\varphi_b - \varphi_c) - (\varphi_a - \varphi_b)] \\ \ddot{\varphi}_c &= -\omega_0^2 \varphi_c - K[(\varphi_c - \varphi_d) - (\varphi_b - \varphi_c)] \\ \ddot{\varphi}_d &= -\omega_0^2 \varphi_d - K(\varphi_d - \varphi_c)\end{aligned}\quad (1.5.19)$$



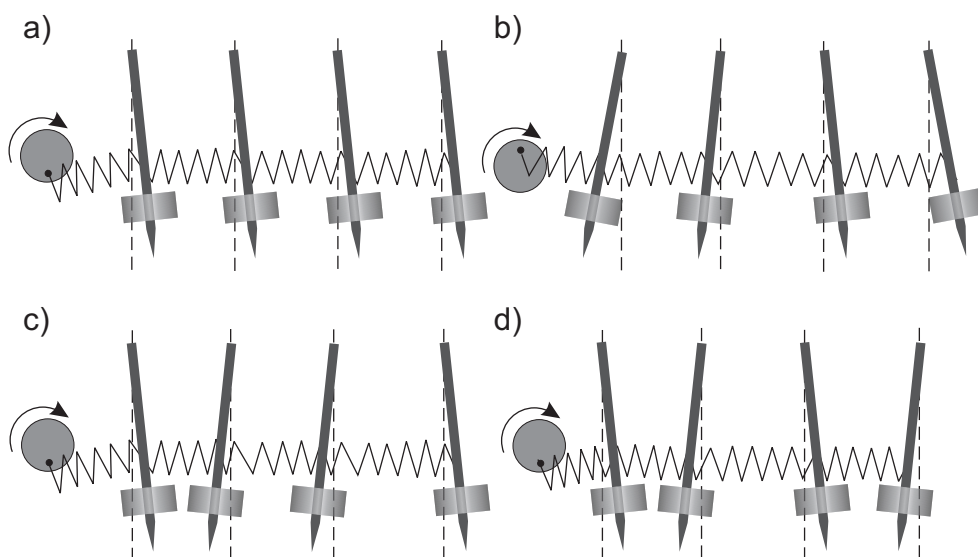
Rys. 1.5.4: Cztery wahadła sprzężone. Kąty wychYLENIA oznaczone odpowiednio dla kolejnych wahadeł:  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$ ,  $\varphi_d$ . Stałe sprężystości wszystkich sprężyn są takie same.

Postępując tak samo jak w przypadku dwóch wahadeł musimy zdiagnozować macierz postaci:

$$\begin{vmatrix} -\omega_0^2 - K & K & 0 & 0 \\ K & -\omega_0^2 - 2K & K & 0 \\ 0 & K & -\omega_0^2 - 2K & K \\ 0 & 0 & K & -\omega_0^2 - K \end{vmatrix}. \quad (1.5.20)$$



Niestety diagonalizacja tej macierzy jest problemem pracochłonnym i nietrywialnym. Dlatego warto przed rozpoczęciem obliczeń zastanowić się jakie mogą być wyniki. Układ czterech wahadeł ma cztery drgania normalne. Ich wygląd przedstawiony jest na rysunku 1.5.5. W modzie pierwszym (rysunek 1.5.5a) wszystkie wahadła drgają w fazie, zatem sprężyny nie są w ogóle napięte. Jest to przypadek taki sam jak drgań opisanych pierwszym równaniem (1.5.15). Zatem można zgadnąć, że jedną z postaci drgań normalnych będzie ruch w zgodnej fazie, dla którego wartość własna jest równa  $\lambda_1 = -\omega_0^2$ . Przyglądnijmy się teraz trzeciemu modowi z rysunku 1.5.5c. Widać że dwa wewnętrzne wahadła drgają ze zgodną fazą, więc sprężyna pomiędzy nimi nie jest napięta. Zatem lewa para wahadeł drga niezależnie od prawej pary, wykonując ruch opisany drugim równaniem (1.5.15). Można więc zgadnąć kolejną wartość własną macierzy (1.5.20) wynoszącą  $\lambda_3 = -\omega_0^2 - 2K$ . Dzięki temu można wielomian czwartego stopnia, który pojawia się podczas obliczania wyznacznika macierzy (1.5.20) zredukować do stopnia drugiego, który jest już łatwy do rozwiązania. Po zdiagonalizowaniu macierz ma postać:



Rys. 1.5.5: Konfiguracje drgań czterech wymuszonych wahadeł w okolicach kolejnych rezonansów: a) odpowiada częstości  $\omega_1$ , b) częstości  $\omega_3$ , c) częstości  $\omega_2$  i d) częstości  $\omega_4$ .

$$\begin{vmatrix} -\omega_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 - (2 - \sqrt{2})K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 - 2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 - (2 + \sqrt{2})K \end{vmatrix}. \quad (1.5.21)$$

zatem układ równań opisujący drgania normalne jest następujący:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 &= -\omega_0^2 \varphi_1 \\
 \ddot{\varphi}_2 &= -[\omega_0^2 + (2 - \sqrt{2})K] \varphi_2 \\
 \ddot{\varphi}_3 &= -[\omega_0^2 + 2K] \varphi_3 \\
 \ddot{\varphi}_4 &= -[\omega_0^2 + (2 + \sqrt{2})K] \varphi_4
 \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

Odpowiednie częstotliwości drgań wynoszą:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \omega_0 \\
 \omega_2 &= \sqrt{\omega_0^2 + (2 - \sqrt{2})K} \\
 \omega_3 &= \sqrt{\omega_0^2 + 2K} \\
 \omega_4 &= \sqrt{\omega_0^2 + (2 + \sqrt{2})K}
 \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

natomiast odpowiednie współrzędne normalne mają postać:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \frac{1}{4} [\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d] \\
 \varphi_2 &= \frac{1}{4} [\varphi_a + (-1 + \sqrt{2})\varphi_b + (1 - \sqrt{2})\varphi_c - \varphi_d] \\
 \varphi_3 &= \frac{1}{4} [\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c + \varphi_d] \\
 \varphi_4 &= \frac{1}{4} [\varphi_a - (1 + \sqrt{2})\varphi_b + (1 + \sqrt{2})\varphi_c - \varphi_d]
 \end{aligned} \tag{1.5.24}$$

Układ czterech wahadeł sprzężonych ma zatem cztery częstości drgań własnych, z których dwie są równe częstościom drgań układu dwóch wahadeł.

### Cztery wymuszone i tłumione wahadła sprzężone

Aby znaleźć równania opisujące przy pomocy współrzędnych normalnych drgania układu czterech wahadeł, które są sprzężone sprężyną wytwarzającą moment siły  $D_s$ , tłumione momentem siły  $D_2$  (takim samym dla każdego z wahadeł) i wymuszane harmonicznym momentem siły  $N_0 \cos \omega t$ , posłużymy się taką samą metodą jak poprzednio, aby ponownie uniknąć konieczności pierwiastkowania operatorów różniczkowania. Trzeba zauważyć, że można przejść z równań (1.5.19) do równań (1.5.22) odpowiednio dodając i odejmując stronami pierwotne równania w taki sposób, aby uzyskać kombinacje liniowe zmiennych dane równaniami (1.5.24). Napiszmy więc układ równań opisujący Ruch układu czterech wymuszonych i tłumionych wahadeł sprzężonych

(przy założeniu, że moment siły wymuszającej działa na wahadło  $a$ ) opisany jest przez układ równań:

$$\begin{aligned}
 J\ddot{\varphi}_a &= -D_1\varphi_a - D_s(\varphi_a - \varphi_b) - D_2\dot{\varphi}_a + N_0 \cos \omega t \\
 J\ddot{\varphi}_b &= -D_1\varphi_b - D_s[(\varphi_b - \varphi_c) - (\varphi_a - \varphi_b)] - D_2\dot{\varphi}_b \\
 J\ddot{\varphi}_c &= -D_1\varphi_c - D_s[(\varphi_c - \varphi_d) - (\varphi_b - \varphi_c)] - D_2\dot{\varphi}_c \\
 J\ddot{\varphi}_d &= -D_1\varphi_d - D_s(\varphi_d - \varphi_c) - D_2\dot{\varphi}_d
 \end{aligned} \tag{1.5.25}$$

Stosując opisaną powyżej metodę łatwo otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 &= -\omega_0^2\varphi_1 - \Gamma\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{4}a_0 \cos \omega t \\
 \ddot{\varphi}_2 &= -[\omega_0^2 + (2 - \sqrt{2})K]\varphi_2 - \Gamma\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{4}a_0 \cos \omega t \\
 \ddot{\varphi}_3 &= -[\omega_0^2 + 2K]\varphi_3 - \Gamma\dot{\varphi}_3 + \frac{1}{4}a_0 \cos \omega t \\
 \ddot{\varphi}_4 &= -[\omega_0^2 + (2 + \sqrt{2})K]\varphi_4 - \Gamma\dot{\varphi}_4 + \frac{1}{4}a_0 \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

W wyniku tej operacji otrzymujemy podobne zachowanie jak w przypadku dwóch wahadeł. Współrzędne normalne zachowują się jak współrzędne czterech różnych oscylatorów wymuszanych momentem siły  $1/4N_0 \cos \omega t$ . Częstości drgań własnych są takie same, jak dla drgań niewymuszonych i dane są równaniami (1.5.23).

## 1.5.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Do dyspozycji jest układ czterech wahadeł sprzężonych, połączonych sprężynami kolistymi, które można zdemontować. Wahadła posiadają takie same ciężarki oraz blaszki, na które działa siła oporu powietrza, gdy wahadła są w ruchu. Do końców wahadeł zamontowane są lasery, które oświetlają skalę położoną pod wahadłami. Trzeba pamiętać, że interesuje nas maksymalne wychylenie wahadeł (kąt), zatem odczyt ze skali liniowej musi zostać w opracowaniu ćwiczenia przeliczony na radiany. Jedno z wahadeł jest połączone z silnikiem krokowym, który wymusza drgania układu. Silnik jest sterowany za pomocą generatora. Silnik krokowy wykonuje 1600 kroków na obrót. Innymi słowy, jeśli generator jest nastawiony na 1600  $Hz$ , silnik obraca się z częstotliwością 1  $Hz$ . Zatem jeśli generator ma częstotliwość 800  $Hz$ , to silnik obraca się z częstotliwością 0.5  $Hz$  itd.

### Przebieg doświadczenia

Celem ćwiczenia jest uzyskanie widma (czyli zależności amplitudy od częstotliwości) układu czterech wymuszonych wahań sprzężonych. Spodziewamy się, że rezonans wystąpi dla czterech częstotliwości (konfiguracje wahań w kolejnych rezonansach przedstawione są na rysunku 1.5.5). Jednak warto wcześniej wiedzieć dla jakich częstotliwości można się spodziewać rezonansów. W tym celu wykorzystamy układ dwóch wahań sprzężonych, który dostaniemy odłączając sprężynę łączącą środkowe wahań. Następnie kilkakrotnie należy zmierzyć częstotliwości drgań normalnych układu dwóch wahań (pierwsze drganie normalne, gdy wahań drgają ze zgodną fazą, sprężyna nie jest napięta i częstość jest równa częstości własnej wahań swobodnego, oraz drugie drganie normalne, gdy wahań drgają z przeciwnymi fazami). Wprawiając wahań do ruchu należy pamiętać, że ruch wahań jest harmoniczny w przybliżeniu małych drgań, gdyż wyprowadzając wzory przybliżyliśmy sinus kąta wychylenia przez kąt. Nie można zatem używać dużych amplitud. Znając częstotliwości drgań normalnych, z równań (1.5.16) można obliczyć wielkości  $\omega_0^2$  oraz  $K$  dla takich wahań. Jak wynika z analizy teoretycznej przedstawionej w poprzednich rozdziałach częstości drgań własnych układu dwóch wahań są zarazem pierwszą i trzecią częstotliwością rezonansową układu czterech wahań, a co więcej, korzystając z równań (1.5.23) i znajomości wielkości  $\omega_0^2$  i  $K$  można obliczyć dwie pozostałe częstotliwości rezonansowe układu. Wartości zmierzone będą się jednak różnić od obliczonych.

Drugą częścią doświadczenia jest pomiar widma amplitudy drgań układu. Należy zmieniać powoli częstotliwość generatora wymuszającego i zapisywać amplitudy wszystkich wahań. Równania w części teoretycznej opisują drgania stacjonarne, zatem po zmianie częstotliwości siły wymuszającej należy chwilę odczekać aby mogły się one ustalić. Rezonanse są wąskie i odległe od siebie. Dlatego ważne jest, aby rozsądnie zaplanować pomiary – blisko rezonansów częstość generatora należy zmieniać z małym krokiem, ponieważ trzeba będzie tam dopasowywać krzywe rezonansowe. Z kolei daleko od rezonansów krok zmiany częstości generatora może być większy.

Zgodnie z przedstawionym powyżej opisem przebiegu doświadczenia należy kolejno wykonać następujące czynności:

- rozłączyć środkową sprężynę, aby zmierzyć częstości układu dwóch wahań;
- zmierzyć częstości pierwszych i drugich drgań normalnych układu dwóch wahań;
- obliczyć oczekiwane wartości częstości rezonansowych dla układu czterech wahań;
- zmierzyć widmo drgań  $A(\omega)$  (amplitudy od częstotliwości) dla układu czterech wahań – należy mierzyć drgania każdego z wahań, pamiętając, że do dopasowania krzywej rezonansowej dla każdego z rezonansów potrzeba ponad 10 punktów.

### 1.5.3 Opracowanie wyników

Obliczyć częstości drgań własnych dwóch wahań oraz ich niepewności pomiarowe. Używając odpowiednich równań obliczyć efektywny moment kierujący i efektyw-

ną stałą sprzężenia ( $\omega_0^2$  oraz  $K$ ). Wyznaczyć niepewności pomiarowe tych wielkości wynikające z otrzymanych wcześniej niepewności pomiarowych częstości. Używając wyznaczonych parametrów układu wahadeł i odpowiednich równań obliczyć częstości rezonansowe układu czterech wahadeł wraz z ich niepewnościami pomiarowymi.

Narysować widmo  $A(\omega)$  dla każdego z wahadeł. Pomiaru amplitudy i okresu drgań są przeprowadzane jednokrotnie, obarczone są zatem niepewnością systematyczną, która musi zostać zaznaczona na wykresach. Do każdego z obserwowanych pików dopasować krzywą Lorentza. Dopasowania dają położenia rezonansów i ich szerokości. Należy wartości te starannie przeanalizować i skomentować odpowiadając na poniższe pytania. Dlaczego amplitudy różnych wahadeł różnią się w niektórych rezonansach? Dlaczego szerokość linii dla różnych rezonansów nie jest równa? Czego miarą jest szerokość linii? Należy też porównać przewidywane wartości częstości rezonansowych ze zmierzonymi i skomentować ewentualne występujące różnice.

## 1.6 Badanie ruchu obrotowego bryły sztywnej

Celem ćwiczenia jest sprawdzenie praw ruchu obrotowego bryły sztywnej.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- bryła sztywna;
- moment bezwładności;
- twierdzenie Steinera;
- prawa dynamiki ruchu obrotowego.

Literatura podstawowa: [1], [2], [5].

### 1.6.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Bryła sztywna

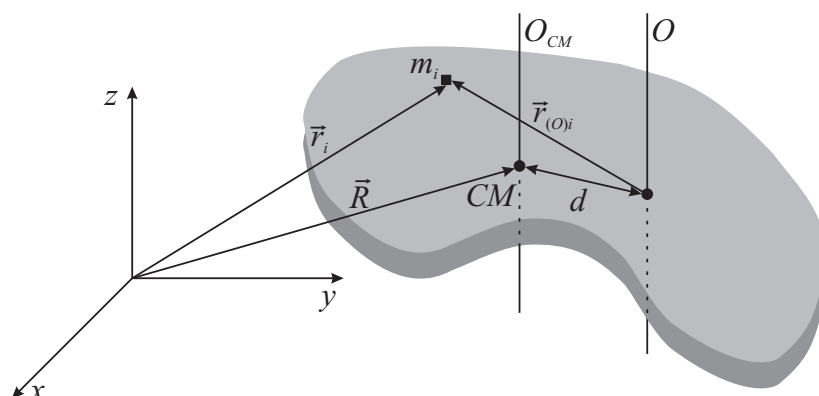
Bryłą sztywną nazywamy ciało stałe, które nie deformuje się pod wpływem sił zewnętrznych. Ruch bryły można rozłożyć na ruch postępowy jej środka masy oraz ruch obrotowy. Ruchem obrotowym rządzą prawa kinematyki i dynamiki bryły sztywnej.

Przyjmijmy, że bryłę można podzielić na małe kawałki o masach  $m_i$  leżące w położeniach  $\vec{r}_i$  (rysunek 1.6.1). Środek masy bryły ( $CM$ ) to punkt wskazany przez wektor:

$$\vec{R} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (1.6.1)$$

gdzie  $M = \sum_i m_i$  to masa bryły. Niech odległości mas  $m_i$  od osi obrotu  $O$  wynoszą  $r_{(O)i}$ . Moment bezwładności bryły względem osi  $O$  to wielkość skalarna:

$$J_{(O)} = \sum_i m_i r_{(O)i}^2. \quad (1.6.2)$$



Rys. 1.6.1: Bryła sztywna z zaznaczonym położeniem środka masy  $CM$  oraz równoległymi do siebie osiami obrotu przechodzącymi przez środek masy  $O_{CM}$  oraz przez dowolny punkt  $O$ .

W przypadku rozciągniętego rozkładu masy ciało można podzielić na nieskończenie małe elementy o masach  $dm$ . Wtedy moment bezwładności bryły względem osi  $O$  można obliczyć z wyrażenia:

$$J_{(O)} = \int r_{(O)}^2 dm. \quad (1.6.3)$$

gdzie  $r_{(O)}$  jest odległością każdego elementu masy od osi obrotu, a całkowanie odbywa się po całej objętości.

### Dynamika ruchu obrotowego

Jeżeli wypadkowy moment siły działający na bryłę sztywną wynosi zero, to bryła pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym (ze stałą prędkością kątową). Pod działaniem momentu siły  $\vec{N}$  bryła sztywna może wykonywać ruch obrotowy. Do opisu ruchu obrotowego używa się kąta  $\vec{\phi}$  o jaki obraca się bryła, prędkości kątowej  $\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$ , przyspieszenia kątowego  $\vec{\epsilon} = d^2\vec{\phi}/dt^2$  oraz momentu pędu  $\vec{L}$ . Równanie opisujące ruch obrotowy wokół osi  $O$  bryły sztywnej o momencie bezwładności  $J_{(O)}$  ma postać:

$$\vec{N} = J_{(O)} \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}, \quad (1.6.4)$$

lub zapisane przy użyciu momentu pędu ma postać:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (1.6.5)$$

Najprostszym przypadkiem ruchu obrotowego jest obrót bryły sztywnej dookoła ustalonej osi. Wtedy wektory momentu siły  $\vec{N}$ , prędkości kątowej  $\vec{\omega}$  oraz momentu pędu  $\vec{L} = J_{(O)}\vec{\omega}$  są do siebie równoległe i powiązane są poprzez równanie ruchu:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J_{(O)} \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.6.6)$$

W ogólnym przypadku wektor momentu pędu bryły sztywnej nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej. Wtedy wielkości te powiązane są ze sobą przez:

$$\vec{L} = \hat{J}\vec{\omega}. \quad (1.6.7)$$

gdzie tensor bezwładności  $\hat{J}$  jest tensorem symetrycznym drugiego rzędu. Tensor bezwładności można zawsze zdiagnozować poprzez obrót układu współrzędnych. Osie tego nowego układu współrzędnych nazywane są głównymi osiami bezwładności.

### Twierdzenie Steinera

Najczęściej moment bezwładności można łatwo obliczyć względem osi przechodzącej przez środek masy ciała. Dla określenia momentu bezwładności względem innej osi pomocne jest twierdzenie o osiach równoległych (twierdzenie Steinera).

Oznaczmy przez  $J_{CM}$  moment bezwładności bryły względem osi  $O_{CM}$  przechodzącej przez środek masy (rysunek 1.6.1). Moment bezwładności  $J_{(O)}$  względem osi  $O$  równoległej do osi  $O_{CM}$  wyraża się wzorem:

$$J_{(O)} = J_{CM} + Md^2, \quad (1.6.8)$$

gdzie  $d$  to wzajemna odległość prostych  $O$  i  $O_{CM}$ .

Przykładowo dla jednorodnej kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$  środek masy to jej środek geometryczny, a  $J_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ . Jeżeli oś  $O$  jest styczna do kuli to  $d = R$  więc  $J_{(O)} = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$ .

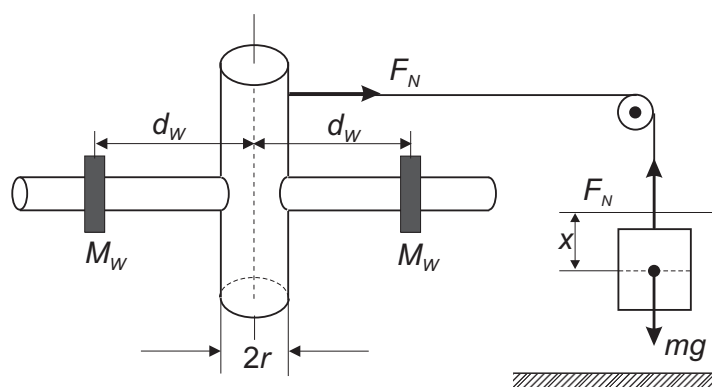
Dla jednorodnego walca o masie  $M$ , promieniu  $R$  i wysokości  $H$  środek masy leży na osi symetrii obrotowej, w połowie wysokości. W tym przypadku można mówić o dwóch wyróżnionych osiach obrotu: osi pokrywającej się z osią symetrii obrotowej z  $J_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$  oraz osi do niej prostopadłej przechodzącej przez środek masy walca z  $J_{CM} = M(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2)$ . Jeżeli oś  $O$  jest styczna do pobocznic walca to korzystając z wzoru (1.6.8) dla  $d = R$  otrzymujemy  $J_{(O)} = \frac{3}{2}MR^2$ .

### 1.6.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Przyrządy: wahadło Oberbecka, bramki elektroniczne do pomiaru czasu, przymiar, kilka par obciążników do umieszczenia na ramionach wahadła oraz pojedyncze obciążniki do rozpędzania wahadła.

Używane w pomiarach wahadło Oberbecka (rysunek 1.6.2) jest obracającym się wokół swojego środka prętem. Do jego ramion można przyczepić ciężarki w kształcie walca (masa  $M_W$ , promień  $R_W$ , wysokość  $H_W$ ). Moment bezwładności tego walca względem osi przechodzącej przez środek masy prostopadłej do osi symetrii walca wynosi  $J_{W,CM} = M_W(\frac{1}{4}R_W^2 + \frac{1}{12}H_W^2)$ . Walec znajduje się w odległości  $d_W$  od osi obrotu wahadła Oberbecka. Korzystając z twierdzenia Steinera obliczamy moment bezwładności walca względem tej osi obrotu -  $J_W = J_{W,CM} + M_W d_W^2$ . Moment bezwładności wahadła bez obciążenia wynosi  $J_X$ . Przy obciążeniu dwoma identycznymi ciężarkami umieszczonymi w tej samej odległości od osi obrotu otrzymujemy całkowity moment bezwładności wahadła równy  $J = J_X + 2J_W$ .



Rys. 1.6.2: Schemat układu doświadczalnego z wahadłem Oberbecka.

Na osi wahadła o promieniu  $r$  nawinięta jest nić, która przechodzi przez blok, a zakończona jest uchwytem na ciężarce. Równanie ruchu postępowego ciężarka o masie  $m$  zawieszony na nici ma postać:

$$mg - F_N = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (1.6.9)$$

gdzie  $F_N$  to siła naciągu nici,  $x$  to odległość na jaką obniży się ciężarek. Na wahadło działa moment siły  $N = F_N r$ , więc równanie ruchu obrotowego wahadła ma postać:

$$(J_X + 2J_W) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = F_N r, \quad (1.6.10)$$

gdzie  $\phi$  to kąt o jaki obróci się wahadło. Zmienne  $x$  i  $\phi$  są ze sobą związane zależnością  $x = r\phi$ , a stąd  $d^2 x/dt^2 = r d^2 \phi/dt^2$ . Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego ciężarka mamy  $x(t) = at^2/2$ , jeżeli w chwili początkowej ciężarek znajdował się w spoczynku. Korzystając z tych związków oraz z równań (1.6.9) i (1.6.10) obliczamy przyspieszenie układu:

$$a = \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{mgr^2}{J_X + 2J_W + mr^2}. \quad (1.6.11)$$



**Przebieg doświadczenia**

Przy pomiarach czasu przelotu bardzo ważne jest takie wybranie położenia początkowego szalki z ciężarkiem, aby po jego starcie natychmiast uruchamiała się fotokomórka. Dzięki temu spełniona jest zależność  $h = at^2/2$  (gdzie  $h$  jest odległością pomiędzy fotokomórkami) i możemy korzystać z równania (1.6.11). W doświadczeniu możemy sprawdzić, czy kwadrat czasu przelotu zależy liniowo od różnych wielkości.

**Zależność  $t^2$  od  $h$** 

$$t^2 = \frac{2h (J_X + 2J_W + mr^2)}{mgr^2} \quad (1.6.12)$$

Odległość  $h$  powiększać np. o 5 cm. Dla każdej wysokości  $h$  zmierzyć kilka czasów przelotu. Wygodniejsze do opracowania jest korzystanie z wahadła bez obciążenia.

**Zależność  $t^2$  od  $d_W^2$** 

$$t^2 = \frac{2h (J_X + 2J_{W,CM} + 2M_W d_W^2 + mr^2)}{mgr^2} \quad (1.6.13)$$

Obciążniki umieścić symetrycznie na obu ramionach wahadła. Zmierzyć kilkakrotnie czasy przelotu dla różnych położzeń  $d_W$  obciążników.

**Zależność  $t^2$  od  $1/m$** 

$$t^2 = \frac{2h [(J_X + 2J_W) (1/m) + r^2]}{gr^2} \quad (1.6.14)$$

Wygodnie jest pracować z wahadłem bez obciążników. Zmierzyć kilkakrotnie czasy przelotu dla różnych obciążeń szalki. Należy zmierzyć również długość i średnicę ramion wahadła Oberbecka, które posłużą do wyznaczenia momentu bezwładności wahadła.

**1.6.3 Opracowanie wyników**

Dla wszystkich badanych relacji mierzonych parametrów wykonać wykresy i dopasować zależność liniową wyznaczając jednocześnie współczynnik korelacji. Wielkość współczynnika korelacji mówi o liniowej zależności badanych wielkości, co potwierdza słuszność praw ruchu obrotowego. Używając dopasowanych współczynników regresji liniowej wyznaczyć moment bezwładności nieobciążonego wahadła Oberbecka.

Obliczyć moment bezwładności nieobciążonego wahadła Oberbecka, traktując je jak walec obracający się względem osi prostopadłej do osi symetrii obrotowej. Wahadło wykonane jest z aluminium, którego gęstość wynosi  $2.7 \text{ g/cm}^3$ . Sprawdzić zgodność

wyników dla momentu bezwładności wahadła otrzymanych przy użyciu obu metod. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.

## 1.7 Badanie ruchu precesyjnego żyroskopu

Celem ćwiczenia jest: zbadanie zależności okresu precesji żyroskopu od okresu obrotu tarczy żyroskopu, zbadanie wpływu masy ciężarka na precesję oraz wyznaczenie momentu bezwładności tarczy.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- bryła sztywna i jej moment bezwładności;
- równanie ruchu obrotowego bryły sztywnej;
- żyroskop (błąk symetryczny) i jego zastosowania;
- zjawisko precesji.

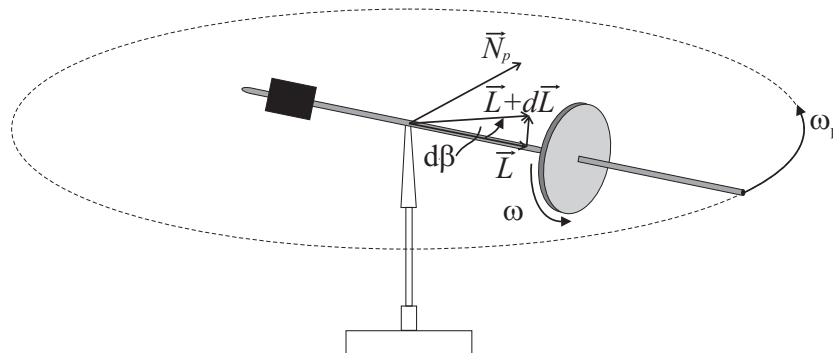
Literatura podstawowa: [2], [5], [6].

### 1.7.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Pojęcie bryły sztywnej, momentu bezwładności oraz dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej zostały omówione w rozdziale 1.6.

#### Żyroskop

Żyroskop (błąk symetryczny) to bryła sztywna o symetrii obrotowej zawieszona w taki sposób, że jeden z punktów osi symetrii obrotowej zajmuje stałe położenie w przestrzeni (rysunek 1.7.1). Zawieszenie pozwala na wprawienie tej bryły w ruch obrotowy wokół wspomnianej osi. Najczęściej moment bezwładności żyroskopu względem tej osi jest wyraźnie większy od momentów bezwładności względem innych osi głównych.



Rys. 1.7.1: Schematyczne przedstawienie żyroskopu. Zaznaczono działający na żyroskop nie-zrównoważony moment siły  $\vec{N}_p$  powodujący precesję, moment pędu żyroskopu  $\vec{L}$  i jego zmianę  $d\vec{L}$ , oraz kąt  $\beta$  o jaki obraca się wektor momentu pędu w czasie precesji.

## Precesja

Jeżeli żyroskop podlega działaniu zewnętrznego momentu siły  $\vec{N}$ , jego moment pędu  $\vec{L}$  zmienia się w czasie zgodnie z równaniem ruchu obrotowego bryły sztywnej

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (1.7.1)$$

Gdy nie występuje wypadkowy moment siły ( $\vec{N} = 0$ ), to bryła sztywna o momencie bezwładności  $J$  obraca się ze stałą prędkością kątową  $\vec{\omega}$  i jej moment pędu pozostaje stały

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}. \quad (1.7.2)$$

Moment siły  $\vec{N}_p$  prostopadły do wektora  $\vec{L}$  nie zmienia wartości momentu pędu, lecz jego kierunek. Jeżeli moment siły  $\vec{N}_p$  działa przy tym w sposób ciągły, to w sposób ciągły zmienia się również kierunek wektora momentu pędu  $\vec{L}$ . Wtedy żyroskop obraca się wokół osi prostopadłej do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\vec{L}$  i  $\vec{N}_p$ . Taki obrót żyroskopu pod wpływem zewnętrznego momentu siły nazywamy precesją (rysunek 1.7.1). Zmianę momentu pędu można zapisać skalarnie jako:

$$\frac{dL}{dt} = L \frac{d\beta}{dt} = L\omega_p, \quad (1.7.3)$$

gdzie  $\beta$  jest kątem o jaki obraca się wektor  $\vec{L}$ , a  $\omega_p$  jest częstością precesji żyroskopu. Ze wzorów (1.7.1), (1.7.2) i (1.7.3) otrzymujemy:

$$N_p = J\omega_p\omega. \quad (1.7.4)$$

Jeżeli zewnętrzny moment siły działający na żyroskop pochodzi od dodatkowego obciążenia o masie  $m$ , którego ramię działania jest równe  $r$ , to wartość tego momentu siły wynosi  $N_p = mgr$ , gdzie  $g$  to przyspieszenie ziemskie. Wtedy zapisując odpowiednie częstości za pomocą okresów dostajemy związek, który będzie sprawdzany doświadczalnie:

$$mgr = \frac{J4\pi^2}{TT_p}. \quad (1.7.5)$$

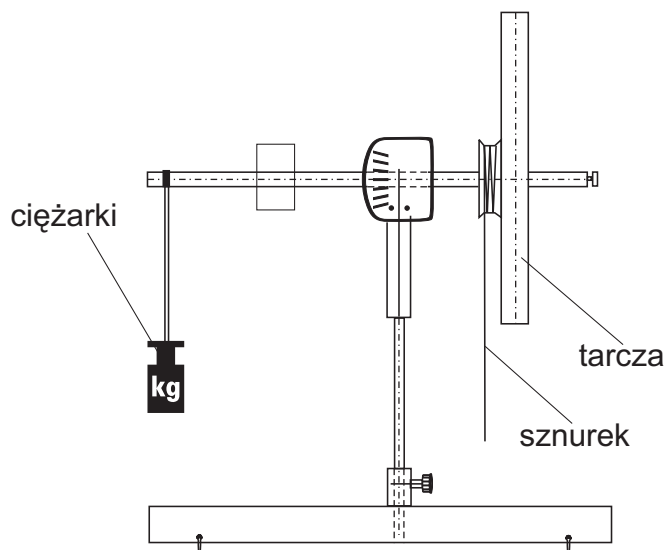
### 1.7.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Przyrządy: żyroskop, dodatkowe ciężarki, sznurek do rozpędzania tarczy, bramka z fotokomórką (do pomiaru okresu obrotu tarczy  $T$ ), stoper (do pomiaru okresu precesji  $T_p$ ), duża suwmiarka lub przymiar.

Schemat żyroskopu używanego w ćwiczeniu pokazany jest na rysunku 1.7.2. Zasadniczą częścią żyroskopu jest ramię zakończone z jednej strony obracającą się tarczą,

a z drugiej strony ciężarkiem równoważącym masę tarczy. Dzięki specjalnemu zamocowaniu ramię może się obracać w dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez punkt mocowania. Precesję obracającego się żyroskopu można wywołać mocując dodatkowe obciążenie.



Rys. 1.7.2: Żyroskop używany do pomiaru czasu precesji.

### Przebieg doświadczenia

Przed przystąpieniem do doświadczenia należy zrównoważyć swobodne ramię żyroskopu (bez dodatkowych ciężarków). W celu wyznaczenia zewnętrznego momentu siły zmierzyć  $r$  - ramię działania siły. Zmierzyć promień tarczy żyroskopu  $R$  i zanotować masę tarczy  $M_t = 1290\text{ g}$ .

Dla nabrania wprawy w przeprowadzaniu pomiarów wskazane jest przeciwiczenie kolejnych czynności. Przy zablokowanym ramieniu żyroskopu nawinąć sznurek, a następnie rozpędzić tarczę energicznie rozwijając sznurek. Zmierzyć okres obrotu tarczy  $T_1$  za pomocą bramki. Odblokować ramię żyroskopu. Zmierzyć stoperem okres precesji żyroskopu  $T_p$ . Zablokować ramię żyroskopu i ponownie zmierzyć okres obrotu tarczy  $T_2$ . Podwójny pomiar okresu obrotu tarczy ma na celu uwzględnienie utraty prędkości obrotowej tarczy wywołanej tarciem. Wygodnie jest mierzyć stoperem połowę okresu precesji, kiedy ramię obraca się w zakresie kątów od  $90^\circ$  do  $270^\circ$ .

### Badanie zależności $1/(TT_p)$ od masy obciążnika $m$

Masę obciążnika zmieniać od 10 do 100 gramów z krokiem co 10 gramów. Dla każdej masy kilkakrotnie wykonać pomiary  $T_1$ ,  $T_p$  i  $T_2$ .

### Badanie zależności $1/T_p$ od okresu obrotu tarczy $T$

Na bazie poprzednich pomiarów dobrać masę obciążnika  $m$ , dla której najłatwiej wykonywać pomiary. Wielokrotnie wykonać pomiary  $T_1$ ,  $T_p$  i  $T_2$ , przy czym należy równomiernie pokryć przedział od najkrótszych do najdłuższych okresów obrotu tarczy.

#### 1.7.3 Opracowanie wyników

Przyjmując, że tarcza jest krążkiem o promieniu  $R$  i masie  $M_t$ , obliczyć moment bezwładności tarczy  $J$ . Dla każdego pomiaru obliczyć średni okres obrotu tarczy  $T = (T_1 + T_2) / 2$ . Zrobić wykresy zależności  $1/(TT_p)$  od masy obciążnika  $m$ , oraz zależności  $1/T_p$  od okresu obrotu tarczy  $T$ . Dla tych zależności przeprowadzić regresję liniową, a korzystając ze współczynnika regresji obliczyć moment bezwładności tarczy  $J$ . Sprawdzić zgodność momentów bezwładności tarczy wyznaczonych różnymi metodami. Dla wszystkich wyznaczonych wielkości obliczyć niepewności.

## 1.8 Wiskozymetr rotacyjny

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika lepkości cieczy w temperaturze pokojowej.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- lepkość;
- wiskozymetr rotacyjny.

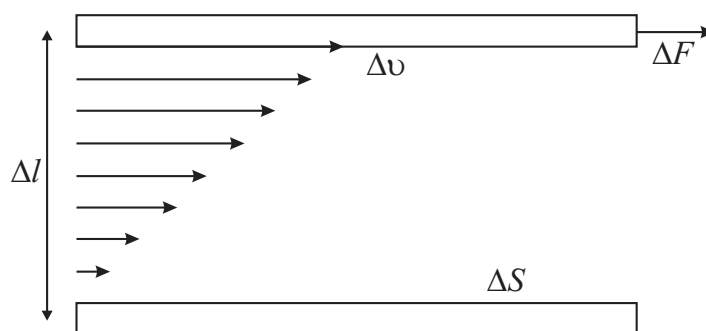
Literatura podstawowa: [1], [2], [5], [7].

### 1.8.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Główną właściwością, która odróżnia płyn (ciecz, gaz, plazmę) od ciała stałego jest to, że w płynie nie może się utrzymywać przez żaden skończony czas naprężenie ścinające. Jeżeli poddamy płyn naprężeniom ścinającym, spowodują one jego ruch. Tą właściwość nazywamy lepkością (tarcie wewnętrzne). Ilościowo naprężenia ścinające charakteryzuje współczynnik lepkości  $\eta$ , stanowiący współczynnik proporcjonalności w podanej przez Newtona zależności

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta l}. \quad (1.8.1)$$

Wzór ten wiąże stosunek siły  $\Delta F$  wzajemnego oddziaływania stycznego dwóch płaskich elementów równoległych warstw płynu do pola powierzchni  $\Delta S$  każdego z nich, ze stosunkiem różnicy prędkości  $\Delta v$  tych elementów do dzielącej je odległości  $\Delta l$  (rysunek 1.8.1). W układzie SI jednostką współczynnika lepkości  $\eta$  jest  $N \cdot s \cdot m^{-2} = Pa \cdot s$ .



Rys. 1.8.1: Rozkład prędkości płynu pomiędzy dwoma płaskimi, równoległymi, poruszającymi się względem siebie elementami.

### Obraz mikroskopowy

Z punktu widzenia teorii cząsteczkowej lepkość tłumaczy się wymianą pędu między równoległymi, przylegającymi do siebie warstwami płynu. Wymiana ta zachodzi wskutek przedostawania się cząsteczek z jednej warstwy do drugiej. Cząsteczki opuszczające warstwę poruszającą się wolniej powodują zmniejszanie pędu warstwy szybszej do której przechodzą. Analogicznie cząsteczki z warstwy szybszej powodują wzrost pędu warstwy wolniejszej.

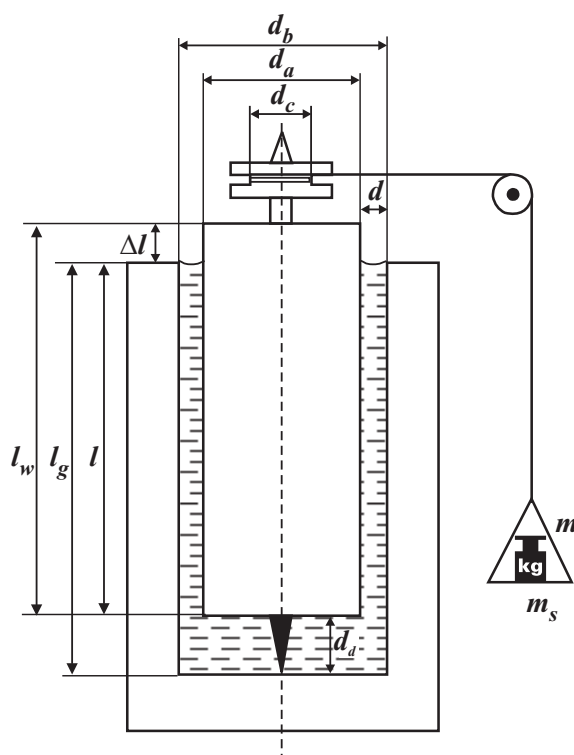
Współczynnik lepkości zależy od temperatury ośrodka. Ze wzrostem temperatury rośnie chaotyczny ruch cząstek, co prowadzi do zwiększenia wymiany cząsteczek. Powoduje to, że współczynnik lepkości gazu rośnie wraz z temperaturą. W cieczech wzajemnemu przesuwaniu się sąsiednich warstw przeciwdziałają siły spójności i ruchy takie są możliwe głównie dzięki ruchliwości cząsteczek przenikających z jednej warstwy do drugiej. W tym przypadku nasilająca się wraz ze wzrostem temperatury wymiana cząsteczek między warstwami powoduje zmniejszanie współczynnika lepkości wraz ze wzrostem temperatury.

Podczas ruchu płynu lepkiego występuje przekształcanie części jego energii kinetycznej w energię kinetyczną bezładnego ruchu cząsteczek. Oznacza to, że następuje ogrzewanie się płynu. Jest to zjawisko dyssypacji, czyli rozpraszania koherentnej energii kinetycznej płynu jako całości.

### Wiskozymetr rotacyjny

Schemat wiskozymetru rotacyjnego przedstawiony jest na rysunku 1.8.2. Zasadniczą częścią wiskozymetru jest wałek wewnętrzny o średnicy zewnętrznej  $d_a$  i wysokości  $l_w$  oraz wałek zewnętrzny o średnicy wewnętrznej  $d_b$  i głębokości  $l_g$ . Wąska przestrzeń pomiędzy wałkami wypełniona jest warstwą badanej cieczy o grubości  $d$  i wysokości  $l = l_w - \Delta l$ , przy czym  $d_b = d_a + 2d$ . Pod wałkiem wewnętrznym również znajduje się badana ciecz o grubości  $d_d = l_g + \Delta l - l_w$ . Wałek wewnętrzny zakończony jest szpulką o średnicy  $d_c$ . Nić wychodząca ze szpulki przechodzi przez bloczek i jest zakończona

szalką o masie  $m_s$  z ciężarkiem o masie  $m$ . Zaraz po starcie szalka z ciężarkiem porusza się ruchem przyspieszonym i za pośrednictwem nici wprawia walec wewnętrzny w ruch obrotowy przyspieszony. Jednak ze wzrostem prędkości obrotowej rosną siły lepkości hamujące walec. W końcu ustala się stan równowagi, w którym walec porusza się ruchem obrotowym jednostajnym, a szalka ruchem prostoliniowym jednostajnym. Wtedy szalka w czasie  $t$  pokonuje odległość  $s$  pomiędzy fotokomórkami ustawionymi na trasie jej ruchu.



Rys. 1.8.2: Schemat wiskozymetru rotacyjnego.

Zagadnienie ruchu cieczy pomiędzy dwoma współśrodkowymi walcami opisane jest w pracy [7]. Nie można w tym przypadku korzystać z prostego wzoru (1.8.1), ponieważ ciecz porusza się po okręgu. Trzeba wtedy stosować ogólniejszy wzór wiążący naprężenie ścinania ze zmianami składowych prędkości cieczy w określonych kierunkach. Przykładowo naprężenie  $S_{xy}$  w płaszczyźnie  $XY$  prostopadłej do osi walców ma postać

$$S_{xy} = \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (1.8.2)$$

Chcemy znaleźć rozkład prędkości cieczy pomiędzy walcami. Zaczniemy od znalezienia wzoru na naprężenie ścinające spowodowane lepkością cieczy, w odległości  $r$  od osi

$(d_a/2 < r < d_b/2)$ . Ze względu na symetrię zagadnienia można założyć, że istnieje tu tylko przepływ w kierunku prostopadłym do płaszczyzn przechodzących przez oś walców i że jego wielkość zależy tylko od promienia  $r$ , czyli  $v = v(r)$ . Jeżeli obserwować pyłek poruszający się wraz z wodą, w odległości  $r$  od osi, to jego współrzędne jako funkcja czasu są równe

$$x = r \cos(\omega t), \quad (1.8.3)$$

$$y = r \sin(\omega t), \quad (1.8.4)$$

gdzie  $\omega(r) = v(r)/r$ . Składowe prędkości w kierunkach  $x$  i  $y$  są więc równe

$$v_x = -r\omega \sin(\omega t) = -\omega y, \quad (1.8.5)$$

$$v_y = r\omega \cos(\omega t) = \omega x. \quad (1.8.6)$$

Z równania (1.8.2) mamy:

$$S_{xy} = \eta \left( x \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right). \quad (1.8.7)$$

Dla punktu o współrzędnej  $y = 0$ ,  $\partial \omega / \partial y = 0$  i  $x \partial \omega / \partial x$  jest równe  $r d\omega / dr$ . Dla tego zatem punktu naprężenie ścinające w kierunku prostopadłym do płaszczyzny przechodzącej przez oś walca i oś  $x$  wynosi:

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r \frac{d\omega}{dr}. \quad (1.8.8)$$

Moment siły, działający na powierzchnię walca utworzonego z cząstek cieczy w odległości  $r$  od osi, można otrzymać mnożąc naprężenie ścinające przez ramię  $r$  i powierzchnię  $2\pi r l$ . Ponieważ liczona jest długość wektora momentu siły, to należy użyć wartości bezwzględnej  $|d\omega/dr|$ , ponieważ prędkość kątowna może zarówno rosnać jak i maleć z promieniem  $r$  (więc pochodna  $d\omega/dr$  może być dodatnia i ujemna). W wyniku otrzymujemy:

$$N_1 = 2\pi r^2 l (S_{xy})_{y=0} = 2\pi \eta l r^3 \left| \frac{d\omega}{dr} \right|. \quad (1.8.9)$$

Ponieważ ruch wody jest jednostajny – nie ma przyspieszenia kątownego – wypadkowy moment siły działający na cylindryczną warstwę cieczy zawartą pomiędzy  $r$  a  $r + dr$ , musi być równy zeru. Oznacza to, że moment siły działający w odległości  $r$  musi być równoważony przez równy mu i skierowany przeciwnie moment siły w odległości  $r + dr$ , czyli  $N_1$  musi być niezależne od  $r$ . Innymi słowy,  $r^3 d\omega/dr$  jest równe jakiejś stałej, np.  $C_1$  czyli:



$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{C_1}{r^3}. \quad (1.8.10)$$

Całkując znajdujemy, że  $\omega$  zmienia się z  $r$  jak

$$\omega = -\frac{C_1}{2r^2} + C_2. \quad (1.8.11)$$

Stałe  $C_1$  i  $C_2$  należy tak określić, aby spełnione zostały warunki brzegowe. Dla  $r = d_a/2$  prędkość kątowna cieczy musi być równa prędkości kątowej wewnętrznego walca czyli  $\omega = 2s/(td_c)$ . Dla  $r = d_b/2$  prędkość kątowna cieczy musi być równa zero. Dostajemy więc

$$C_1 = \frac{d_a^2 d_b^2 s}{td_c(d_a^2 - d_b^2)}, \quad (1.8.12)$$

$$C_2 = \frac{2sd_a^2}{td_c(d_a^2 - d_b^2)}. \quad (1.8.13)$$

Korzystając z wzorów (1.8.9), (1.8.10) oraz (1.8.12) otrzymujemy wyrażenie na moment siły:

$$N_1 = 2\pi\eta l |C_1| = \frac{2\pi\eta l d_a^2 d_b^2 s}{td_c(d_b^2 - d_a^2)}. \quad (1.8.14)$$

Ruch walca wewnętrznego wywołany jest momentem siły  $(m + m_s)gd_c/2$  pochodzącym od szalki z ciężarkiem, gdzie  $g$  to przyspieszenie ziemskie. W czasie ruchu jednostajnego walca ten moment siły musi być równy przeciwnie skierowanemu momentowi siły  $N_1$ . Z porównania momentów sił, po odpowiednich przekształceniach, otrzymujemy wzór na zależność liniową odwrotności czasu przelotu od masy ciężarka na szalce

$$\frac{1}{t} = Am + B, \quad (1.8.15)$$

$$A = \frac{gd_c^2 (d_b^2 - d_a^2)}{4\pi\eta l s d_a^2 d_b^2}, \quad B = Am_s. \quad (1.8.16)$$

## 1.8.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: wiskozymetr rotacyjny, układ z fotokomórkami do pomiaru czasu przelotu, suwmiarka, głębokościomierz, przymiar, odważniki, badana ciecz, termometr.

### Przebieg doświadczenia

Zdjąć szalkę, a nitkę nawinąć na viskozymetr. Odkręcić śrubę trzymającą walec wewnętrzny oraz górną kopułę viskozymetru. Wyjąć walec wewnętrzny i położyć go poziomo na drewnianej podstawie. Ciecz zlać do zlewki do ponownego wykorzystania. Należy uważać, aby nie uszkodzić łożyska znajdującego się na spodzie walca wewnętrznego. Nie wolno kłaść walca bezpośrednio na płaskiej powierzchni stołu lub zlewu. Nie wolno składać viskozymetru na sucho (należy najpierw wlać ciecz do walca zewnętrznego, a potem wkładać walec wewnętrzny). Umyć walce szczotką i płynem do mycia naczyń, a następnie wysuszyć je przy pomocy wentylatora. Po umyciu nie wolno części wewnętrznych viskozymetru wycierać szmatką lub watą. Wykonać pomiary odpowiednich średnic i wysokości części viskozymetru -  $d_a$ ,  $d_b$ ,  $d_c$ ,  $l_g$ ,  $l_w$ .

Złożyć viskozymetr podkładając na stole papierowe ręczniki, które wchłoną wylewający się nadmiar cieczy. Do walca zewnętrznego wlać badaną ciecz. Ostrożnie włożyć walec wewnętrzny i przez pewien czas wolno obracać go w celu rozprowadzenia cieczy po szczelinie pomiędzy walcami i pozbycia się pęcherzyków powietrza. Dobrze napełniony viskozymetr poznajemy po widocznym menisku wypukłym wokół szczeliny pomiędzy walcami. Należy utrzymywać jednakową szerokość szczeliny pomiędzy walcami, aby uniknąć wylania cieczy. Zmierzyć wielkość  $\Delta l$  określającą poziom cieczy. Zakręcić górną kopułę viskozymetru z mocno wykręconą (lub zdjętą) śrubą.

Kluczową sprawą jest właściwe dokręcenie śruby. Walec wewnętrzny musi obracać się wokół pionowej osi, a szczelina z cieczą między walcami musi być wszędzie jednakowa. Należy jedną ręką przykręcać delikatnie śrubę, przytrzymując drugą ręką walec w pozycji pionowej uważając na to, aby wystająca część łożyska znalazła się we wgłębieniu śruby (można lekko obracać walec). Kiedy opór przy zakręcaniu śruby jest wyczuwalny, śrubę należy lekko popuścić i trzymając ją zakręcić nakrętkę. Dobrze zakręcony viskozymetr powinien poruszać się ruchem jednostajnym pod ciężarem pustej szalki (lub z masą 1g). Wszelkie zatrzymania świadczą o złym przykręceniu łożyska, zbyt małej ilości cieczy lub zabrudzeniu viskozymetru w czasie składania.

Ustawić fotokomórki tak, aby szalka bez problemu je uruchamiała. Górna fotokomórka powinna być tak ustawiona, aby ruch szalki z odważnikami był już jednostajny po dotarciu do niej. Zmierzyć odległość  $s$  między fotokomórkami i wyznaczyć masę szalki  $m_s$ . Zmierzyć kilkakrotnie czasy przelotu szalki dla mas z zakresu od 1 g do 20 g. Na końcu odczytać temperaturę otoczenia, przy której wykonano ćwiczenie.

### 1.8.3 Opracowanie wyników

Dla każdej masy  $m$  obliczyć średni czas przelotu i jego odwrotność. Porównać obliczoną niepewność przypadkową z niepewnością systematyczną (dokładność fotokomórki). Metodą regresji liniowej obliczyć współczynniki  $A$  i  $B$  określone w równaniu (1.8.15) oraz wyznaczyć ich niepewności pomiarowe.

Obliczyć średnie wartości  $d_a$ ,  $d_b$ ,  $d_c$ ,  $l_g$ ,  $l_w$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $d_d$  i ich niepewności. Używając współczynnika  $A$  obliczyć współczynnik lepkości  $\eta$  i jego niepewność. Wyniki porównać z tablicowymi wartościami dla wody, gliceryny i cieczy zbliżonych do badanej.

Obliczyć masę szalki  $m_s = B/A$  i porównać ją z wartością zmierzoną bezpośrednio. Różnica tych dwóch wartości pozwala oszacować wielkość stałych oporów ruchu wiskozymetru.

Można oszacować, czy wolno było zaniedbać wpływ cieczy pod walcem wewnętrznym. Moment siły działający na boczną powierzchnię walca wynosi  $N_1$ . Załóżmy, że prędkość cieczy rośnie liniowo od dna do spodu walca wewnętrznego. Szacujemy moment siły  $\Delta N_2$  pochodzący od cieczy, która znajduje się w odległości od  $r$  do  $(r + \Delta r)$  od osi obrotu

$$\Delta N_2 = r \Delta F = r \eta (2\pi r \Delta r) \left( \frac{\omega_a r}{d_d} \right). \quad (1.8.17)$$

Całkowity moment siły pochodzący od cieczy na dnie wynosi

$$N_2 = \frac{2\pi\eta\omega_a}{d_d} \int_0^{d_a/2} r^3 dr = \frac{\pi\eta\omega_a d_a^4}{32d_d}. \quad (1.8.18)$$

Korzystając ze zmierzonych wielkości wyznaczyć stosunek momentów sił  $N_2/N_1$ . Na podstawie otrzymanego wyniku stwierdzić czy wpływ cieczy na spodzie wiskozymetru jest zaniedbywalny.

## 1.9 Pomiar współczynnika lepkości cieczy metodą Stokesa

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika lepkości badanej cieczy. Współczynnik ten należy wyznaczyć w oparciu o pomiary czasu przelotu kulek wody przez cylinder wypełniony cieczą.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- lepkość;
- prawo Stokesa;
- prawa hydrodynamiki.

### 1.9.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Ciecz zwilżająca pokrywa cienką warstwą ciała w niej zanurzone. Załóżmy, że ciałem tym jest metalowa kulka. Gdy kulka jest w ruchu, unosi ze sobą warstwę płynu przylegającego do niej, a także na skutek tarcia wewnątrz samego płynu wprawia w ruch następne jego warstwy. Siła oporu  $F_T$  z jaką płyn działa na poruszającą się kulkę wyraża się wzorem Stokesa:

$$F_T = -6\pi\eta r v, \quad (1.9.1)$$

gdzie  $r$  jest promieniem kulki,  $v$  to prędkość ruchu kulki, a  $\eta$  jest współczynnikiem lepkości. Jeżeli kulka wykonana jest z materiału o gęstości  $\rho_k$ , większej od gęstości  $\rho_p$  płynu, to ruch zachodzi na skutek działania siły ciężkości:

$$F_G = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g. \quad (1.9.2)$$

Na tę kulkę działa również siła wyporu, która z prawa Archimidesa wynosi:

$$F_W = -mg = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g. \quad (1.9.3)$$

Wypadkowa siła  $F$  działająca na kulkę jest sumą algebraiczną wszystkich tych sił:

$$F = F_T + F_G + F_W. \quad (1.9.4)$$

A zatem:

$$F = -6\pi\eta r v + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_k g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_p g. \quad (1.9.5)$$

W tym wyrażeniu pierwszy składnik zależy od prędkości i istnieje taka prędkość graniczna  $v_0$ , przy której wypadkowa siła  $F$  jest równa zero. Oznacza to, że kulka porusza się wtedy ruchem jednostajnym. Jeżeli prędkość jest różna od  $v_0$ , to kulka porusza się ruchem przyspieszonym i jej prędkość maleje do chwili osiągnięcia wartości prędkości  $v_0$ . Równanie (1.9.5) jest ściśle tylko wtedy, gdy kulka porusza się w ośrodku o nieograniczonej szerokości i gdy mamy do czynienia z ruchem laminarnym płynu.

Jeżeli kulka porusza się w rurze o promieniu  $R$  wypełnionej cieczą pojawia się dodatkowy oprór. Pochodzi on od tarcia pomiędzy warstwami cieczy pociąganych przez kulkę i nieruchomą warstwę cieczy w pobliżu ścianki rury. Ten efekt wprowadza poprawkę do wzoru Stokesa, który przyjmuje teraz postać:

$$F_T = -6\pi\eta r v \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-n}, \quad (1.9.6)$$

gdzie  $n$  jest stałą, która musi zostać wyznaczona eksperymentalnie.

Po uwzględnieniu powyższej poprawki oraz założeniu, że  $F = 0$  i  $v = l/t$ , gdzie  $t$  - czas spadania kulki na drodze  $l$ , otrzymuje się:

$$\eta = \frac{2(\rho_k - \rho_p) g r^2 t}{9l} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^n. \quad (1.9.7)$$

## 1.9.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Do wykonania ćwiczenia potrzebne są następujące elementy aparatury: cylinder szklany, olej, kroplomierz, stoper, termometr, woda destylowana, naczynia połączone do wyznaczania gęstości oleju. Schemat używanej aparatury przedstawiony jest na rysunku 1.9.1.

### Przebieg doświadczenia

Za pomocą naczyń połączonych wyznaczyć gęstość  $\rho_p$  badanej cieczy (oleju); zmierzyć temperaturę powietrza; zmierzyć wewnętrzną średnicę cylindra.

Wypełnić kropłomierz wodą destylowaną (odczytać objętość wody w kropłomierzu) i wlać wodę do biurety. Wpuścić kulkę wodną do cylindra wypełnionego olejem (możliwie blisko osi cylindra) i zmierzyć czas  $t$  w jakim kulka przebywa ustaloną drogę  $l$ . Początek drogi należy obrać w odległości kilku centymetrów od powierzchni cieczy (aby kulki poruszały się już ruchem jednostajnym). Koniec drogi natomiast należy obrać w pobliżu dna. Pomiar należy powtórzyć kilkakrotnie notując liczbę obserwowanych kulek i zmiany poziomu wody w kropłomierzu (pozwala to na wyznaczenie promienia kulki). Nie należy zamykać kranika kropłomierza po każdej wypuszczonej kropli, ponieważ prowadziłoby to do powstawania kulek o różnym promieniu. Najlepiej otworzyć kranik tak, aby prędkość wypływu wody pozwalała na wygodne pomiary. Oczywiście zmniejszając się poziom wody w biurecie powoduje powstawanie coraz mniejszych kulek. Aby zapobiec temu zjawisku należy uzupełniać wodę w biurecie.

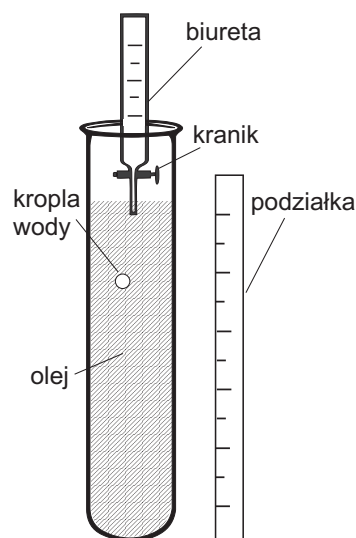
Pomiary należy wykonać dla kulek o różnym promieniu. Pozwala to określić wykładnik potęgowy  $n$  we wzorze (1.9.7). Wychodząc z założenia, że pomiary muszą dać taką samą wartość współczynnika lepkości dla kulek o promieniu  $r_1$  i  $r_2$  (czas spadania odpowiednio  $t_1$  i  $t_2$ ) otrzymuje się:

$$n = \frac{\log \left( \frac{r_2^2 t_2}{r_1^2 t_1} \right)}{\log \left( \frac{R-r_1}{R-r_2} \right)}. \quad (1.9.8)$$

Jeżeli pomiary wykonuje się tylko dla jednego rodzaju kulek, to uzyskuje się wynik przybliżony zakładając  $\frac{r}{R} = 0$ . Dla kulek o promieniu o wiele mniejszym od promienia cylindra założenie  $\frac{r}{R} = 0$  jest dobre i nie wnosi dużego błędu do wyznaczonej wartości współczynnika lepkości.

### 1.9.3 Opracowanie wyników

Gęstość badanej cieczy wyznaczyć z pomiaru przy użyciu naczyń połączonych. W pomiarze tym gęstość badanej cieczy  $\rho_p$  (olej) wyznaczana jest w stosunku do gęstości materiału kulek  $\rho_k$  (woda destylowana):



Rys. 1.9.1: Schemat wiskozymetru Stokesa.

$$\rho_p = \rho_k \frac{h_k}{h_p}, \quad (1.9.9)$$

gdzie  $h_p$  i  $h_k$  są wysokościami słupa badanej cieczy i wody. Wyznaczyć niepewność pomiarową zmierzonej gęstości badanej cieczy.

Mając liczbę wszystkich kulek i znając całkowity ubytek cieczy w biurecie można korzystając ze wzoru na objętość kuli obliczyć średni promień kulki wraz z jego niepewnością pomiarową. Warunkiem poprawności takiego obliczenia jest zachowanie takich samych rozmiarłów wszystkich kulek podczas eksperymentu. Warunek ten ustala również poprawność obliczeń dla średniego czasu opadania kulek. Ze zmierzonych czasów opadania kulek obliczyć średni czas opadania wraz z jego niepewnością pomiarową.

Jeżeli wykonano pomiary dla różnych rozmiarów kulek wyznaczyć wykładnik potęgowy  $n$  korzystając z równania (1.9.8). W równaniu tym należy użyć obliczonych średnich promieni kulek i średnich czasów spadania. Określić niepewność pomiarową wyznaczonego wykładnika potęgowego. Jeżeli pomiary wykonane zostały dla jednego rodzaju kulek, wtedy w dalszych obliczeniach należy przyjąć  $r/R = 0$ . Należy wtedy oszacować wpływ tego założenia na wartość wyznaczonego współczynnika lepkości i odpowiednio uwzględnić to w jego niepewności pomiarowej.

Korzystając z wzoru (1.9.7) wyznaczyć wartość współczynnika lepkości. We wzorze tym należy użyć wyznaczonych średnich promieni kulek oraz średnich czasów spadania. Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczonego współczynnika lepkości uwzględniając niepewności wszystkich mierzonych wielkości.

## 1.10 Pomiar współczynnika lepkości cieczy metodą Poiseuille'a

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika lepkości wody. Współczynnik ten wyznaczany jest z prawa Poiseuille'a na podstawie pomiarów czasu stacjonarnego wypływu z naczynia o znanej objętości.

*Zagadnienia do przygotowania:*

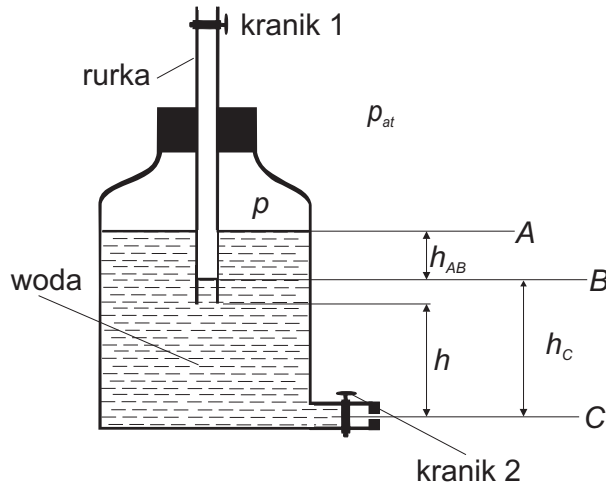
- *definicje i molekularne pochodzenie współczynnika lepkości;*
- *prawo Hagen - Poiseuille'a, rozkład prędkości warstw cieczy w przepływie przez rurę, rurki kapilarne;*
- *zasada działania butli Mariotte'a.*

### 1.10.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Butla Mariotte'a

Na rysunku 1.10.1 przedstawiony jest schemat butli Mariotte'a. Górny otwór naczynia zakończony jest korkiem szczelnie przylegającym do jego brzegów. Przez korek przechodzi szklana rurka na której znajduje się kranik. Dzięki temu powietrze może

wchodzić do butli wyłącznie przez tę rurkę, jeżeli kranik jest otwarty. W dolnej części naczynia znajduje się otwór odcinany kranikiem. Przy otwartym kraniku przez ten otwór może wypływać znajdująca się w butli ciecz.



Rys. 1.10.1: Schemat butli Mariotte'a.

Założmy, że początkowo poziomy cieczy w rurce oraz w butli pokrywają się, a powietrze znajdujące w naczyniu ma ciśnienie atmosferyczne  $p_{at}$ . Po otwarciu obu kraników, ciecz zaczyna wypływać. Poziomy cieczy w rurce oraz w naczyniu obniżają się (w rurce znacznie szybciej). Cały czas jest jednak spełniony warunek równowagi:

$$p_{at} = p + \rho g h_{AB}, \quad (1.10.1)$$

gdzie  $p$  - ciśnienie powietrza w naczyniu,  $\rho$  - gęstość cieczy,  $p_{at}$  - ciśnienie atmosferyczne,  $h_{AB}$  - różnica wysokości punktów A i B.

Z powyższego równania wynika, że  $p < p_{at}$ , a więc w butli nad powierzchnią cieczy panuje podciśnienie. Ponieważ na poziomie lustra cieczy w rurce (punkt B) cały czas panuje ciśnienie atmosferyczne, ciśnienie w punkcie C jest równe:

$$p_C = p_{at} + \rho g h_C. \quad (1.10.2)$$

Ciśnienie  $p_C$  początkowo maleje wraz z obniżającym się poziomem cieczy w rurce aż do momentu, kiedy dojdzie on do końca rurki. Wtedy dalszemu wypływowi cieczy towarzyszyć będzie tylko obniżanie się jej poziomu w butli. Powstanie więc sytuacja, kiedy mimo ubywania cieczy ciśnienie w punkcie C będzie miało stałą wartość równą:

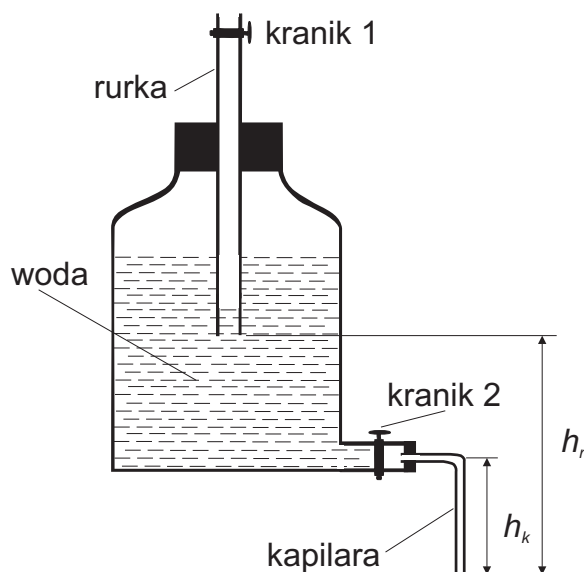
$$p_C = p_{at} + \rho g h. \quad (1.10.3)$$

Oznacza to, że dopóki poziom wody w naczyniu nie opadnie poniżej końca rurki, ciecz będzie wypływać z naczynia pod stałym ciśnieniem (czyli ze stałą prędkością).

Jeśli do butli dołączyć kapilarę, to różnica ciśnień wymuszająca ruch cieczy będzie równa ciśnieniu hydrostatycznemu cieczy między końcem rurki a końcem kapilary (rysunek 1.10.2):

$$\Delta p = \rho g (h_r - h_k), \quad (1.10.4)$$

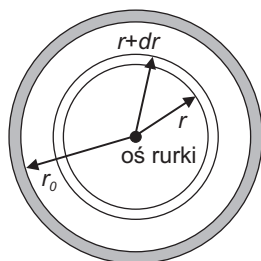
gdzie  $h_r$  - wysokość końca rurki,  $h_k$  - wysokość końca kapilary.



Rys. 1.10.2: Schemat butli Mariotte'a z dołączoną kapilarą.

### Prawo Hagen'a - Poisseulle'a

Prawo to opisuje przepływ cieczy lepkiej przez rurkę pod wpływem różnicy ciśnień. Rozważmy rurkę o kołowym przekroju poprzecznym (rysunek 1.10.3) o promieniu  $r_0$  i długości  $h_k$ . Wybieramy warstwy cieczy w postaci koncentrycznych cylindrów współosiowych z rurką.



Rys. 1.10.3: Przekrój poprzeczny przez rurkę.

Różnica prędkości przepływu warstw o promieniu  $r$  i  $dr$  wynosi  $dv$ . Wielkość  $dv/dr$  jest miarą zmiany prędkości przepływu w kierunku poprzecznym do ruchu cieczy. Powodem zmian prędkości w miarę oddalania się od osi rurki jest występowanie tarcia lepkościowego pomiędzy warstwami. Ciecz stykająca się z powierzchnią wewnętrzną rurki nie przesuwają się, czyli  $v(r_0) = 0$ . Siła lepkości  $F$  jest proporcjonalna do gradientu prędkości i powierzchni styku cieczy i rurki:



$$F = -2\pi\eta h_k r \frac{dv}{dr}, \quad (1.10.5)$$

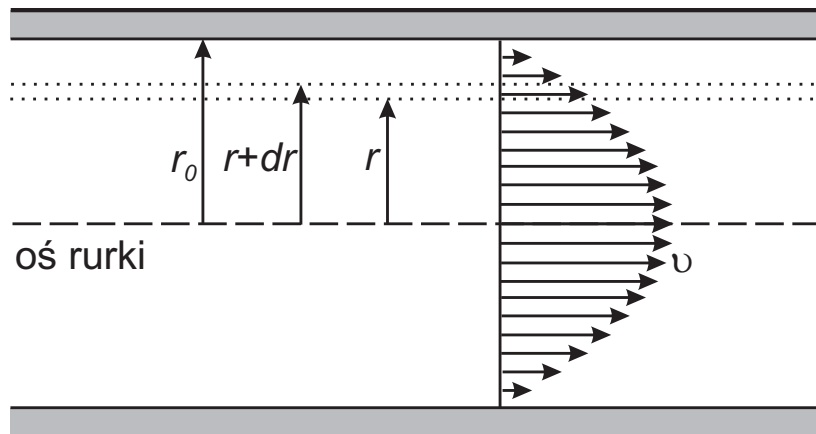
gdzie współczynnik proporcjonalności  $\eta$  opisuje lepkość cieczy. Jednostajny i laminarny przepływ cieczy wywołany jest przez różnicę ciśnienia  $\Delta p$  między końcami rurki, która musi równoważyć siłę oporu pochodzącą od lepkości

$$\pi r^2 \Delta p = -2\pi\eta h_k r \frac{dv}{dr}, \quad (1.10.6)$$

Aby otrzymać zależność prędkości poszczególnych warstw od ich promienia  $v(r)$ , musimy równanie (1.10.6) przekształcić i wycałkować po promieniu w granicach od  $r_0$  do danego  $r$  oraz po prędkości w granicach od  $v(r_0) = 0$  do  $v(r)$ .

$$v(r) = \int_0^{v(r)} dv = -\frac{\Delta p}{2\eta h_k} \int_{r_0}^r r dr = \frac{\Delta p}{4\eta h_k} (r_0^2 - r^2). \quad (1.10.7)$$

Zależność prędkości od promienia pokazana jest na rysunku 1.10.4.



Rys. 1.10.4: Zależność prędkości cieczy w rurce od odległości od osi rurki.

W celu obliczenia objętości  $V$  płynu przepływającego w czasie  $t$  należy prędkość  $v(r)$  pomnożyć przez elementarny wycinek wewnętrznej powierzchni przekroju poprzecznego rurki i scałkować po całym przekroju rurki:

$$\frac{V}{t} = \int_0^{r_0} v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi r_0^4}{8\eta h_k} \Delta p. \quad (1.10.8)$$

Równanie (1.10.8) nazywane jest prawem Hagen - Poiseuille'a.

## 1.10.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: butla Mariotte'a, kapilara, zlewka, waga laboratoryjna, odważniki, mikroskop, termometr, katemometr, stoper.

### Przebieg doświadczenia

Zmierzyć długość kapilary  $h_k$  oraz wysokość końca rurki  $h_r$  przy pomocy katemometru. Zważyć naczynko pomiarowe. Podstawić naczynko pomiarowe pod wylot rurki, zbierając wypływającą wodę (20-40 cm<sup>3</sup>) mierząc jednocześnie stoperem czas wypływu. Zważyć naczynko pomiarowe z wodą i wyznaczyć masę wody  $m$ , która wypłynęła. Zmierzyć temperaturę wody a następnie osuszyć naczynko pomiarowe. Powtórzyć kilkakrotnie pomiary zbierając różną ilość wody.

## 1.10.3 Opracowanie wyników

W opracowaniu wyników należy obliczyć współczynnik lepkości wody z prawa Hageny - Poiseulle'a, czyli z wzoru (1.10.8). We wzorze tym za objętość należy podstawić  $V = m/\rho$  oraz wyrażenie na  $\Delta p$  - wzór (1.10.4). Otrzymuje się wtedy zależność:

$$\eta = \frac{\pi r_0^4 \rho^2 g (h_r - h_k) t}{8 m h_k}. \quad (1.10.9)$$

Wyniki przedstawić w tabeli wraz z odpowiednio obliczonymi niepewnościami pojedynczego pomiaru. Wyznaczyć średnią wartość współczynnika lepkości wraz z jego niepewnością pomiarową.

Drugą metodą opracowania wyników jest zastosowanie regresji liniowej. Po przekształceniu równania (1.10.9) otrzymuje się:

$$m = \frac{\pi r_0^4 \rho^2 g (h_r - h_k)}{8 h_k \eta} t. \quad (1.10.10)$$

Ze współczynnika kierunkowego otrzymanego z regresji liniowej można prosto obliczyć współczynnik lepkości oraz jego niepewność pomiarową.

## 1.11 Wyznaczanie modułu sztywności prętów metodą dynamiczną

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie modułu sztywności prętów metalowych przy pomocy wahadła torsyjnego.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- oscylator harmoniczny;

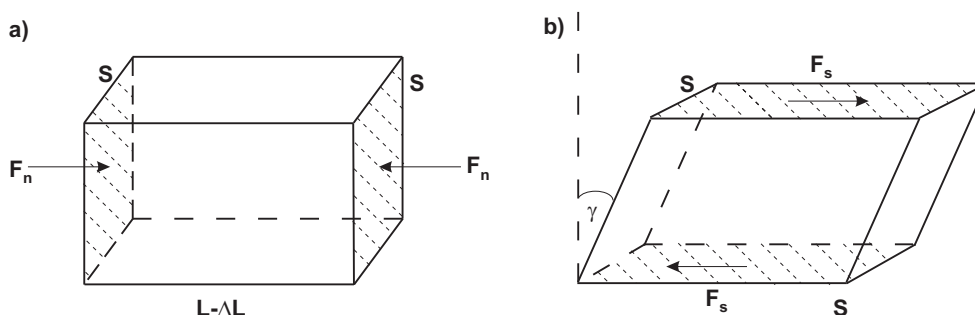
- własności sprężyste ciał stałych, prawo Hooke'a;
- dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej, moment bezwładności, twierdzenie Steinera.

Literatura podstawowa: [2], [1], [5].

### 1.11.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Odształcenia sprężyste

Odształcenie ciała stałego znikające z chwilą usunięcia działających sił nazywamy odkształceniem sprężystym. Pary sił odkształcających mogą działać prostopadłe (rysunek 1.11.1a) lub stycznie (rysunek 1.11.1b) do powierzchni ciała. Stosunek siły  $F$  przyłożonej do powierzchni  $S$  nazywamy naprężeniem. Definiujemy odpowiednio naprężenie normalne  $\sigma = F_n/S$  oraz naprężenie styczne  $\tau = F_s/S$ .



Rys. 1.11.1: Odształcenie prostokąta pod działaniem sił normalnych  $F_n$  (a) oraz pod działaniem momentu sił stycznych  $F_s$  (b) na powierzchnię  $S$ .

Miarą odkształcenia pod wpływem naprężeń normalnych jest odkształcenie względne  $\epsilon = \Delta l/l$ , które jest stosunkiem zmiany długości  $\Delta l$  do długości początkowej  $l$ . W przypadku naprężeń stycznych do opisu odkształcenia używa się kąta ścinania  $\gamma$ .

#### Prawo Hooke'a

Dla odkształceń sprężystych ciał stałych związek pomiędzy odkształceniem i naprężeniem opisany jest przez prawo Hooke'a. Według tego otrzymanego eksperymentalnie prawa naprężenie jest proporcjonalne do odkształcenia:

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{dla naprężeń normalnych,} \quad (1.11.1)$$

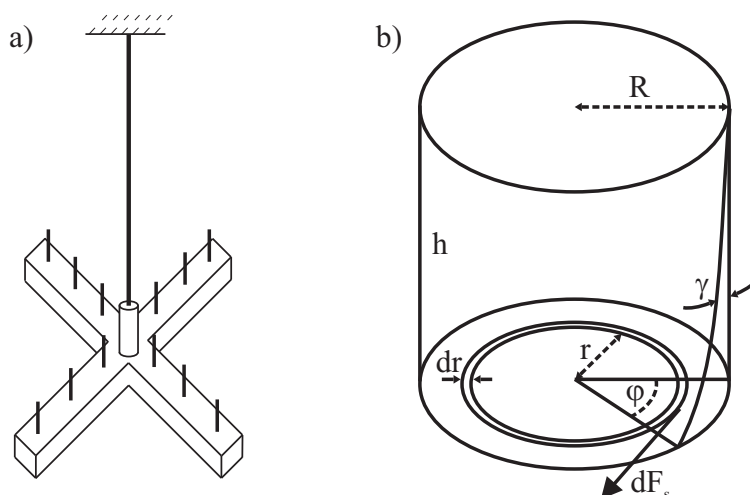
$$\tau = G\gamma \quad \text{dla naprężeń stycznych,} \quad (1.11.2)$$

gdzie współczynniki proporcjonalności to odpowiednio moduł Younga  $E$  i moduł sztywności  $G$ .

### 1.11.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego (rysunek 1.11.2a) wchodzi: wahadło torsyjne, pręty wykonane z różnych materiałów (żelazo, miedź, mosiądz), cztery obciążniki (walce), stoper, śruba mikrometryczna, przymiar, waga laboratoryjna.



Rys. 1.11.2: Wahadło torsyjne do wyznaczania modułu sztywności metodą dynamiczną (a). Pręt przedstawiony w powiększeniu wraz z oznaczonymi wielkościami koniecznymi do wykonania obliczeń (b).

#### Metoda pomiarowa

Moduł sztywności  $G$  wyznaczany jest z badania drgań harmoniczných pręta wywołanych przez siły sprężystości – naprężenia ścinające. Konieczna jest więc znajomość związku pomiędzy modułem sztywności i momentem działających sił.

Pręt o promieniu  $R$  i wysokości  $h$  umocowany jest górnym końcem, natomiast na swobodny dolny koniec działa moment sił stycznych do powierzchni walca (rysunek 1.11.2b). Pod wpływem momentu sił  $N$  dolny koniec pręta obraca się o kąt  $\varphi$  i cały pręt ulega skręceniu o kąt  $\gamma$ . Rozważmy cylindryczny element pręta o promieniu  $r$ , grubości  $dr$  oraz wysokości  $h$  równej długości pręta. Dla wybranego elementu pręta kąty obrotu dolnego końca i skręcenia pręta są ze sobą powiązane poprzez

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\varphi r}{h}. \quad (1.11.3)$$

Korzystając z prawa Hooke'a (1.11.2) otrzymujemy

$$\tau = \frac{F_s}{S} = G\gamma = G \frac{\varphi r}{h}, \quad (1.11.4)$$

gdzie  $F_s$  jest siłą styczną przyłożoną do powierzchni  $S = 2\pi r dr$  elementu pręta. Wartość  $dN$  momentu siły stycznej działającego na element pręta wynosi więc

$$dN = F_s r = G \frac{\varphi r}{h} 2\pi r^2 dr. \quad (1.11.5)$$

Całkując wyrażenie (1.11.5) po całym przekroju pręta od 0 do  $R$  otrzymujemy moment siły działający na pręt

$$N = \int_0^R \frac{2\pi G \varphi}{h} r^3 dr = \frac{\pi G \varphi R^4}{2h}. \quad (1.11.6)$$

Ten moment siły powoduje powstanie w pręcie przeciwnie skierowanego momentu siły  $-N$ , który stara się przywrócić pręt do położenia równowagi i powoduje drgania pręta. Oznaczając moment kierujący przez

$$D = \frac{\pi G R^4}{2h} \quad (1.11.7)$$

otrzymujemy równanie ruchu wahadła torsyjnego w postaci

$$N = D\varphi = -J\ddot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \varphi = -\frac{J}{D}\ddot{\varphi}, \quad (1.11.8)$$

gdzie  $J$  jest momentem bezwładności obciążonego wahadła. Okres drgań wahadła torsyjnego wyraża się więc wzorem

$$T = 2\pi\sqrt{J/D}. \quad (1.11.9)$$

Na moment bezwładności  $J$  składają się momenty bezwładności samego wahadła torsyjnego  $J_0$  i obciążających go walców  $J_1$ . Jeżeli cztery walce znajdują się w odległości  $d$  od osi obrotu wahadła, to z twierdzenia Steinera ich moment bezwładności możemy wyrazić jako  $J_1 = 4(J_w + md^2)$ , gdzie  $J_w = m\rho^2/2$  jest momentem bezwładności jednego walca o promieniu  $\rho$  względem osi przechodzącej przez oś symetrii walca. Podstawiając te zależności do wyrażenia (1.11.9) i korzystając z wzoru (1.11.7) otrzymujemy liniową zależność kwadratu okresu drgań od kwadratu odległości walców od osi obrotu wahadła torsyjnego

$$T^2 = \frac{8\pi h}{GR^4} (J_0 + 4J_w + 4md^2), \quad (1.11.10)$$

Do tego wyrażenia można dopasować zależność  $T^2 = ad^2 + b$ . Co ostatecznie pozwala wyrazić moduł sztywności  $G$  poprzez parametr  $a$

$$G = \frac{32\pi mh}{aR^4}. \quad (1.11.11)$$

### Przebieg pomiarów

Dla wszystkich drutów (żelaznego, miedzianego i mosiężnego) zmierzyć przymiarem długość drutu  $h$  oraz kilkakrotnie zmierzyć śrubą mikrometryczną średnicę drutów  $2R$ . Zważyć cztery walce otrzymując ich masę  $4m$ . Trzykrotnie zmierzyć czas trwania dziesięciu okresów dla wahadła torsyjnego obciążonego walcami umieszczonymi w odległości  $d$  od osi obrotu. Powtórzyć pomiary dla kilku różnych odległości  $d$ .

#### 1.11.3 Opracowanie wyników

Dla każdego badanego drutu zrobić wykres zależności kwadratu okresu drgań wahadła torsyjnego od kwadratu odległości walców od osi obrotu  $T^2(d^2)$ . Dopasować prostą  $T^2 = ad^2 + b$  metodą regresji liniowej. Korzystając ze współczynnika  $a$  regresji obliczyć ze wzoru (1.11.11) moduł sztywności drutów  $G$  i porównać z wartościami tablicowymi.

# 2 Ciepło

## 2.1 Cechowanie termopary i termistora

Celem ćwiczenia jest zbadanie zależności temperaturowej oporu termistora oraz siły elektromotorycznej indukowanej w obwodach z termoparą. Przeprowadzane jest cechowanie termopary oraz wyznaczane są parametry funkcji opisującej rezystancję termistora typu NTC co pozwala obliczyć szerokość pasma zabronionego półprzewodnika.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- zjawiska termoelektryczne, w szczególności zjawisko Seebecka;
- termopara, budowa i zależność napięcia termopary od temperatury;
- termistor, definicja, typy, zależność oporu termistora typu NTC od temperatury.

Literatura podstawowa: [1], [2], [3], [12].

### 2.1.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Zjawiska termoelektryczne

Zjawiska termoelektryczne to zjawiska łączące procesy cieplne i elektryczne w materiałach, najczęściej metalach, stopach i półprzewodnikach. Na styku dwóch metali, ze względu na różną koncentrację elektronów i różną pracę wyjścia elektronów z metalu, pojawia się niezerowy potencjał kontaktowy. Wartość tego potencjału zależy od rodzaju metali oraz od temperatury, w której znajduje się złącze.

Rozważmy układ dwóch metalowych przewodów połączonych wzajemnie oboma końcami. Jeżeli miejsca spoeń będą miały z powodu czynników zewnętrznych różne temperatury, przez układ popłynie prąd (gdyż przy różnych potencjałach kontaktowych w miejscach spoeń, pojawia się w układzie niezerowa różnica potencjałów czyli napięcie). Wartość napięcia i natężenia prądu będzie zależała (liniowo) od różnicy temperatur na łączach. Powstawanie niezerowego napięcia nosi nazwę zjawiska Seebecka.

Odwrotnie, jeżeli przez układ przewodników (ze spojeniami o tej samej temperaturze) zacznie płynąć prąd to na jednym ze styków wydzielane będzie ciepło, a na drugim złączu ciepło będzie pochłaniane. Kierunek przepływu ciepła zależy od kierunku przepływu prądu. Opisany efekt nosi nazwę zjawiska Peltiera.

Zjawisko termoelektryczne można również zaobserwować w pojedynczym przewodniku, przez który płynie prąd, a którego końce mają różne temperatury. W zależności

od kierunku przepływu prądu w przewodniku takim będzie wydzielane lub pochłaniane ciepło. Efekt ten nazywa się zjawiskiem Thompsona.

### Termopara

Ogniwo termoelektryczne zwane także termoparą to układ dwóch przewodników połączonych wzajemnie w dwóch miejscach. Na skutek różnicy temperatur między miejscami łączenia w układzie takim powstaje siła elektromotoryczna (napięcie elektryczne). Wartość tego napięcia jest proporcjonalna do różnicy temperatur w miejscach styków (w obszarze temperatur badanym w tym ćwiczeniu). Napięcie  $U$  termopary wyraża się wzorem

$$U = \alpha (T_1 - T_2), \quad (2.1.1)$$

gdzie  $\alpha$  jest stałą termopary (poszukiwaną w tym ćwiczeniu), a  $T_1$  i  $T_2$  to temperatury styków.

Głównymi zaletami termopar jest ich mała masa i rozmiary, oraz związane z tym mała pojemność cieplna oraz mała bezwładność czasowa. Termopary działają w szerokim zakresie temperatur (od  $-200$  do  $1800^\circ\text{C}$ ) wykazując jednocześnie dość dobrą liniowość. Termopary wykorzystywane są głównie w pomiarach temperatury w bardzo różnorodnych warunkach. Oprócz tego termopary stosowane są także do pomiaru natężenia promieniowania światła widzialnego i podczerwonego.

### Termistor

Termistor to element elektroniczny cechujący się nieliniową zależnością oporu od temperatury. Wartość bezwzględna temperaturowego współczynnika oporu termistora może być rzędu 80% na kelwin, podczas gdy dla metali nie przekracza 0.4% na kelwin. Termistory to najczęściej elementy półprzewodnikowe, wykonane np. z tlenków (manganu, tytanu, wanadu itp.) lub tytanianu baru. Rozróżnia się następujące typy termistorów:

- NTC (Negative Temperature Coefficient) – ich opór maleje wraz ze wzrostem temperatury,
- PTC (Positive Temperature Coefficient) – ich opór rośnie wraz ze wzrostem temperatury; wzrost ten jest dużo silniejszy niż dla metali,
- CTR (Critical Temperature Resistor) – ich opór gwałtownie maleje w pewnym zakresie temperatur, a poza nim zachowuje się jak w przypadku termistora typu NTC.

Zależność oporu  $R$  termistora typu NTC od temperatury  $T$  (w kelwinach) wyrażona jest wzorem

$$R(T) = R_0 e^{W/2kT}, \quad (2.1.2)$$



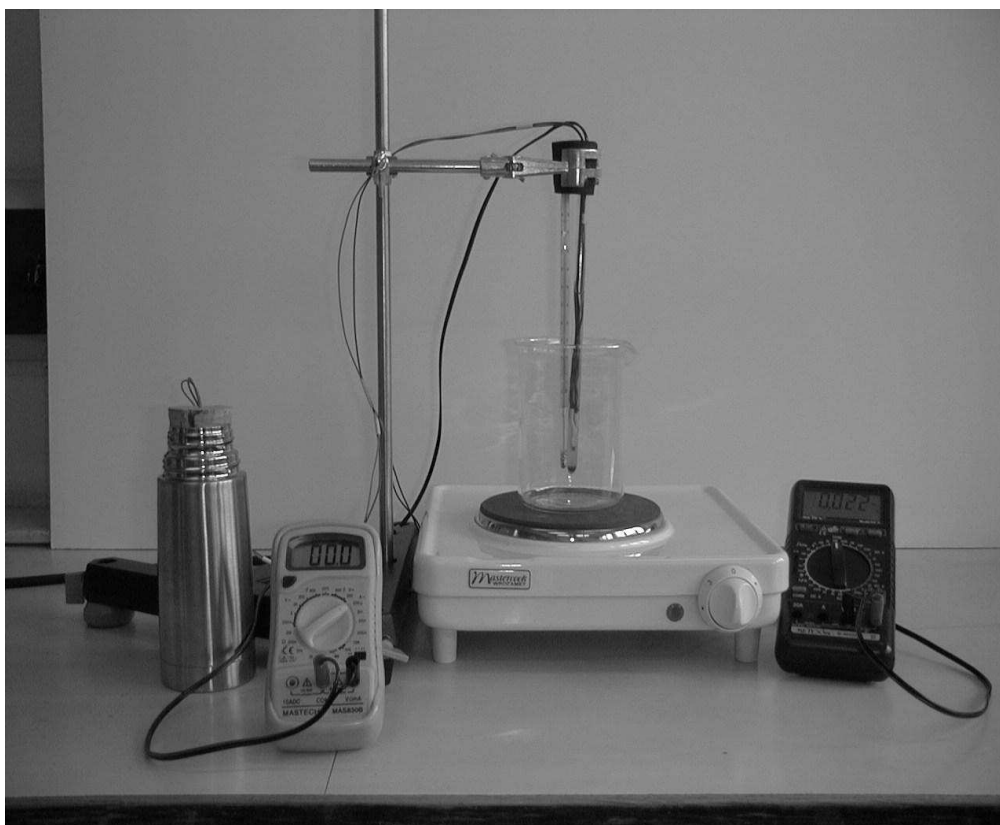
gdzie  $R_0$  - stała termistora (zależna od jego budowy i rodzaju użytego półprzewodnika),  $W$  - szerokość pasma zabronionego półprzewodnika,  $k$  - stała Boltzmann.

Właściwości termistora zależą od rodzaju tlenków i proporcji, w jakich zostały użyte w mieszaninie. Termistory używane są między innymi do pomiaru temperatury oraz kompensacji jej wpływu w układach elektronicznych, do stabilizacji napięcia, automatycznej regulacji wzmocnienia, ochrony elementów przed przeciążeniem itp. Zakresy pracy termistorów leżą w granicach  $50 - 1200^{\circ}\text{C}$ .

### 2.1.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Układ doświadczalny pokazany jest na rysunku 2.1.1. W jego skład wchodzi: termopara, termistor typu NTC, miliwoltomierz, omomierz, termometr. Pomiar odbywa się z wykorzystaniem dwóch stanowisk o różnej temperaturze: termosu zawierającego mieszaninę wody z lodem oraz zlewki z wodą podgrzewanej za pomocą grzejnika elektrycznego.



Rys. 2.1.1: Układ pomiarowy.

## Przebieg doświadczenia

Podłączyć termoparę do miliwoltomierza oraz podłączyć termistor do omomierza. Włączyć miliwoltomierz i omomierz, ustalić właściwe zakresy pracy, a następnie sprawdzić wartości napięcia i oporu dla różnicy temperatur  $\Delta T = 0^\circ C$ . Odczytać temperaturę otoczenia.

Pobrane z kostkarki lód ma temperaturę zbliżoną do  $0^\circ C$  więc wrzucić do termosu tyle kostek lodu by zajęły mniej więcej  $2/3$  jego objętości, dolać wody tak by zakryła lód, termos zamknąć korkiem z otworem do przełożenia jednego ze złącz termopary. Jeden koniec termopary i termistor włożyć do zlewki z wodą stojącą na grzejniku, drugi koniec termopary zanurzyć w mieszaninie wody z lodem. Włożyć termometr do wody. Odczekać, aż ustali się stała różnica temperatur pomiędzy dwoma końcówkami termopary (ustali się napięcie odczytywane na miliwoltomierzu) - zanotować temperaturę oraz wartości napięcia i oporu.

Włączyć grzejnik elektryczny początkowo nie więcej niż na pozycji 2 by nie ogrzewać układu zbyt szybko, później należy zwiększyć ustawienie grzejnika. Wraz ze wzrostem temperatury (aż do momentu wrzenia wody) odczytywać i zapisywać temperaturę oraz wartości napięcia i oporu. Wygodnie jest robić to co  $2^\circ C$  na przemian dla termopary i termistora. W czasie pomiaru często mieszać podgrzewaną wodę. Po zagotowaniu wody w zlewce odczekać aż do momentu ustalenia się wskazań omomierza i miliwoltomierza, co nastąpi po kilku minutach, zapisać tak ustalone wartości.

Wyłączyć grzejnik. Mieszając wodę ponownie odczytywać i zapisywać temperaturę oraz wartości napięcia i oporu podczas ochładzania się wody.

Wyłączyć miliwoltomierz i omomierz, rozłączyć obwód. Wytrzeć mokre naczynia.

### 2.1.3 Opracowanie wyników

#### Cechowanie termopary

Mieszanina wody z lodem ma temperaturę  $0^\circ C$ , więc jeden koniec termopary przez cały czas ma taką temperaturę -  $T_2 = 0^\circ C$ . Różnica temperatur we wzorze (2.1.1) jest więc równa temperaturze  $T_1$  mierzonej przy pomocy termometru. Wykonać wykres zależności napięcia od temperatury wykorzystując wszystkie zmierzone punkty. Ocenic czy z powodu błędów grubych nie należy jakichś punktów odrzucić z dalszego opracowania - sprawdzić czy wyraźnie odstające punkty to wynik złego wpisania danych z tabeli pomiarowej, czy też innych czynników, spróbować ustalić jakich i czy da się takie błędy skorygować czy też punkty te należy po prostu zaniedbać w dalszym opracowaniu. Korzystając z wyrażenia  $U = \alpha T_1 + \beta$ , metodą regresji liniowej znaleźć stałą termopary  $\alpha$  oraz jej niepewność pomiarową, przedyskutować uzyskaną wartość. W granicach niepewności pomiarowych wyraz wolny  $\beta$  powinien być równy zero, przedyskutować czy tak jest, jeśli nie to przedyskutować wartość  $\beta/\alpha$ , która ma wymiar temperatury - co to za temperatura i czy uzyskana wartość ma sens. Jeśli uzyskane wyniki wyraźnie odstają od zależności liniowej należy przedyskutować możliwe przyczyny takiego stanu rzeczy. W takim przypadku można także sprawdzić jaka

jest wartość  $\alpha$  uzyskana z dopasowania prostej do dwu punktów: pierwszego (zanim rozpoczęliśmy grzanie) i ustalonego na końcu grzania, przedyskutować, która z dwu uzyskanych wartości wydaje się być bardziej wiarygodna.

### Termistor

Zmierzone temperatury wyrazić w kelwinach. Po zlogarytmowaniu wzoru (2.1.2) otrzymamy liniową zależność pomiędzy logarytmem zmierzonej wartości oporu a odwrotnością temperatury. Wykonać wykres tej zależności i jak dla termopary ocenić czy wszystkie punkty mogą być użyte w dalszym opracowaniu. Metodą regresji liniowej ważonej znaleźć wartości nieznanymi stałych wraz z niepewnościami pomiarowymi. W przypadku wyraźnego ostawiania wykresu od liniowości przeprowadzić dyskusję podobnie jak dla termopary. Ze znalezionej współczynnika regresji liniowej wyznaczyć szerokość pasma zabronionego i przeprowadzić dyskusję wyniku. W przypadku wyraźnej nieliniowości wykresu można także sprawdzić czy wartość  $W$  uzyskana z dopasowania prostej do dwu punktów: pierwszego (zanim rozpoczęliśmy grzanie) i ustalonego na końcu grzania nie jest lepiej zgodna z wartością tablicową niż ta uzyskana z pełnej regresji.

## 2.2 Wyznaczanie ciepła topnienia lodu

Celem ćwiczenia jest pomiar ciepła topnienia lodu.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- temperatura i energia wewnętrzna;
- przepływ ciepła, pierwsza zasada termodynamiki;
- zasada działania i metoda pomiaru ciepła za pomocą kalorymetru;
- przemiany stanu skupienia materii i związane z tym ciepło przemiany.

Literatura podstawowa: [1], [2], [13].

### 2.2.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Temperatura i energia wewnętrzna

Każdy makroskopowy ośrodek zbudowany jest z olbrzymiej ilości cząsteczek rzędu liczby Avogadro. Nie istnieją oddziaływania będące w stanie utrzymać te cząstki w spoczynku, naturalnym jest więc, że wszystkie są w nieustannym ruchu. Energię zmagazynowaną w wewnętrznych stopniach swobody ośrodka (czyli związaną z ruchem i położeniem jego cząsteczek) nazywamy energią wewnętrzną. Do energii wewnętrznej nie wchodzi makroskopowa energia potencjalna i kinetyczna.

Energia kinetyczna cząsteczek związana z ich przypadkowymi ruchami wewnątrz ośrodka jest częścią energii wewnętrznej. Miarą średniej energii kinetycznej cząsteczek w ośrodku jest temperatura. Ponieważ minimalna energia kinetyczna wynosi zero, również minimum temperatury wynosi  $0\text{ K}$ , co odpowiada zatrzymaniu się wszystkich

cząstek w ośrodku. W skład energii wewnętrznej wchodzi również energia potencjalna wzajemnych oddziaływań cząsteczek. Dowodem na to, że energia kinetyczna cząsteczek nie stanowi całej energii wewnętrznej jest na przykład proces wrzenia wody. Wiemy, że temperatura wody w czasie wrzenia nie zmienia się, a jednocześnie musimy stale dostarczać energii żeby woda zmieniła się w parę wodną.

### Ciepło, ciepło właściwe

Jeżeli zetkniemy ze sobą dwa ciała o różnych temperaturach, ich cząsteczki będą mogły zderzać się ze sobą na powierzchni zetknięcia, przekazując między sobą energię kinetyczną. W ten sposób jeden ośrodek będzie przekazywał drugiemu część swojej energii wewnętrznej. Zawsze ośrodek o wyższej temperaturze będzie przekazywał energię ciału o niższej temperaturze, nigdy odwrotnie. Energię przekazywaną w ten sposób – przez kontakt termiczny – nazywamy ciepłem. Otrzymanie przez ciało ciepła najczęściej wiąże się ze zmianą jego temperatury. Ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednostkowej masy danej substancji o jeden  $K$  (lub o jeden  $^{\circ}C$ ) nazywamy ciepłem właściwym tej substancji.

Wynika z tego, że ilość ciepła  $Q$  potrzebna do ogrzania ciała o masie  $m$  o  $\Delta T$  wyraża się wzorem:

$$Q = cm\Delta T, \quad (2.2.1)$$

gdzie  $c$  jest ciepłem właściwym. Wymiarem ciepła właściwego jest  $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ .

Choć przepływ ciepła najczęściej wiąże się ze zmianą temperatury, należy jednak pamiętać, że nie zawsze. Jeżeli bryłce lodu w temperaturze topnienia przekażemy ciepło, na przykład przez kontakt z ciałem o wyższej temperaturze, to cała otrzymana energia kinetyczna zostanie zużyta w lodzie na rozrywanie wiązań pomiędzy cząsteczkami lodu, a więc na zwiększenie energii potencjalnej, a nie kinetycznej cząsteczek. Temperatura lodu pozostanie stała aż do całkowitej przemiany w ciecz.

### Przepływ ciepła, pierwsza zasada termodynamiki

Z zasady zachowania energii wynikają prawa rządzące przekazywaniem ciepła. Ilość ciepła oddanego przez ciało jest równa ilości ciepła pobranego przez ciała otaczające. Ilość ciepła pobranego przez ciało przy ogrzewaniu o  $\Delta T$  jest równa ilości ciepła oddanego przy chłodzeniu o  $-\Delta T$ . Prawo zachowania energii w termodynamice, zwane pierwszą zasadą termodynamiki, możemy zapisać w formie równania:

$$\Delta U = W + Q, \quad (2.2.2)$$

gdzie  $\Delta U$  jest zmianą energii wewnętrznej,  $W$  jest makroskopową pracą wykonaną nad układem, a  $Q$  ciepłem przekazany do układu. Inaczej mówiąc, cała energia wewnętrzna układu pochodzić musi z pracy wykonanej nad nim lub z ciepła przekazanego bezpośrednio do układu.

### Metoda pomiaru ilości ciepła za pomocą kalorymetru

W układzie odizolowanym termicznie od otoczenia, na którym nie jest wykonywana żadna praca makroskopowa, całe ciepło oddane przez część układu musi zostać pobrane przez pozostałe części układu. Tak sformułowaną zasadę zachowania energii dla układu izolowanego nazywamy bilansem cieplnym. W oparciu o bilans cieplny dokonujemy pomiarów ciepła przy użyciu tzw. kalorymetru.

Kalorymetr jest naczyniem zbudowanym w taki sposób, aby zminimalizować kontakt termiczny z otoczeniem. Zazwyczaj jest to termos lub naczynie w obudowie izolującej termicznie, wewnętrzne ścianki naczyń najczęściej są posrebrzane w celu wyeliminowania strat na skutek promieniowania cieplnego.

Kalorymetr wypełniamy cieczą o znanym ciepłe właściwym – na przykład wodą. Mierzac zmianę temperatury tej cieczy możemy ustalić ile otrzymała bądź oddała ciepła. Należy tu uwzględnić, iż wewnętrzne naczynie kalorymetru również oddaje lub pobiera ciepło. Ciepło właściwe kalorymetru możemy wyznaczyć przygotowując kalorymetr z wodą o temperaturze  $T_1$  i masie  $m_1$ , a następnie dolewając do niego wodę o innej znanej temperaturze  $T_2$  i masie  $m_2$ . Mierzmy temperaturę  $T$ , która ustali się w kalorymetrze. Z bilansu cieplnego otrzymujemy:

$$(c_w m_1 + c_k m_k)(T - T_1) = c_w m_2 (T_2 - T), \quad (2.2.3)$$

gdzie  $c_w$  jest ciepłem właściwym wody ( $4187 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ),  $c_k$  jest ciepłem właściwym kalorymetru, a  $m_k$  jego masą. Ostatecznie, ciepło właściwe kalorymetru można obliczyć ze wzoru:

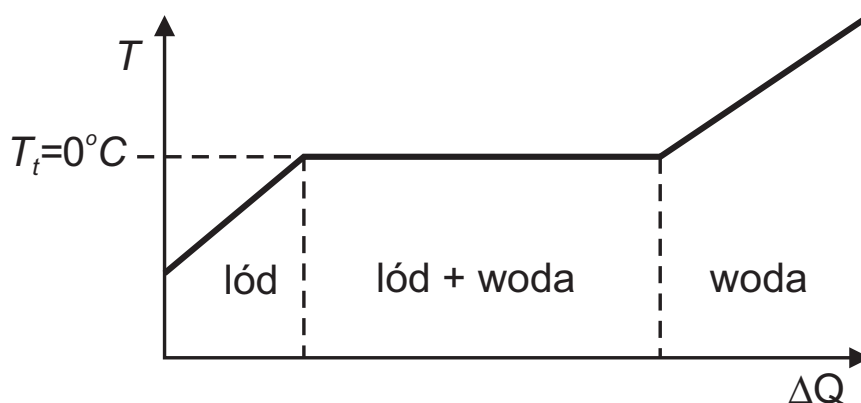
$$c_k = \frac{c_w}{m_k} \left( m_2 \frac{T_2 - T}{T - T_1} - m_1 \right). \quad (2.2.4)$$

### Przemiany stanu skupienia materii i związane z tym ciepło przemiany

Materia w przyrodzie na Ziemi występuje w trzech stanach skupienia, jako gazy, ciecze i ciała stałe. Różnice własności fizycznych tych trzech stanów wynikają z odmiennej budowy cząsteczkowej. W stanie gazowym cząsteczki są daleko od siebie i słabo ze sobą oddziałują, w cieczach wzajemne oddziaływania są dużo silniejsze, ale nie wiążą jeszcze cząsteczek w konkretnych położeniach, jak to ma miejsce w ciałach stałych. Z tymi różnymi oddziaływaniami wiąże się energia potencjalna cząstek, którą trzeba dostarczyć substancji, żeby na przykład stopić lód, albo zamienić wodę w parę. Ze zmianą stanu skupienia wiąże się więc ciepło, które musi być dostarczone, aby dokonać przemiany, lub będzie otrzymane w wyniku przemiany. Ciepło potrzebne do odparowania pewnej ilości cieczy jest równe ciepłu otrzymanemu ze skroplenia tej samej ilości pary. Zupełnie analogicznie jest w przypadku topnienia i zamarzania. Ciepło przemiany, jako że nie związane ze zmianą temperatury, jest często nazywane ciepłem utajonym.

Jeżeli ciało stałe, krystaliczne ogrzewamy, to jego temperatura początkowo wzrasta, aż do temperatury topnienia  $T_t$ . Dalsze ogrzewanie ciała nie zmienia jego tem-

peratury, a jedynie powoduje stopniowe topnienie. Całe ciepło dostarczane do ciała jest zużywane na zmianę rodzaju oddziaływań międzycząsteczkowych, czyli na zmianę energii potencjalnej. Energia kinetyczna cząsteczek, a więc również temperatura, nie zmienia się. Jeżeli całe ciało przejdzie w stan ciekły, to przy dalszym dostarczaniu ciepła temperatura znowu zaczyna wzrastać. Przebieg zmian temperatury przy procesie ogrzewania np. lodu przedstawiony jest na rysunku 2.2.1. Podobne zachowanie obserwujemy przy dostarczaniu ciepła do cieczy. Początkowo jej temperatura rośnie, aż do osiągnięcia temperatury wrzenia. Dalsze ogrzewanie cieczy nie zmienia temperatury układu, powodując tylko gwałtowne parowanie cieczy. Po zamianie całej cieczy w parę, przy dalszym dostarczaniu ciepła temperatura układu (składającego się tylko z pary) zaczyna ponownie rosnąć.



Rys. 2.2.1: Krzywa ogrzewania substancji krystalicznej.

### Wyznaczanie ciepła topnienia przy użyciu kalorymetru

Jeżeli przygotujemy kalorymetr z wodą o znanej masie  $m_w$  w temperaturze  $T_p$  i wrzucimy do niego masę  $m_l$  topniejącego lodu (czyli w temperaturze  $0^\circ C$ ), lód roztopi się i ustali się temperatura końcowa  $T_k$ . Z jednej strony woda i kalorymetr oddają ciepło aż do ustalenia się temperatury końcowej  $T_k$ , z drugiej strony ciepło to zostaje wydatkowane najpierw na roztopienie się lodu, a następnie podgrzanie wody powstałej z roztopionego już lodu do temperatury  $T_k$ . Możemy więc napisać bilans cieplny:

$$(m_w c_w + m_k c_k) (T_p - T_k) = m_l [q_t + c_w (T_k - 0^\circ C)], \quad (2.2.5)$$

gdzie  $m_k$  i  $c_k$  są masą i ciepłem właściwym kalorymetru, a  $q_t$  jest ciepłem topnienia lodu. Ciepło topnienia lodu jest więc równe:

$$q_t = \frac{(c_w m_w + c_k m_k) (T_p - T_k)}{m_l} - c_w T_k. \quad (2.2.6)$$

## 2.2.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: kalorymetr, termometr, waga z zestawem odważników.

### Przebieg doświadczenia

Sprawdzić czy waga jest wypoziomowana. Zważyć środkowe naczynie kalorymetru razem z mieszadłem. Nalać letniej wody (około  $30^{\circ}\text{C}$ ) do kalorymetru i zważyć kalorymetr z wodą. Kiedy temperatura wody w kalorymetrze ustabilizuje się, zanotować ją.

W moździerzu pokruszyć lód na małe ( $20 - 30\text{ g}$ ) kawałki. Doprowadzić do sytuacji, w której w naczyniu będzie mieszanina wody z lodem. Lód ma wtedy temperaturę równą dokładnie  $0^{\circ}\text{C}$ . Wysuszyć bibułą kilka kawałków lodu i wrzucić je do kalorymetru. Ciepło topnienia lodu jest bardzo duże ( $332 \cdot 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ) więc wprowadzenie do kalorymetru lodu nawet z odrobiną wody na jego powierzchni daje duże błędy w bilansie cieplnym.

Mieszając ciągle wodę poczekać aż kawałki lodu całkowicie roztopią się. Zapisać temperaturę końcową i zważyć kalorymetr w celu ustalenia masy roztopionego lodu. Kilkakrotnie powtórzyć wykonane pomiary.

### 2.2.3 Opracowanie wyników

Obliczyć ciepło topnienia lodu korzystając z bilansu cieplnego. Jako ciepło właściwe kalorymetru przyjąć wartość tablicową dla aluminium. Wyznaczyć niepewności pomiarowe otrzymanych wyników. Porównać wynik z wartością tablicową i przedyskutować niepewności systematyczne wykonanych pomiarów.

## 2.3 Wyznaczanie ciepła parowania wody

Celem ćwiczenia jest pomiar ciepła parowania wody w temperaturze wrzenia.

*Zagadnienia do przygotowania:*

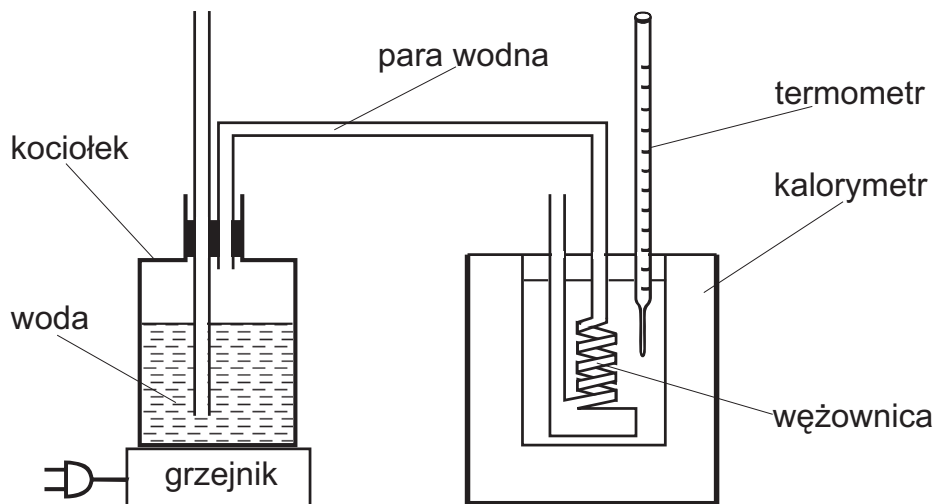
- temperatura i energia wewnętrzna;
- przepływ ciepła, pierwsza zasada termodynamiki;
- zasada działania i metoda pomiaru ilości ciepła za pomocą kalorymetru;
- przemiany stanu skupienia materii i związane z tym ciepło przemiany.

Literatura podstawowa: [2], [9], [10].

### 2.3.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Większość informacji podana została w rozdziale 2.2, tutaj przedstawione są specyficzne pojęcia potrzebne przy wyznaczeniu ciepła topnienia lodu przy użyciu kalorymetru.

Układ doświadczalny (przedstawiony na rysunku 2.3.1) pozwala na skroplenie pary wodnej o temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  w kalorymtrze wypełnionym wodą o temperaturze początkowej  $T_p$ . Mierząc ilość ciepła wydzielanego przy skraplaniu się pary wodnej, wyznaczamy oczywiście ilość ciepła potrzebnego na odparowanie tej samej masy wody.



Rys. 2.3.1: Układ pomiarowy do wyznaczenia ciepła parowania wody.

Na początku musimy wyznaczyć masę  $m_k$  suchego kalorymtra wraz z wężownicą i mieszałką. Następnie napełniamy kalorymtr wodą i wyznaczamy jej masę  $m_w$  ważąc kalorymtr z wodą. Mierzmy temperaturę początkową  $T_p$  i wprowadzamy wąż z parą wodną na pewien czas do kalorymtra. Po skropleniu się pary wyznaczamy temperaturę  $T_k$  jaka się ustabilizowała w kalorymtrze. Ważąc powtórnie kalorymtr z wodą wyznaczamy masę skroplonej pary  $m_p$ . Ciepło oddane przy skraplaniu pary  $q_p$  na jednostkę jej masy i przy ochładzaniu wody powstałej ze skroplonej pary od  $100^{\circ}\text{C}$  do  $T_k$  musi być równe ciepłu pobranemu przez kalorymtr i wodę w nim zawartą

$$m_p [q_p + c_w (100^{\circ}\text{C} - T_k)] = (c_w m_w + c_k m_k) (T_k - T_p). \quad (2.3.1)$$

Ciepło parowania wody jest więc równe

$$q_p = \frac{(c_w m_w + c_k m_k) (T_k - T_p)}{m_p} - c_w (100^{\circ}\text{C} - T_k). \quad (2.3.2)$$

Jeżeli średnie ciepło kalorymtra było wyznaczone eksperymentalnie, należy wyznaczyć z pomiaru wielkość  $C = c_k m_k$ , aby uniknąć zwiększania niepewności pomiaru pochodzącej z niedokładności wyznaczenia  $m_k$ .



### 2.3.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Przyrządy: palnik i kociołek do wytwarzania pary wodnej, kalorymetr z wężownicą do skraplania pary, termometr, waga z zestawem odważników.

#### Przebieg doświadczenia

Upewnić się, że w kociołku jest odpowiednia ilość wody, a następnie włączyć palnik. W czasie gdy woda w kociołku będzie się podgrzewać, zważyć wewnętrzne naczynie kalorymetru, mieszadło i wężownicę, upewniwszy się uprzednio, że nie ma w niej wody. Nalać wody do kalorymetru tak, aby cała spirala wężownicy była zakryta, zważyć kalorymetr z wodą.

Wstawić kalorymetr do zewnętrznego naczynia izolującego i rozpocząć obserwację temperatury. Kiedy temperatura wody w kalorymetrze ustabilizuje się, zanotować ją i rozpocząć wprowadzanie pary do wężownicy. Należy zminimalizować ilość pary, która skropi się poza kalorymetrem.

Gdy temperatura wzrośnie o  $10 - 15^{\circ}\text{C}$  zakończyć wprowadzanie pary do wężownicy i ponownie poczekać na ustabilizowanie się temperatury w kalorymetrze. Zapisać temperaturę końcową i zważyć kalorymetr w celu ustalenia masy skroplonej pary wodnej. Kilkakrotnie powtórzyć wykonane pomiary. Na koniec wyznaczyć średnie ciepło właściwe kalorymetru. W tym celu do kalorymetru z wodą o ustalonej temperaturze i znanej masie dolać wody o innej znanej temperaturze i masie. Po ustaleniu się równowagi zmierzyć temperaturę końcową.

### 2.3.3 Opracowanie wyników

Obliczyć ciepło właściwe kalorymetru i oszacować niepewność pomiaru tego ciepła. Obliczyć ciepło parowania wody korzystając z wcześniejszego rezultatu. Wyznaczyć niepewność pomiarową otrzymanych wyników. Porównać wynik z wartością tablicową i przedyskutować niepewności systematyczne wykonanych pomiarów.

## 2.4 Wyznaczanie ciepła właściwego ciał stałych

Celem ćwiczenia jest pomiar ciepła właściwego trzech ciał stałych.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- temperatura i energia wewnętrzna;
- przepływ ciepła, pierwsza zasada termodynamiki;
- zasada działania i metoda pomiaru ciepła za pomocą kalorymetru;
- przemiany stanu skupienia materii i związane z tym ciepło przemiany.

Literatura podstawowa: [1], [2], [13].

### 2.4.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Większość informacji podana została w rozdziale 2.2, tutaj przedstawione są specyficzne pojęcia potrzebne przy wyznaczeniu ciepła właściwego ciał stałych.

Ciało stałe o znanej masie  $m_c$  podgrzewamy w łaźni parowej do temperatury wrzenia wody  $T_c$ . W kalorymetrze mamy przygotowaną wodę o masie  $m_w$  i temperaturze  $T_p$ . Wrzucamy ciało do kalorymetru i czekamy, aż ustali się końcowa temperatura  $T_k$ .

Ciało oddaje ciepło, które jest w całości pobierane przez kalorymetr i wodę. Ciepło oddane wynosi więc:

$$c_{\text{oddane}} = m_c c (T_c - T_k), \quad (2.4.1)$$

gdzie  $c$  jest szukanym ciepłem właściwym ciała, a ciepło pobrane wynosi:

$$c_{\text{pobrane}} = (m_w c_w + m_k c_k) (T_k - T_p), \quad (2.4.2)$$

gdzie  $m_k$  i  $c_k$  są masą i ciepłem właściwym kalorymetru. Przyrównując do siebie ciepło pobrane i oddane, a więc sporządzając bilans cieplny, otrzymamy wzór na ciepło właściwe badanego ciała

$$c = \frac{(c_w m_w + c_k m_k) (T_k - T_p)}{m_c (T_c - T_k)}. \quad (2.4.3)$$

### 2.4.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Przyrządy: kalorymetr, łaźnia parowa, termometr, waga z zestawem odważników.

#### Przebieg doświadczenia

Sprawdzić czy waga jest wypoziomowana. Zważyć środkowe naczynie kalorymetru razem z mieszadłem, oraz ciała, których ciepło właściwe będzie wyznaczane. Nalać wody do kalorymetru i zważyć kalorymetr z wodą. Kiedy temperatura wody w kalorymetrze ustabilizuje się, zanotować ją.

Zagotować wodę w zbiorniku doprowadzającym parę do łaźni parowej. Kiedy woda zacznie się gotować, wprowadzić ciało do łaźni i poczekać kilka minut, aż będzie można przyjąć, że temperatura ciała jest równa temperaturze pary wodnej. Sprawdzić jakie jest ciśnienie, żeby móc dokładnie określić temperaturę wrzenia wody.

Ciało z łaźni przenieść do kalorymetru. Należy to zrobić bardzo szybko i sprawnie, aby uniknąć strat ciepła. Natychmiast po wrzuceniu ciała do kalorymetru z wodą rozpocząć pomiar temperatury, energicznie mieszając wodę w kalorymetrze. Pomiar temperatury wykonywać średnio co 10 sekund. Kilkakrotnie powtórzyć pomiary.

### 2.4.3 Opracowanie pomiarów

Obliczyć ciepło właściwe korzystając z bilansu cieplnego. Jako ciepło właściwe kalorymetru przyjąć wartość tablicową dla aluminium. Oszacować niepewność pomiarową otrzymanych wyników. Porównać wynik z wartością tablicową i przedyskutować niepewności systematyczne wykonanych pomiarów.

## 2.5 Wyznaczanie ciepła właściwego cieczy metodą ostygnięcia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie ciepła właściwego gliceryny metodą ostygnięcia.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- przepływ ciepła (przewodnictwo, promieniowanie, konwekcja);
- ciepło właściwe - definicja;
- pomiar ciepła właściwego metodą ostygnięcia.

Literatura podstawowa: [25] §19.11; [13] §34-37; literatura dodatkowa: [14] §35-39; [2], [1].

### 2.5.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Ostygnięcie

Jeżeli ciało o temperaturze  $T_1$  znajduje się w ośrodku o niższej temperaturze  $T_0$ , to w wyniku utraty ciepła (na drodze przewodnictwa, promieniowania i konwekcji) temperatura ciała maleje z upływem czasu. Prędkość ostygnięcia zależy od własności ciała stygnącego i ośrodka oraz od różnicy ich temperatur. Newton zauważył, że jeżeli temperatura stygnącego ciała nie jest zbyt wysoka to ilość ciepła tracona przez stygnące ciało w czasie  $t$  jest proporcjonalna do różnicy temperatur  $\tau$  stygnącego ciała i ośrodka. Tak sformułowane przez Newtona prawo ostygnięcia ciał spełnione jest, gdy różnica temperatur stygnącego ciała i ośrodka nie jest zbyt duża. W postaci różniczkowej można je zapisać następująco:

$$\frac{d\tau}{dt} = -K\tau, \quad (2.5.1)$$

gdzie  $d\tau$  jest zmianą temperatury ciała zachodzącą w nieskończenie małym przedziale czasu  $dt$ . Prędkość ostygnięcia ciała  $d\tau/dt$  jest więc, w pierwszym przybliżeniu, liniową funkcją różnicy temperatur ( $\tau = T - T_0$ ) stygnącego ciała i ośrodka, w którym proces zachodzi, o ile pojemność cieplna ośrodka jest wystarczająco duża, aby jego temperaturę można było uważać za stałą. Wartość parametru ostygnięcia  $K$  zależy od własności stygnącego ciała i ośrodka. Po scałkowaniu równania (2.5.1) otrzymujemy:

$$\ln \tau = -Kt + C \quad (2.5.2)$$

Stałą całkowania  $C$  znajdujemy znając warunki początkowe. W chwili  $t = 0$  w ośrodku o temperaturze  $T_0$  umieszczone zostało ciało o temperaturze  $T_1$ , więc z równania

(2.5.2) otrzymujemy  $\ln(T_1 - T_0) = C$ . W konsekwencji równanie (2.5.2) możemy zapisać w postaci  $\ln(T - T_0) = -Kt + \ln(T_1 - T_0)$ , lub w postaci równoważnej:

$$\ln \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = -Kt. \quad (2.5.3)$$

Prawo ostygnięcia możemy również zapisać w postaci wykładniczej:

$$T - T_0 = (T_1 - T_0) e^{-Kt}. \quad (2.5.4)$$

Jest faktem eksperymentalnym, że ciała o małej pojemności cieplnej  $mc$  ( $c$  jest ciepłem właściwym, a  $m$  masą ciała stygnącego) stygną szybciej niż ciała o większej pojemności cieplnej. Szybkość ostygnięcia jest też proporcjonalna do powierzchni  $S$  stygnącego ciała. Możemy więc zapisać:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{kS}{mc} \tau, \quad (2.5.5)$$

gdzie  $k$  jest stałą niezależną ani od powierzchni, ani od pojemności cieplnej. Z porównania zależności (2.5.1) i (2.5.5) otrzymujemy:

$$K = \frac{kS}{mc}. \quad (2.5.6)$$

Wobec tego równanie (2.5.4) możemy przepisać w postaci:

$$T - T_0 = (T_1 - T_0) e^{-kSt/mc}. \quad (2.5.7)$$

Możemy więc powiedzieć, że różnica temperatur między ciałem stygnącym a otoczeniem maleje w sposób wykładniczy z szybkością proporcjonalną do powierzchni stygnącego ciała a odwrotnie proporcjonalną do jego pojemności cieplnej.

## 2.5.2 Przebieg pomiarów

### Układ pomiarowy

W skład układu doświadczalnego wchodzi: naczynko pomiarowe zamykane korkiem z termometrem, łaźnia wodna (układ do ogrzewania naczynia pomiarowego w kąpielu wodnej), kalorymetr, menzurka, waga, woda destylowana, gliceryna.

### Metoda pomiarowa

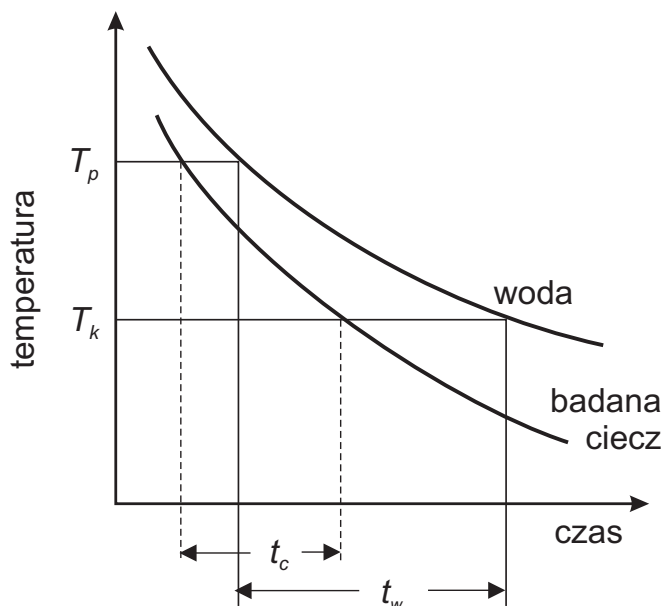
Dwa ciała o identycznym kształcie i powierzchni w identycznych warunkach stygną w tym samym przedziale temperatur (od temperatury początkowej  $T_p$  do temperatury końcowej  $T_k$ ) w różnych czasach  $t_w$  i  $t_c$ . Jeżeli dysponujemy substancją wzorcową, której ciepło właściwe znamy to ciepło właściwe substancji badanej możemy wyznaczyć wykonując, w identycznych warunkach, pomiar zależności temperatury od czasu ostygnięcia. Korzystając z równania (2.5.7) możemy czasy  $t_w$  i  $t_c$  wyrazić jako:

$$\begin{aligned} t_w &= - \left( \frac{m_w c_w}{kS} \right) \ln \left( \frac{T_k - T_0}{T_p - T_0} \right) \\ t_c &= - \left( \frac{m_c c_c}{kS} \right) \ln \left( \frac{T_k - T_0}{T_p - T_0} \right) \end{aligned}, \quad (2.5.8)$$

gdzie  $m_w$  i  $m_c$  są odpowiednio masami substancji wzorcowej i badanej. Po podzieleniu tych relacji stronami, otrzymamy wyrażenie:

$$c_c = \frac{t_c m_w}{t_w m_c} c_w, \quad (2.5.9)$$

pozwalające obliczyć ciepło właściwe badanej substancji na podstawie krzywych ostygnięcia substancji wzorcowej i badanej (rysunek 2.5.1).



Rys. 2.5.1: Krzywe ostygnięcia dla wody (substancja wzorcowa) i badanej cieczy.

W celu wyznaczenia ciepła właściwego metodą ostygnięcia możemy posłużyć się też liniową zależnością (2.5.3), która we współrzędnych półlogarytmicznych  $y = \ln \left( \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \right)$  i  $t$  jest równaniem prostej ( $y = at + b$ ) o współczynniku kierunkowym  $a = -kS/mc$ . Metodą regresji liniowej możemy wyznaczyć wartości  $a_w$  i  $a_c$  dla wzorca i substancji badanej. Ponieważ  $a_w = -kS/m_w c_w$  i  $a_c = -kS/m_c c_c$  więc ciepło właściwe badanego ciała wyznaczymy korzystając z relacji:

$$c_c = \frac{m_w a_w}{m_c a_c} c_w. \quad (2.5.10)$$

### Przebieg doświadczenia

Zważyć puste naczynie pomiarowe (z dokładnością do 10 mg). Napełnić naczynie pomiarowe wodą destylowaną (do kreski miarowej) i zważyć ponownie. Naczynie pomiarowe zamknąć korkiem z termometrem, wstawić do kąpielii wodnej i ogrzać do temperatury 85°C. Po wyjęciu z kąpielii wodnej osuszyć naczynie pomiarowe i umieścić je w kalorymetrze. Notować co jedną minutę wskazania termometru w zakresie temperatur 80 – 55°C. Używając menzurki zmierzyć objętość zanurzonej części termometru.

Wylać wodę z naczynka pomiarowego i dokładnie je osuszyć (również wewnątrz), a następnie napełnić je gliceryną i zważyć. Przeprowadzić pomiar zależności temperatury od czasu dla stygnącej gliceryny w taki sam sposób jak dla wody.

### 2.5.3 Opracowanie wyników

Dla wody i gliceryny wykreślić krzywe ostygnięcia tj. wykresy zależności temperatury  $T$  od czasu  $t$  (na jednym rysunku). Skale na osiach dobrać tak, aby wykres był czytelny. Dla kilku punktów zaznaczyć prostokąty niepewności pomiarowych.

Znaleźć, na podstawie krzywych ostygnięcia,  $t_w$  i  $t_c$  dla kilku zakresów temperatury. Na podstawie wzoru (2.5.9) wyznaczyć ciepło właściwe gliceryny w tych zakresach temperatury oraz wartość średnią ciepła właściwego. Oszacować niepewność pojedynczego pomiaru i wartości średniej.

Dla obu badanych cieczy wykonać wykresy zależności  $\ln\left(\frac{T-T_0}{T_1-T_0}\right)$  od czasu  $t$ . Dopasować proste metodą klasycznej regresji liniowej. Korzystając ze wzoru (2.5.10) wyznaczyć ciepło właściwe gliceryny i jego niepewność pomiarową.

W obliczeniach uwzględnić straty cieplne naczynka i termometru. Pojemność cieplna naczynka i termometru wynosi:

$$R_w = m_n c_n + V \cdot 1.9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{cm}^{-3}, \quad (2.5.11)$$

gdzie  $m_n$  jest masą naczynka (w kilogramach),  $c_n = 0.9 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  jego ciepłem właściwym, a  $V$  objętością zanurzonej części termometru (wyrażoną w  $\text{cm}^3$ ).

Przeprowadzić dyskusję zgodności uzyskanych wyników z wartościami, które można znaleźć w literaturze.

## 2.6 Wyznaczanie współczynnika napięcia powierzchniowego cieczy

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika napięcia powierzchniowego cieczy metodą kapilar i metodą stalagmometryczną.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- oddziaływania międzycząsteczkowe w cieczy;
- powstawanie menisku.

Literatura podstawowa: [1], [2], [13].

## 2.6.1 Podstawowe pojęcia i definicje

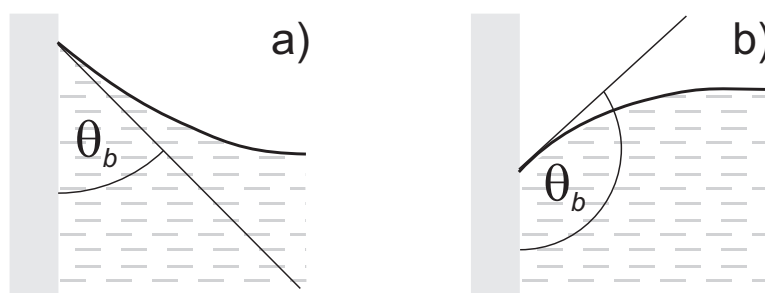
### Oddziaływania międzycząsteczkowe w cieczy

Pomiędzy cząsteczkami cieczy działają krótkozasięgowe siły spójności (siły van der Waalsa), które dla małych odległości są odpychające, a dla większych przyciągające. Na cząsteczkę znajdującą się wewnątrz cieczy działają inne cząsteczki, które są równomiernie rozłożone dookoła niej i dlatego wypadkowa siła jest równa zeru. Natomiast w przypadku cząsteczki położonej na powierzchni cieczy, inne cząsteczki położone są tylko po stronie od wnętrza cieczy. Powoduje to powstanie wypadkowej siły spójności skierowanej do wnętrza cieczy. Jest to źródłem ciśnienia powierzchniowego, czyli różnicy między ciśnieniem w cieczy i ciśnieniem ośrodka gazowego znajdującego się nad powierzchnią swobodną cieczy.

Aby przesunąć cząsteczkę z wnętrza cieczy na powierzchnię, musimy wykonać pracę przeciwko siłom spójności. Wobec tego cząsteczki tworzące warstwę powierzchniową mają dodatkową energię potencjalną. W warunkach równowagi trwałej ciecz ma minimum energii potencjalnej, więc dąży ona do przyjęcia kształtu odpowiadającego możliwie najmniejszej powierzchni. Powiększenie powierzchni cieczy o  $S$  wiąże się z wykonaniem pracy  $W$ . Współczynnik napięcia powierzchniowego  $\sigma$  definiujemy jako stosunek  $\sigma = W/S$  lub jako  $\sigma = F/l$ , gdzie  $F$  jest siłą działającą stycznie do powierzchni cieczy, a  $l$  jest długością brzegu tej powierzchni.

### Powstawanie menisku

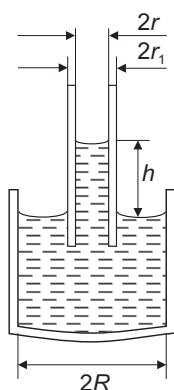
Jeżeli ciecz styka się z ciałem stałym, np. ściankami naczynia, to występuje oddziaływanie między cząsteczkami cieczy, a cząsteczkami ciała stałego. Są to siły przylegania, które mogą być większe lub mniejsze od sił spójności. Powierzchnia swobodna cieczy, kontaktującej się z powierzchnią ciała stałego, nosi nazwę menisku. Kąt  $\theta_b$ , jaki tworzy powierzchnia cieczy z powierzchnią ciała stałego, z którym ciecz się styka, nazywamy kątem brzegowym. Możliwe są dwie sytuacje (rysunek 2.6.1): kąt brzegowy ostry (menisk wklęsły, ciecz zwilża powierzchnię) oraz kąt brzegowy rozwarty (menisk wypukły, ciecz nie zwilża powierzchni).



Rys. 2.6.1: Powstawanie menisku wklęsłego (a) i wypukłego (b).

### Metoda kapilar

W naczyniu z cieczą zanurzamy otwartą kapilarę, tak aby wystawała ponad ciecz (patrz rysunek 2.6.2).



Rys. 2.6.2: Naczynie z cieczą i zanurzona kapilara.

W zależności od tego czy ciecz zwilża powierzchnię ścianki kapilary czy też jej nie zwilża, w kapilarze utworzy się menisk wklęsły lub wypukły. W zależności od rodzaju menisku nastąpi wzniesienie lub spadek słupka cieczy wewnątrz kapilary w stosunku do powierzchni cieczy w naczyniu. W dalszej części zajmiemy się tylko cieczą zwilżającą, podobne rozważania można łatwo powtórzyć dla cieczy niezwilżającej.

Siła powierzchniowa powodująca wznoszenie słupka cieczy działa na obwodzie kapilary o promieniu wewnętrznym  $r$  i wynosi

$$F_1 = 2\pi r\sigma. \quad (2.6.1)$$

Siła ta jest równoważona ciężarem słupka cieczy o wysokości  $h_1$

$$F_2 = \pi r^2 h_1 \rho g, \quad (2.6.2)$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy,  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim. Z warunku równowagi tych sił otrzymujemy wyrażenie na napięcie powierzchniowe cieczy

$$\sigma = \frac{r h_1 \rho g}{2}. \quad (2.6.3)$$

Jeżeli naczynie z cieczą jest odpowiednio duże to można przyjąć, że wzniesienie słupa cieczy w kapilarze wynosi  $h = h_1$ .

Jeżeli ciecz znajduje się w niedużym naczyniu o promieniu wewnętrznym  $R$ , to trzeba uwzględnić również wzniesienie się cieczy między kapilarą (jej promień zewnętrzny to  $r_1$ ) a brzegiem naczynia. Siły powierzchniowe wynoszą

$$F_3 = 2\pi(r_1 + R)\sigma, \quad (2.6.4)$$

a ciężar słupa cieczy

$$F_4 = \pi(R^2 - r_1^2)h_2 \rho g. \quad (2.6.5)$$

Z porównania dostajemy

$$h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g(R - r_1)}. \quad (2.6.6)$$



Obserwowane wzniesienie słupa cieczy w kapilarze wynosi  $h = h_1 - h_2$ , gdzie  $h_1$  obliczamy ze wzoru (2.6.3). Ostatecznie

$$\sigma = \frac{r h \rho g}{2(1 - \frac{r}{R-r_1})}. \quad (2.6.7)$$

### Metoda stalagmometryczna

Kropla o masie  $m$  wypływająca z rurki kapilarnej odrywa się wtedy, gdy jej ciężar  $mg$  przewyższa nieco siłę  $F = 2\pi r' \sigma$ , z jaką działa napięcie powierzchniowe ( $r'$  to promień przewężenia) – rysunek 2.6.3. Zakładając równowagę ciężaru i siły napięcia powierzchniowego otrzymujemy

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r'}. \quad (2.6.8)$$

Ponieważ pomiaru promienia przewężenia nie można łatwo wykonać, do wyznaczenia napięcia powierzchniowego cieczy wykorzystujemy pomiar względny. Zakładamy, że dwie ciecze o podobnych wartościach napięcia powierzchniowego mają zbliżone promienie przewężenia  $r'$ . Wtedy znając współczynnik napięcia powierzchniowego  $\sigma_1$  dla pewnej cieczy możemy wyznaczyć współczynnik napięcia powierzchniowego  $\sigma_2$  dla innej cieczy z zależności:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (2.6.9)$$

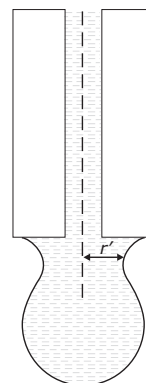
gdzie  $m_1$  i  $m_2$  są masami kropli dla badanych cieczy. Jeżeli  $N$  kropli ma masę  $M$ , to masa jednej kropli wynosi  $m = M/N$ , a wtedy

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{M_1 N_2}{M_2 N_1}. \quad (2.6.10)$$

Jeżeli będziemy zliczać krople wypływające z tej samej objętości to stosunek współczynników napięcia powierzchniowego wynosi

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\rho_1 N_2}{\rho_2 N_1}, \quad (2.6.11)$$

gdzie  $\rho_1$  i  $\rho_2$  są gęstościami badanych cieczy.



Rys. 2.6.3: Kropla wypływająca z rurki kapilarnej.

## 2.6.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: kapilary, mikroskop, suwmiarka, stalagmometr i miarka na statywie, termometr, woda destylowana, alkohol etylowy, naczynia szklane, okulary ochronne, żyłotka, plastelina.

### Metoda pomiarowa

Dla każdej z kapilar wyznaczyć wysokość słupka cieczy wody destylowanej  $h$  w kapilarze ponad powierzchnią cieczy w naczyniu. Po zamurzeniu kapilary w naczyniu należy ją pochylić, a następnie z powrotem wyprostować. Za pomocą mikroskopu zmierzyć średnice kapilar. Można zbadać kilka kawałków tej samej kapilary. Optymalnie byłoby złamać kapilarę w miejscu, gdzie dotarł słup cieczy. Przy cięciu kapilar żyłtką należy korzystać z okularów ochronnych.

Metodę stalagmometryczną można zastosować na dwa sposoby. Pierwszy sposób polega na mierzeniu masy znanych ilości kropeł (100 kropeł) dla wody destylowanej i alkoholu. Drugi sposób to zliczanie liczby kropeł obu cieczy wypływających z tej samej objętości. Wtedy potrzebną gęstość cieczy należy odczytać z tablic fizycznych.

## 2.6.3 Opracowanie wyników

Na podstawie pomiarów dla poszczególnych kapilar wyznaczyć średnią wartość współczynnika napięcia powierzchniowego i jego niepewność. Należy sprawdzić jak wynik zmienia się po uwzględnieniu rozmiaru naczynia z cieczą.

Znając współczynnik napięcia powierzchniowego dla wody destylowanej, korzystając z metody stalagmometrycznej, obliczyć współczynnik napięcia powierzchniowego dla alkoholu wraz z niepewnością pomiarową. W tym wypadku wykorzystać obie metody zastosowane w pomiarze.

## 2.7 Równanie stanu gazu doskonałego

Celem ćwiczenia jest zbadanie przemian stanu gazu doskonałego (powietrza) oraz wyznaczenie uniwersalnej stałej gazowej, współczynnika rozszerzalności cieplnej, współczynnika prężności cieplnej i współczynnika ściśliwości objętościowej.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- równanie stanu gazu doskonałego (Clapeyrona);
- prawo Boyle'a Mariotte'a ( $T=const$ );
- prawo Gay-Lussaca ( $p=const$ );
- prawo Charlesa ( $V=const$ );
- definicje współczynników.

Zalecana literatura: [13], [1], [24].

### 2.7.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Przemiany stanu gazu doskonałego

Stan gazu jest określony przez jego temperaturę  $T$ , ciśnienie  $p$ , objętość  $V$  i ilość substancji  $n$  (liczba moli). Jeżeli ilość substancji się nie zmienia, to zmianę objętości związaną ze zmianami temperatury i ciśnienia jest dana przez różniczkę zupełną

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n} dT + \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,n} dp. \quad (2.7.1)$$

Analogicznie, następująca różniczką odpowiada zmianom ciśnienia wraz ze zmianami temperatury i objętości

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n} dT + \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T,n} dV. \quad (2.7.2)$$

Pochodne cząstkowe we wzorach (2.7.1) i (2.7.2) odpowiadają geometrycznie współczynnikiem kierunkowym stycznych do funkcji  $V = f(T)$ ,  $V = f(p)$ ,  $p = f(T)$ ,  $p = f(V)$ , a ich wartości zależą od początkowych wartości  $V_0$ ,  $p_0$ , czy  $T_0$ .

– współczynnik rozszerzalności cieplnej

$$\gamma_0 = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n}, \quad (2.7.3)$$

– współczynnik prężności cieplnej

$$\beta_0 = \frac{1}{p_0} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n}, \quad (2.7.4)$$

– współczynnik ściśliwości objętościowej

$$\chi_0 = \frac{-1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,n}. \quad (2.7.5)$$

Korzystając ze wzoru (2.7.1) można pokazać, że

$$\gamma_0 = \chi_0 \beta_0 p_0. \quad (2.7.6)$$

Podane współczynniki wykorzystuje się w badaniach nad przemianami stanu gazu. Najczęściej rozważane przemiany i prawa je opisujące to

- przemiana izotermiczna, prawo Boyle'a Mariotte'a ( $pV = \text{const}$ ),
- przemiana izobaryczna, prawo Gay-Lussaca ( $V/T = \text{const}$ ),
- przemiana izochoryczna, prawo Charlesa ( $p/T = \text{const}$ ),
- przemiana adiabatyczna, równanie Poissona ( $pV^\kappa = \text{const}$ ).

Warto pokazać sposób uzyskania wybranych praw. W przypadku przemiany izobarycznej ( $p = \text{const}$ ) z równania (2.7.1) wynika  $dV = V_0 \gamma_0 dT$ . Dla  $\gamma_0 = \text{const}$  scałkowanie

równania daje następujący wynik

$$V = V_0[1 + \gamma_0(T - T_0)]. \quad (2.7.7)$$

Z doświadczenia wynika, że zależność (2.7.7) jest liniowa, a przez odpowiedni dobór początku skali temperatur ( $T_0 = 1/\gamma_0$  w kelwinach) otrzymujemy równanie

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T}. \quad (2.7.8)$$

Przy przemianie izochorycznej ( $V = \text{const}$ ) z równania (2.7.2) wynika  $dp = p_0\beta_0dT$ , a po scałkowaniu z  $\beta_0 = \text{const}$  otrzymujemy

$$p = p_0[1 + \beta_0(T - T_0)]. \quad (2.7.9)$$

Ponownie z doświadczenia wynika, że zależność (2.7.9) jest liniowa, a przez odpowiedni dobór początku skali temperatur ( $T_0 = 1/\beta_0$  w kelwinach) otrzymujemy równanie

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T}. \quad (2.7.10)$$

Przy przemianie izotermicznej ( $T = \text{const}$ ) z doświadczenia otrzymujemy zależność

$$pV = p_0V_0. \quad (2.7.11)$$

W wyniku połączenia równań (2.7.8), (2.7.10) i (2.7.11) otrzymujemy następującą zależność:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}. \quad (2.7.12)$$

Równanie (2.7.12) może służyć do tzw. redukcji objętości, ciśnienia czy gęstości gazów do warunków normalnych, tj.  $T_0 = 0^\circ C = 273.15 K$ ,  $p_0 = 760 mmHg = 101325 Pa$ . Jeden mol gazu doskonałego w warunkach normalnych zajmuje objętość  $V_m = 0.022414 m^3/mol$ , a więc liczbę moli gazu możemy wyliczyć jako  $n = V_0/V_m$ .

### Równanie stanu gazu doskonałego

W przypadku gazu doskonałego parametry stanu połączone są tak zwanym ogólnym równaniem stanu gazu (Clapeyrona)

$$pV = nRT, \quad (2.7.13)$$

gdzie  $R = 8.314 J/(mol \cdot K)$  jest uniwersalną stałą gazową. Z równania (2.7.13) wynikają poszczególne równania przemian stanu gazu. Przyjmijmy następujące oznaczenia dla

pochodnych cząstkowych

$$a_p = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n}, \quad a_V = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n}, \quad a_T = \left( \frac{\partial V}{\partial p^{-1}} \right)_{T,n}. \quad (2.7.14)$$

Jeżeli z doświadczenia uzyskamy parametry  $a_p$ ,  $a_V$  i  $a_T$ , to możemy obliczyć współczynniki

$$\gamma_0 = \frac{a_p}{V_0}, \quad \beta_0 = \frac{a_V}{p_0}. \quad (2.7.15)$$

Zakładając słuszność równania Clapeyrona możemy wyznaczyć uniwersalną stałą gazową z jednego ze wzorów

$$R = \frac{p_0 a_p}{n}, \quad R = \frac{a_V V_0}{n}, \quad R = \frac{a_T}{n T_0}. \quad (2.7.16)$$

## 2.7.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego wchodzi: szklana rurka pomiarowa połączona z manometrem rtęciowym, statyw z przymiarem, termostat przepływowy, zbiornik z wodą destylowaną, termometr rtęciowy, barometr.

W szklanej rurce pomiarowej, połączonej z manometrem rtęciowym w kształcie litery U, znajduje się pewna ilość badanego powietrza. Manometr składa się z elastycznego przewodu z tworzywa sztucznego oraz otwartego zapasowego zbiornika z rtęcią. Rurka pomiarowa jest zamocowana na stałe do statywu, natomiast zbiornik zapasowy manometru jest przesuwany w kierunku pionowym wzdłuż statywu z pomocą samoblokujących się prowadnic. Przez zmianę wysokości zbiornika z rtęcią można zmieniać ciśnienie i objętość badanego gazu. W celu zmiany temperatury badanego gazu rurka pomiarowa jest otoczona kołnierzem rurkowym, połączonym z termostatem przepływowym.

Objętość  $V$  badanego powietrza jest proporcjonalna do odczytanej wysokości  $l$  kolumny powietrza:

$$V = \pi(d/2)^2 l + V_z, \quad (2.7.17)$$

gdzie  $d = 1.14\text{cm}$  to średnica wewnętrzna rurki pomiarowej,  $V_z = 1.02\text{ml}$  objętość zaznaczonej zaokrąglonej części zbiornika. Ciśnienie badanego powietrza obliczamy ze wzoru

$$p = p_a + h a_h, \quad (2.7.18)$$

gdzie  $p_a$  to zewnętrzne ciśnienie powietrza,  $h$  różnica wysokości poziomów rtęci,  $a_h = (400/3)Pa/mm$  współczynnik proporcjonalności. W zależności od tego, czy poziom rtęci jest wyższy w zbiorniku zapasowym czy pomiarowym, należy stosować  $h$  ze znakiem dodatnim lub ujemnym.

### Przebieg doświadczenia

Zmierzyć zewnętrzne ciśnienie powietrza  $p_a$ . W pierwszej części doświadczenia należy ustalić temperaturę  $T_1$  do pomiaru zależności  $p$  i  $V$  przy stałym  $T = T_1$ . Należy włączyć termostat przepływowy, który zagwarantuje stałość  $T_1$ . Zmieniając położenie zbiornika zapasowego z rtęcią należy zmieniać ciśnienie badanego powietrza. Wykorzystujemy cały dostępny zakres położeń zbiornika, zmieniamy położenie zbiornika co około  $5\text{cm}$ . Notować różnicę poziomów rtęci  $h$  i długość słupa powietrza w rurce  $l$ .

W drugiej części doświadczenia należy wyznaczyć wpływ temperatury na ciśnienie i objętość gazu. Badany gaz podgrzewamy za pomocą termostatu przepływowego. Należy zauważyć, że temperatura ustawiana na termostacie może różnić się od temperatury mierzonej termometrem rtęciowym umieszczonym bezpośrednio przy rurce pomiarowej. Po każdej zmianie temperatury należy poczekać na jej ustabilizowanie. W temperaturze początkowej  $T_1$  ustalamy ciśnienie gazu na  $p_1 = p_a$  poprzez wyrównanie poziomów rtęci w rurce pomiarowej i zbiorniku zapasowym. W ten sposób ustalamy też objętość  $V_1$ . Należy zaznaczyć poziom rtęci markerem na rurce pomiarowej. Następnie należy podnosić temperaturę w krokach co około  $5$  stopni dochodząc do temperatury wrzenia wody. W każdej temperaturze wyznaczamy: (1) objętość  $V$  przy stałym ciśnieniu  $p = p_1$  (równoważymy poziomy rtęci w rurce pomiarowej i zbiorniku zapasowym); (2) ciśnienie  $p$  przy stałej objętości  $V = V_1$  (zmieniając różnicę poziomów rtęci  $h$  doprowadzamy gaz do pierwotnej objętości  $V_1$ ). Oprócz temperatury notujemy odpowiednio długość słupa powietrza w rurce  $l$  dla (1) i różnicę poziomów rtęci  $h$  dla (2).

### 2.7.3 Opracowanie wyników

Korzystając z pomiarów  $h$  i  $l$  wyliczyć ciśnienie  $p$  i objętość  $V$  dla wszystkich punktów pomiarowych. Zrobić wykresy zależności objętości od ciśnienia oraz objętości od odwrotności ciśnienia przy stałej temperaturze  $T_1$ . Do drugiej zależności dopasować prostą metodą regresji liniowej.

Wykonać wykresy zależności objętości od temperatury ( $p = \text{const}$ ) i zależności ciśnienia od temperatury ( $V = \text{const}$ ). Do wykresów dopasowujemy proste metodą regresji liniowej.

Ze współczynników kierunkowych prostych uzyskujemy wartości pochodnych cząstkowych  $a_p$ ,  $a_V$  i  $a_T$ . Należy pamiętać, że współczynniki te odnoszą się do warunków panujących w czasie eksperymentu ( $p_1$ ,  $V_1$ ,  $T_1$ ), a nie do warunków normalnych ( $p_0$ ,  $V_0$ ,  $T_0$ ). Za pomocą redukcji objętości  $V_1$  do  $V_0$  z równania (2.7.12) znajdujemy liczbę moli  $n$  badanego powietrza. Dalej ze wzorów (2.7.16) wyznaczamy trzy wartości uniwersalnej stałej gazowej  $R$ , a końcowe  $R$  będzie średnią ważoną tych wartości. Z równań (2.7.15) wyznaczamy współczynniki  $\gamma_1$  i  $\beta_1$ , a korzystając ze związku (2.7.6) wyliczamy  $\chi_1$ .

Przeprowadzić analizę niepewności, a wyniki porównać z wartościami tablicowymi. Należy sprawdzić związki

$$\gamma_1 = 1/T_1, \quad \beta_1 = 1/T_1, \quad \chi_1 = 1/p_1, \quad (2.7.19)$$

gdzie temperatura  $T_1$  wyrażona jest w kelwinach.

## 2.8 Pomiar stosunku $C_p/C_V$ metodą Clémenta-Désormes'a

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie  $\kappa$  ( $\kappa = C_P/C_V$ ) metodą Clémenta-Désormes'a dla powietrza.

Zagadnienia do przygotowania:

- I zasada termodynamiki;
- kinetyczna teoria gazów;
- równanie stanu gazu doskonałego;
- przemiany gazu doskonałego;
- ciepło właściwe gazów, ciepło molowe;
- pojęcie temperatury bezwzględnej;
- zasada ekwipartycji energii;
- metoda Clémenta-Désormes'a pomiaru  $\kappa$ ;
- zasada pomiaru ciśnienia manometrem cieczowym;
- wykonanie w postaci pisemnej zadań z podrozdziału 2.8.1.

Literatura podstawowa: [25] §19.6-19.9, 19.11, 20.1-20.5, 20.8-20.9; literatura dodatkowa: [1], [2], [13] §1, 5-9, 61-64, [8] §39.1, 39.2, 39.4 39.5, 40.5, 40.6.

### 2.8.1 Opis gazu w modelu kinetyczno-molekularnym

#### Podstawowe pojęcia i definicje

Kinetyczna teoria gazów wiąże makroskopowe parametry gazu (ciśnienie, temperatura) z wielkościami mikroskopowymi opisującymi cząsteczki tworzące gaz (średnia energia kinetyczna, średnia prędkość kwadratowa). Ze względu na prostotę opisu, dogodnym jest wprowadzenie pojęcia modelowego gazu (gazu doskonałego) posiadającego następujące własności:

- gaz składa się z identycznych cząsteczek;
- suma objętości wszystkich cząsteczek jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z objętością zajmowaną przez gaz;
- całkowita liczba cząsteczek jest bardzo duża;
- cząsteczki znajdują się w beładnym ruchu i podlegają zasadom dynamiki Newtona;
- oddziaływania mają miejsce tylko w momencie zderzenia cząsteczek ze sobą lub ze ściankami naczynia;
- zderzenia są doskonale sprężyste.

### Równanie stanu gazu doskonałego

Przemiany termodynamiczne gazu doskonałego opisuje równanie Clapeyrona nazywane też równaniem stanu gazu doskonałego:

$$pV = nRT, \quad (2.8.1)$$

gdzie  $R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  jest uniwersalną stałą gazową,  $p$  jest ciśnieniem,  $V$  objętością gazu,  $T$  temperaturą bezwzględną, a  $n$  liczbą moli gazu ( $n$  jest liczbą cząsteczek gazu wyrażoną jako wielokrotność liczby Avogadro  $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ ; jeden mol substancji zawiera liczbę Avogadro cząsteczek).

Gazem doskonałym jest gaz spełniający równanie (2.8.1) w pełnym zakresie temperatur i ciśnień. Dla gazów rzeczywistych zadowalającą zgodność z doświadczeniem (do kilku procent) uzyskujemy dla niezbyt wysokich ciśnień (do kilku atmosfer) i temperatur znacząco wyższych od temperatury skraplania.

### Przemiany gazu doskonałego

Gaz może podlegać przemianom, podczas których zmieniają się parametry stanu  $p$ ,  $V$  i/lub  $T$ , przy czym dopóki rozważany gaz możemy traktować jako gaz doskonały parametry stanu spełniają równanie Clapeyrona (2.8.1). Niektóre z przemian, w których ustalony jest jeden parametr, są szczególnie interesujące. W zależności od tego, jaka wielkość jest ustalona w czasie przemiany mówimy o:

- przemianie izobarycznej, gdy nie zmienia się ciśnienie gazu ( $p = \text{const}$ );
- przemianie izochorycznej, gdy nie zmienia się objętość ( $V = \text{const}$ );
- przemianie izotermicznej, gdy temperatura gazu jest stała ( $T = \text{const}$ );
- przemianie adiabatycznej, gdy nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem ( $\Delta Q = 0$ ).

W trzech pierwszych przemianach ustalony jest jeden z parametrów stanu, natomiast w przemianie adiabatycznej nie zachodzi wymiana ciepła z otoczeniem. O przemianie adiabatycznej możemy mówić w przypadku doskonałej izolacji termicznej badanego układu lub gdy rozważana przemiana zachodzi tak szybko, że wymianę ciepła z otoczeniem możemy zaniedbać.

### Ciepło właściwe gazów

Ciepło właściwe jest ilością ciepła, które musimy dostarczyć do jednostki masy substancji, aby spowodować wzrost jej temperatury o jeden kelwin. Pomiaru ciepła właściwego możemy dokonywać w różnych warunkach np. przy stałym ciśnieniu lub przy stałej objętości. Gaz ogrzewany pod stałym ciśnieniem rozprężając się wykonuje pracę, a więc aby uzyskać wzrost temperatury taki sam jak w przemianie izochorycznej należy dostarczyć więcej ciepła. Dlatego w przypadku gazów ciepło właściwe  $c_p$ , wyznaczone w przemianie izobarycznej ( $p = \text{const}$ ), jest zawsze większe od ciepła właściwego  $c_V$ , wyznaczonego w przemianie izochorycznej ( $V = \text{const}$ ).



*Zadanie 1. Pokaż, że  $C_p = C_V + R$ , gdzie  $C_p = Q/n\Delta T$  i  $C_V = Q/n\Delta T$  to ciepło molowe (tj. ciepło właściwe jednego mola gazu) wyznaczone odpowiednio w przemianie izobarycznej i izochorycznej,  $Q$  jest dostarczonym ciepłem powodującym zmianę temperatury o  $\Delta T$ . Wskazówka: skorzystaj z definicji ciepła właściwego, równania stanu gazu doskonałego i I zasady termodynamiki. Pierwsza zasada termodynamiki ( $\Delta U = Q + W$ ) wiąże zmiany energii wewnętrznej układu  $\Delta U$  z energią jaką układ wymienia z otoczeniem w formie ciepła  $Q$  i pracy  $W$ . Energia wewnętrzna układu rośnie, gdy układ pobiera ciepło lub gdy siły zewnętrzne wykonują pracę nad układem, a maleje gdy układ oddaje ciepło lub wykonuje pracę.*

### Zasada ekwipartycji energii

Założmy, że energię cząstki możemy zapisać jako sumę wyrazów kwadratowych w położeniach i prędkościach. Tak możemy zrobić dla energii kinetycznej ruchu postępowego, energii kinetycznej ruchu obrotowego, energii kinetycznej oscylacji oraz energii potencjalnej dla oscylacji. Zasada ekwipartycji (tj. równego podziału) energii mówi, że średnia wartość każdego wkładu do energii całkowitej układu, który ma zależność kwadratową wynosi  $k_B T/2$ , gdzie  $T$  jest temperaturą w skali bezwzględnej. Stała Boltzmanna  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  powiązana jest ze stałą gazową przez związek  $k_B \equiv R/N_A$ .

Dla swobodnego atomu wkład do energii układu pochodzi tylko od energii kinetycznej ruchu postępowego atomu. Potrzebujemy trzech parametrów określających ruch postępowy (są to np. trzy składowe prędkości w układzie kartezjańskim). Każda z tych składowych prędkości daje przyczynek do energii układu wynoszący  $k_B T/2$ .

Ponieważ masa atomu skupiona jest w prawie punktowym jądrze to nie posiada on energii związanej z ruchem wewnętrznym. Jeżeli cząsteczka gazu składa się z wielu atomów to konieczne staje się uwzględnienie wkładów od energii związanej z ruchem kolektywnym atomów. Cząsteczka dwuatomowa może wykonywać rotację względem dwóch osi prostopadłych do prostej łączącej tworzące ją atomy. Każdy z tych dwóch ruchów obrotowych daje wkład do całkowitej energii wynoszący  $k_B T/2$ . Dodatkowo cząsteczka dwuatomowa może podlegać oscylacjom względem położenia równowagi (środką masy cząsteczki). Związana jest z tym energia kinetyczna i energia potencjalna zależna od wzajemnej odległości cząsteczek. Każda z tych energii daje wkład do energii całkowitej wynoszący  $k_B T/2$ .

Doświadczenie pokazuje, że w niskich temperaturach istotne znaczenie ma tylko ruch postępowy cząsteczek. Ze wzrostem temperatury pojawia się rotacja, a następnie – w dostatecznie wysokich temperaturach (około 1000 K) – możliwa staje się oscylacja.

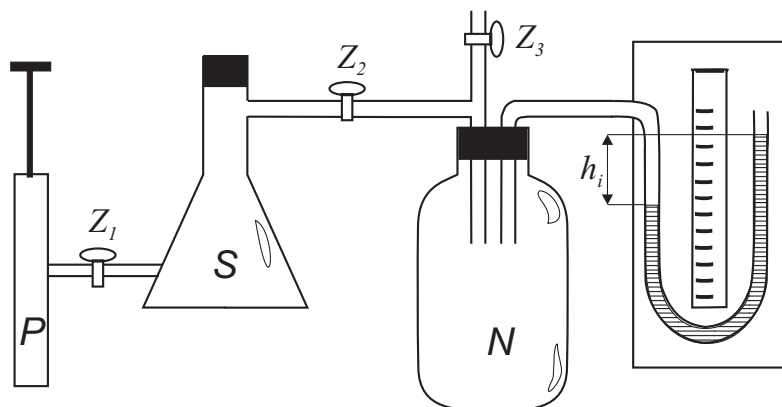
*Zadanie 2. Korzystając z zasady ekwipartycji energii i definicji ciepła właściwego wykaż, że w temperaturze pokojowej ciepło molowe wyznaczone w przemianie izochorycznej  $C_V$ , które w prostym modelu gazu jest związane tylko ze zmianą energii wewnętrznej gazu, powinno być równe  $3/2 R$  ( $12.5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) dla gazu jednoatomowego i  $5/2 R$  ( $20.8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) dla gazu dwuatomowego. Porównaj te wartości z danymi dla rzeczywistych gazów jedno- i dwuatomowych.*

Zadanie 3. Wykorzystując wyniki uzyskane w poprzednich zadaniach wykaż, że dla gazu dwuatomowego  $C_p/C_V = 1.4$ .

## 2.8.2 Przebieg pomiarów

### Układ pomiarowy

W skład układu doświadczalnego przedstawionego na rysunku 2.8.1 wchodzi: szklana butla  $N$  o odbijającej (posrebrzonej) powierzchni, pompka ręczna  $P$ , suszka  $S$ , manometr cieczowy (wypełniony naftą), rurki z zaworami szklanymi.



Rys. 2.8.1: Układ do wyznaczenia wartości  $C_p/C_V$  dla powietrza metodą Clémenta-Désormes'a.

### Metoda pomiarowa

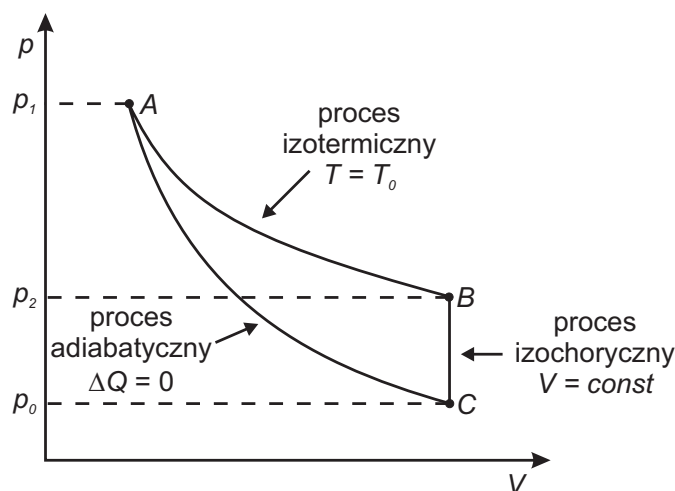
Wyznaczanie wartości  $\kappa$  metodą Clémenta-Désormes'a polega na adyabatycznym rozprężaniu gazu spełniającego równanie stanu gazu doskonałego. Następnie część gazu, która pozostanie w naczyniu pomiarowym, zwanym dalej butlą, przeprowadzana jest do stanu końcowego na drodze procesu izochorycznego ogrzewania (rysunek 2.8.2).

Rozważmy gaz pod ciśnieniem  $p_1$ , wyższym od ciśnienia atmosferycznego  $p_0$ , zamknięty w butli  $N$  (rysunek 2.8.1) o objętości  $V_0$ . Temperatura gazu w butli jest równa temperaturze otoczenia  $T_0$ . Zakładamy, że temperatura otoczenia i ciśnienie atmosferyczne są stałe ( $T_0 = \text{const}$  i  $p_0 = \text{const}$ ). Stan początkowy gazu w butli opisują parametry  $(p_1, V_0, T_0)$  i gaz spełnia równanie Calpeyrona:

$$p_1 V_0 = n_1 R T_0, \quad (2.8.2)$$

gdzie  $n_1$  jest liczbą moli gazu zamkniętego w butli w stanie początkowym.

Po szybkim otwarciu zaworu  $Z_3$  zawarty w butli gaz w krótkim czasie rozpręża się do ciśnienia atmosferycznego. Jest to (z dobrym przybliżeniem) przemiana adyabatyczna, w wyniku której ciśnienie gazu w butli wyrównuje się z ciśnieniem atmosferycznym,



Rys. 2.8.2: Cykl przemian gazu w doświadczeniu Clémenta-Désormes'a.

a jego temperatura obniża się. Na wykresie we współrzędnych  $(p, V)$  odpowiada to przejściu z punktu  $A$  do  $B$  po adiabadzie (rysunek 2.8.2). Stan  $n_1$  moli gazu, który poddaliśmy przemianie adiabatycznej opisują teraz parametry  $(p_0, V_1, T_1)$ , a równanie Clapeyrona przyjmuje postać:

$$p_0 V_1 = n_1 R T_1, \quad (2.8.3)$$

gdzie  $V_1$  i  $T_1$  są odpowiednio objętością i temperaturą gazu po zakończeniu przemiany adiabatycznej. Ponieważ dla przemiany adiabatycznej spełniony jest związek  $pV^\kappa = const$ , więc możemy zapisać:

$$p_1 V_0^\kappa = p_0 V_1^\kappa. \quad (2.8.4)$$

W wyniku adiabatycznego rozprężenia do atmosfery w butli pozostaje tylko część gazu, którego stan opisują parametry  $(p_0, V_0, T_1)$ . Natychmiast po zakończeniu przemiany adiabatycznej następuje zamknięcie zaworu  $Z_3$ . Gaz w butli powoli ogrzewa się do temperatury otoczenia przy ustalonej objętości, a jego ciśnienie rośnie do wartości  $p_2$ , niższej od  $p_1$ . Odpowiada to przejściu po izochorze z punktu  $B$  do  $C$  (rysunek 2.8.2). Stan końcowy gazu w butli opisują parametry  $(p_2, V_0, T_0)$ . Należy zwrócić uwagę, że przemianie izochorycznej poddane zostało  $n_2 < n_1$  moli gazu. Dla przemiany izochorycznej  $p/T = const$  więc:

$$\frac{p_0}{T_1} = \frac{p_2}{T_0}. \quad (2.8.5)$$

Eliminując  $n_1$  z równań (2.8.2) i (2.8.3) otrzymujemy

$$\frac{p_1 V_0}{p_0 V_1} = \frac{T_0}{T_1}. \quad (2.8.6)$$

Podstawiając  $T_1$  obliczone z zależności (2.8.5) dostajemy wyrażenie na  $V_1$  w postaci:

$$V_1 = \frac{p_1}{p_2} V_0. \quad (2.8.7)$$

Wstawiając to wyrażenie do równania (2.8.4) dochodzimy do zależności:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^\kappa. \quad (2.8.8)$$

Ciśnienie mierzymy manometrem cieczowym, czyli  $p_i - p_0 = \rho g h_i$ , gdzie  $\rho$  jest gęstością cieczy wypełniającej manometr,  $g$  jest przyspieszeniem grawitacyjnym, a  $h_i$  różnicą poziomów cieczy w ramionach manometru. Wstawiając za  $p_1$  i  $p_2$  wyrażenia wiążące te ciśnienia z mierzonymi w eksperymencie wielkościami  $h_1$  i  $h_2$ , a następnie logarytmując uzyskane równanie otrzymujemy:

$$\ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right) = \kappa \left[ \ln \left( 1 + \frac{\rho g h_1}{p_0} \right) - \ln \left( 1 + \frac{\rho g h_2}{p_0} \right) \right]. \quad (2.8.9)$$

Gdy  $\rho g h_i$  są małymi nadwyżkami ciśnienia w porównaniu z ciśnieniem atmosferycznym (jak to ma miejsce w metodzie Clémenta-Désormes'a) to  $\rho g h_i / p_0 \ll 1$  i możemy rozwinąć logarytmy w szereg zachowując tylko wyraz pierwszego rzędu ( $\ln |1+x| \approx x$ ). Prowadzi to do przybliżonego wyrażenia na  $\kappa$  w postaci:

$$\kappa = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (2.8.10)$$

### Przebieg doświadczenia

Przy otwartym zaworze  $Z_3$  otworzyć zawory  $Z_2$  i  $Z_1$ , a następnie zamknąć zawór  $Z_3$ . Pompką ręczną  $P$  napompować butlę  $N$  (przez suszkę  $S$ ) wytwarzając w niej niewielkie nadciśnienie, które mierzymy manometrem cieczowym. Różnica poziomów cieczy w ramionach manometru powinna wynosić około 10 cm.

Zamknąć zawory  $Z_2$  i  $Z_1$  (w podanej kolejności). Poczekać aż różnica poziomów cieczy w ramionach manometru ustali się. Odczytać różnicę poziomów cieczy  $h_1$  i zapisać w tabeli.

Otworzyć, na bardzo krótką chwilę zawór  $Z_3$ . Zamknąć go w momencie, gdy ciśnienie w butli  $N$  zrówna się z ciśnieniem zewnętrznym. Moment zamknięcia zaworu  $Z_3$  należy dobrać na początku ćwiczenia, w sposób opisany w uwadze poniżej. Poczekać, aż powietrze w butli ogrzeje się do temperatury otoczenia i różnica poziomów cieczy w ramionach manometru ustali się. Odczytać różnicę poziomów cieczy  $h_2$  i zapisać w tabeli.

Pomiary powtórzyć kilkanaście razy. Obliczanie wartości  $\kappa$  uzyskanych w kolejnych cyklach pomiarowych należy prowadzić na bieżąco, w czasie oczekiwania na ustalenie się ciśnienia w butli.

Po wykonaniu ostatniego pomiaru należy otworzyć zawór  $Z_3$ , a następnie zamknąć zawory  $Z_2$  i  $Z_1$ .

*Uwaga: Ze względu na bezwładność cieczy w manometrze, wyrównanie ciśnień pomiędzy butlą a atmosferą następuje nieco wcześniej niż wyrównanie poziomów cieczy w ramionach manometru. Jeżeli zawór  $Z_3$  zamkniemy nieco za późno (lub za wcześnie) to uzyskamy wartość  $h_2$  nieco mniejszą (nieco większą) niż oczekiwana, a w efekcie заниżoną (zawyżoną) wartość  $\kappa$ . Przed przystąpieniem do pomiarów właściwych konieczne jest więc wykonanie kilku pomiarów próbnych, w których zawór  $Z_3$  planowo otwarty był zbyt długo lub zbyt krótko. Pozwoli to na dobranie odpowiedniego momentu zamknięcia zaworu  $Z_3$  w trakcie przeprowadzania ćwiczenia.*

### 2.8.3 Opracowanie wyników

Korzystając ze wzoru (2.8.10) obliczyć wartości  $\kappa$  dla wszystkich wykonanych pomiarów. Wyniki obarczone znacznym błędem systematycznym należy odrzucić.

Metodą różniczki zupełnej oszacować niepewność pojedynczego pomiaru. Wyznaczyć odchylenie standardowe wartości średniej. Jaką niepewnością obciążona jest wartość średnia  $\kappa$  wyznaczona w eksperymencie?

Przedyskutować zgodność uzyskanego wyniku z przewidywaniami teoretycznymi i wartościami, które można znaleźć w literaturze. Uzasadnić, dlaczego powietrze można traktować jako modelowy gaz dwuatomowy.

## 2.9 Badanie zależności temperatury wrzenia wody od ciśnienia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie zależności temperatury wrzenia wody od ciśnienia oraz wyznaczenie ciepła przemiany ciec-z-gaz.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- stany skupienia;
- przemiany fazowe;
- wykres fazowy dla wody;
- równanie Clausiusa-Clapeyrona;
- parowanie, wrzenie, ciepło parowania;
- ciśnienie pary nasyconej.

Literatura podstawowa: [2], [13].

### 2.9.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Wrzenie to przemiana cieczy w parę, będąca przejściem fazowym I rodzaju, czyli charakteryzującym się istnieniem różnego od zera ciepła przemiany. Temperatura

cieczy podczas wrzenia (tzw. temperatura wrzenia) jest stała, zmienia się jedynie stosunek mas w fazie ciekłej i gazowej. Temperatura wrzenia zależy od ciśnienia jakiemu podlega ciecz. Dla układu zamkniętego ciecz pozostaje zawsze w równowadze termodynamicznej ze swoją parą nasyconą, czyli parą o tym samym składzie jak ciecz, z której powstała. Średnia liczba cząstek opuszczających ciecz w procesie parowania jest równa średniej liczbie cząstek przechodzących z pary nasyconej do cieczy w procesie skraplania. Para nasycona ma największe możliwe dla danej temperatury ciśnienie i gęstość. Ciśnienie pary nasyconej zależy od temperatury i rodzaju cieczy, a nie zależy od objętości – gdy zmniejszymy jej objętość, część pary ulegnie skropleniu.

Podczas wrzenia powstają i rosną pęcherzyki pary nasyconej znajdujące się wewnątrz cieczy. Pęcherzyki te powstają na zanieczyszczeniach wewnątrz cieczy oraz na ściankach naczynia i rosną dzięki parowaniu do nich cieczy. Następnie pęcherzyki wypływają na powierzchnię, gdzie pękają. Ciśnienie  $p$  wewnątrz pęcherzyka jest równe:

$$p = p_z + \rho gh + \frac{2\sigma}{r}, \quad (2.9.1)$$

gdzie kolejne człony prawej strony równania oznaczają ciśnienie zewnętrzne, ciśnienie hydrostatyczne oraz ciśnienie wynikające z napięcia powierzchniowego. Stała  $\sigma$  to współczynnik napięcia powierzchniowego cieczy, a  $r$  to promień pęcherzyka.

Ze wzoru (2.9.1) wynika, że wzrastanie pęcherzyków pary jest możliwe tylko gdy temperatura cieczy jest na tyle duża, że ciśnienie pary nasyconej wewnątrz pęcherzyka jest nie mniejsze niż ciśnienie  $p$ . Ponadto, aby pęcherzyk powstał, jego promień powinien być od razu relatywnie duży (czyli  $2\sigma/r$  małe). W tych rozważaniach ciśnienie hydrostatyczne można zazwyczaj zaniedbać. W temperaturze wrzenia, ciśnienie pary nasyconej jest zatem równe ciśnieniu zewnętrznemu.

Jeśli mamy naczynie z gładkimi ścianami a ciecz nie zawiera pyłów ani rozpuszczonych gazów, to pęcherzyki pary nie mogą powstawać. Wtedy możemy podgrzać ciecz powyżej temperatury wrzenia określonej przez istniejące warunki. Mamy wtedy do czynienia z cieczą przegrzaną. Jest to stan metastabilny, niewielkie fluktuacje w układzie lub małe zewnętrzne zaburzenie prowadzą do gwałtownego wrzenia cieczy przegrzanej.

Wzór na zależność temperatury wrzenia od ciśnienia można wyprowadzić z równania Clausiusa-Clapeyrona (słuszne dla przejść fazowych I rodzaju):

$$q_p = (v_2 - v_1)T \frac{dp}{dT}, \quad (2.9.2)$$

gdzie  $q_p$  - ciepło przejścia fazowego,  $v_1$  i  $v_2$  - objętość właściwa substancji w fazie początkowej i końcowej,  $T$ ,  $p$  - odpowiednio temperatura i ciśnienie przejścia fazowego. W naszym przypadku  $v_1$  to objętość jednego mola wody,  $v_2$  to objętość jednego mola pary wodnej. Ponieważ zawsze  $v_2 \gg v_1$  oraz  $q_p > 0$ , to  $dT/dp > 0$ , a zatem temperatura wrzenia rośnie wraz ze wzrostem ciśnienia. Przekształcając wzór (2.9.2) otrzymujemy:

$$\frac{dT}{T} = \frac{v_2 - v_1}{q_p} dp. \quad (2.9.3)$$

Ponieważ  $v_2 \gg v_1$ , to możemy zaniedbać  $v_1$ . Aby wyeliminować  $v_2$  stosujemy równanie gazu doskonałego  $pv_2 = RT$  otrzymując:

$$\frac{dT}{T^2} = \frac{R}{q_p} \frac{dp}{p}. \quad (2.9.4)$$

Aby znaleźć zależność temperatury wrzenia od ciśnienia należy scałkować równanie (2.9.4), do czego konieczna jest znajomość zależności ciepła przejścia fazowego i objętości molowych od temperatury. W przypadku wody dla badanego zakresu ciśnień można w dobrym przybliżeniu założyć, że wielkości te nie zależą od temperatury. Należy jednak pamiętać, że stosując to przybliżenie wyznacza się średnią wartość ciepła przejścia fazowego w badanym zakresie temperatur. Przy powyższych założeniach całkując równanie (2.9.4) dostajemy:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{q_p}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (2.9.5)$$

gdzie stałe całkowania  $p_0$  i  $T_0$  odpowiadają ciśnieniu i temperaturze pary nasyconej w pewnych wybranych warunkach.

## 2.9.2 Przebieg pomiarów

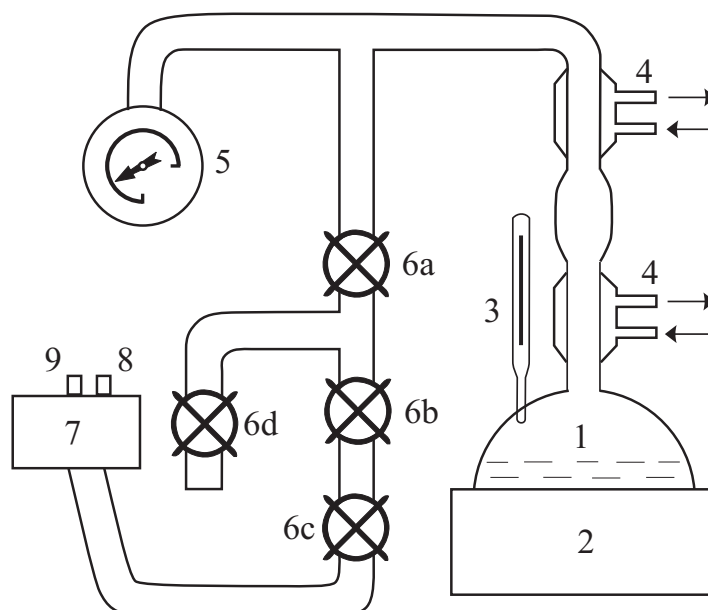
### Układ doświadczalny

Układ pomiarowy przedstawiony na rysunku 2.9.1 umożliwia pomiar temperatury wrzenia wody pod różnymi ciśnieniami. Główne elementy aparatury to podgrzewana kolba z wodą (1, 2) połączona z układem, w którym można regulować ciśnienie używając pompy (7) i zaworów (6). Chłodnice (4) zapewniają skraplanie się pary wodnej i powrót wody do kolby. Podgrzewając wodę doprowadzamy ją do wrzenia pod ustalonym przez nas ciśnieniem, zmierzonym przy pomocy manometru (5) i odczytujemy temperaturę używając termometru (3). Aby uniknąć przegrzania cieczy, na dnie kolby znajdują się fragmenty ceramicznego, porowatego materiału umożliwiającego powstawanie pęcherzyków pary.

### Przebieg doświadczenia

Sprawdzić czy wylot (8) pompy rotacyjnej ma założony wąż odprowadzający olej. Przed uruchomieniem pompy należy zamknąć zawór zapowietrzający (9). Przed wyłączeniem pompy należy zamknąć wszystkie zawory, tak aby olej z pompy nie był wtłaczany z powrotem do aparatury, tuż po wyłączeniu pompy należy otworzyć zawór zapowietrzający (9).

Włączyć obieg wody przez chłodnice (4). Ustawić wszystkie zawory w odpowiednie położenia (otwarte zawory (6a), (6b) i (6c), zawór (6d) zamknięty) i uruchomić pompę (7). Odczekać około 20 minut aż do osiągnięcia ciśnienia z przedziału 0.04 - 0.20 ciśnienia atmosferycznego. Zakręcić odpowiednie zawory (6) i wyłączyć pompę.



Rys. 2.9.1: Szkic aparatury pomiarowej: 1 - kolba z wodą, 2 - grzejnik, 3 - termometr, 4 - chłodnica, 5 - manometr, 6a, 6b, 6c, 6d - zawory, 7 - pompa rotacyjna, 8 - wylot z pompy, 9 - zawór zapowietrzający.

Ogrzewać wodę grzejnikiem (2) zasilanym z autotransformatora aż do uzyskania wrzenia wody. Zanotować temperaturę wody oraz ciśnienie powietrza w układzie. Uwaga: manometr wskazuje różnicę pomiędzy ciśnieniem w układzie i ciśnieniem atmosferycznym. Zwiększyć ciśnienie w aparaturze otwierając na chwilę zawór (6d), a następnie po jego zamknięciu otwierając na krótko zawór (6a). Nadal podgrzewać wodę. Znając czas, jakim się dysponuje na wykonanie ćwiczenia, należy tak zaplanować pracę, aby dokonać pomiarów temperatury wrzenia w całym zakresie dostępnych ciśnień.

### 2.9.3 Opracowanie wyników

W sprawozdaniu proszę zamieścić tabelę ze zmierzonymi wartościami ciśnienia powietrza i odpowiadającymi im wartościami temperatury wrzenia wody. W tabeli powinny być również podane niepewności obu wielkości. Sporządzić wykresy zależności temperatury wrzenia od ciśnienia  $T(p)$  i zależności  $\ln p$  w funkcji  $1/T$  – patrz wzór (2.9.5). Na wykresach zaznaczyć niepewności pomiarowe. Do punktów z drugiego wykresu należy dopasować prostą i podać jej współczynniki wraz z ich niepewnościami. Uwaga: obliczenia zarówno współczynników prostej, jak też ich niepewności muszą uwzględniać niepewności poszczególnych punktów pomiarowych. Znając współczynnik kierunkowy dopasowanej prostej, obliczyć ciepło  $q_p$  przemiany ciec-z-gaz. Przedyskutować źródła niepewności dla wykonanych pomiarów.



## 2.10 Badanie przewodnictwa cieplnego izolatorów

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z zagadnieniami związanymi z transportem ciepła oraz wyznaczenie współczynnika dyfuzji cieplnej (współczynnika przewodnictwa temperaturowego) izolatorów metodą niestacjonarnego przepływu ciepła.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- przenoszenie ciepła (przewodzenie, promieniowanie, konwekcja);
- makroskopowy opis mechanizmu przewodnictwa ciepła w ciałach stałych; stacjonarny i niestacjonarny przepływ ciepła; parametry opisujące przewodnictwo ciepła: współczynnik dyfuzji cieplnej  $K$  (współczynnik przewodnictwa temperaturowego), współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\kappa$ ;
- jakościowy opis mechanizmu przewodzenia ciepła dla dielektryków, metali i ciał amorficznych; różnice zależności współczynnika przewodnictwa cieplnego od temperatury dla tych materiałów;
- zasada pomiaru współczynnika dyfuzji cieplnej metodą niestacjonarnego przepływu ciepła; rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego dla prostopadłościanu, sześcianu, walca i kuli;
- termistory, typy termistorów; charakterystyka temperaturowa rezystancji termistorów NTC (patrz podrozdział 2.1.1).

Literatura podstawowa: [13], [14], [15], [17], [37], [38].

### 2.10.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Stacjonarny i niestacjonarny przepływ ciepła

W przypadku, gdy w jednostce czasu ilość ciepła wpływająca do danej objętości jest równa ilości ciepła z niej wypływającej i rozkład temperatury nie ulega zmianie to mówimy, że przepływ ciepła jest stacjonarny. Jeżeli warunki te nie są spełnione, to mamy do czynienia z niestacjonarnym przepływem ciepła.

#### Makroskopowy opis przewodnictwa cieplnego w ciałach stałych

Jeżeli wewnątrz ciała izolowanego adiabatycznie od otoczenia istnieją różnice temperatur, to zgodnie z II zasadą termodynamiki następuje samorzutny przepływ ciepła do obszarów o niższej temperaturze, trwający do momentu wyrównania się temperatur. Szybkość wyrównywania się temperatur uzależniona jest od ich różnicy oraz od rodzaju ciała.

Zdolność przewodzenia ciepła przez dane ciało można charakteryzować przez podanie współczynnika dyfuzji cieplnej  $K$ , zwanego również współczynnikiem przewodnictwa temperaturowego. Alternatywnie można podać współczynnik przewodnictwa cieplnego  $\kappa = K\rho c_w$  ( $\rho$  jest gęstością, a  $c_w$  ciepłem właściwym rozważanego ciała).

Przepływ ciepła w izotropowym ciele dowolnego kształtu, przy dowolnym rozkładzie temperatur opisuje równanie:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa \nabla T \cdot \vec{S}, \quad (2.10.1)$$

gdzie  $dQ$  jest ilością ciepła, która w czasie  $dt$  przepłynęła przez powierzchnię  $\vec{S}$ , jeżeli gradient temperatury wynosił  $\nabla T$ ,  $\kappa$  jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego opisującym zdolność przewodzenia ciepła przez rozważane ciało. Jeżeli zdefiniujemy strumień energii cieplnej  $j$  jako ilość ciepła przepływającego przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu tzn.:

$$j = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (2.10.2)$$

to dla ciał izotropowych równanie (2.10.1) można przepisać w postaci:

$$\vec{j} = -\kappa \nabla T \quad (2.10.3)$$

co oznacza, że strumień przenieszonego ciepła jest proporcjonalny do gradientu temperatury, a współczynnikiem proporcjonalności jest współczynnik przewodnictwa cieplnego. Wpływ strumienia ciepła (dywergencja  $\vec{j}$ ) w obszarze bezźródłowym jest równy szybkości spadku temperatury  $-\partial T/\partial t$  w jednostkowej objętości, co prowadzi do równania dyfuzji ciepła:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T. \quad (2.10.4)$$

### Mikroskopowy mechanizm przewodnictwa cieplnego

Do opisu zjawisk związanych z przenoszeniem ciepła w ciałach stałych współczesna teoria przewodnictwa cieplnego wprowadza fonony. Ich liczba rośnie ze wzrostem temperatury i dla wysokich temperatur jest proporcjonalna do temperatury bezwzględnej  $T$ , a dla temperatur niższych od temperatury Debye'a  $\theta$  jest proporcjonalna do  $T^3$ . Dla dielektryków współczynnik przewodnictwa cieplnego jest proporcjonalny do średniej drogi swobodnej fononów, które oddziałują tylko ze ścianami kryształu i defektami sieci krystalicznej. W metalach oprócz gazu fononowego jest też gaz elektronów swobodnych, których wkład w przewodzenie ciepła jest dominujący i w konsekwencji przewodnictwo cieplne metali jest sto razy większe niż dielektryków. Przewodnictwo cieplne ciał polikrystalicznych i amorficznych w bardzo niskich temperaturach rośnie jak  $T^3$  a następnie pozostaje stałe.

#### 2.10.2 Przebieg pomiarów

##### Układ pomiarowy

W skład układu doświadczalnego wchodzi: termostat (łaźnia wodna utrzymująca stałą temperaturę kąpieli olejowej), zestaw próbek o różnych kształtach (sześcián,

prostopadłościan, walec, kula) wykonanych z różnych materiałów, omomierz, komputer, suwmiarka. Wewnątrz próbek umieszczone są termistory, których charakterystyki znajdują się na stanowisku pomiarowym.

### Metoda pomiarowa

W omawianym doświadczeniu pomiaru temperatury dokonujemy przy pomocy termistorów NTC, dla których zależność oporu od temperatury ma przebieg typowy dla materiałów półprzewodnikowych:

$$R_T = R_\infty e^{B/T}, \quad (2.10.5)$$

gdzie  $R_T$  jest oporem termistora w temperaturze  $T$  (podawanej w kelwinach),  $R_\infty$  jest rezystancją znamionową termistora ekstrapolowaną do nieskończonej wysokiej temperatury,  $B = W/2k_B$  ( $W$  jest szerokością przerwy energetycznej dla materiału termistora). W katalogach podaje się zwykle wartość parametru  $B$  i  $R_{25}$  (rezystancję znamionową termistora dla temperatury  $25^\circ\text{C}$ ), dla termistorów używanych w ćwiczeniu podane są wartości  $R_\infty$  i  $B$ .

Po zlogarytmowaniu równania (2.10.5) otrzymujemy wyrażenie wiążące temperaturę wewnątrz próbki  $T_t$  w chwili czasu  $t$  z aktualną wartością oporu termistora  $R_T$  i jego parametrami  $R_\infty$  i  $B$ :

$$T_t = \frac{B}{\ln R_T - \ln R_\infty}. \quad (2.10.6)$$

W celu wyznaczenia współczynnika dyfuzji cieplnej metodą niestacjonarnego przepływu ciepła umieszczamy badane ciało o temperaturze początkowej  $T_p$  w ośrodku o stałej, wyższej temperaturze  $T_0$ . Od tej chwili  $T_0$  jest temperaturą powierzchni ciała, a temperatura wnętrza ciała rośnie. W tych warunkach prowadzimy pomiar temperatury wewnątrz ciała w ustalonych odstępach czasu (tu co 1.5 s), w wyniku czego zbieramy krzywą ogrzewania. Zakładamy, że badane ciało jest jednorodne, a zależny od czasu rozkład jego temperatury opisuje funkcja  $T(x, y, z, t)$ . Dla takiego przypadku rozwiązaniem równania dyfuzji (2.10.4) jest szereg:

$$T(x, y, z, t) = \sum_n c_n v_n(x, y, z) e^{-K\lambda_n t}, \quad (2.10.7)$$

przy czym  $T = T_0 - T_t$ ,  $K$  jest współczynnikiem dyfuzji cieplnej,  $\lambda_n$  są stałymi współczynnikami,  $v_n(x, y, z)$  opisuje przestrzenny rozkład temperatury, a  $c_n$  są stałymi normalizacyjnymi [37]. Szereg ten jest szybko zbieżny, gdyż współczynniki  $\lambda_n$  szybko rosną ze wzrostem  $n$ . W pierwszym przybliżeniu można więc ograniczyć się do pierwszego wyrazu szeregu:

$$T(x, y, z, t) \approx c_1 v_1(x, y, z) e^{-K\lambda_1 t}. \quad (2.10.8)$$

Oznacza to, że po dostatecznie długim czasie (niezależnie od warunków początkowych) różnica temperatury powierzchni i wnętrza ciała maleje wykładniczo, ale profil jej rozkładu pozostaje niezmienny. Logarytmując powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$\ln T = -K\lambda_1 t + \ln c_1 v_1. \quad (2.10.9)$$

Wykresem zależności  $\ln T$  od czasu  $t$  jest linia prosta o współczynniku kierunkowym określonym przez wartości współczynnika dyfuzji cieplnej  $K$  i wartości współczynnika  $\lambda_1$  zależnej od kształtu badanego ciała. Zatem wykonując pomiary temperatury w funkcji czasu, przy znanej wartości współczynnika  $\lambda_1$ , można wyznaczyć wartość współczynnika  $K$ .

### Przebieg doświadczenia

Sprawdzić czy w termostacie jest wystarczająca ilość wody i oleju. Ustawić temperaturę docelową termostatu na około  $90^\circ\text{C}$  i włączyć urządzenie z maksymalną szybkością grzania. Zmierzyć wymiary próbki (pomiary wykonać co najmniej 3-krotnie). Podłączyć miernik do komputera i włączyć komputer. Utworzyć własny podkatalog do zapisu danych pomiarowych. Podłączyć próbkę do miernika i dobrać zakres pomiarowy. Odczekać aż termostat osiągnie żadaną temperaturę. Wymieszać olej i zmierzyć jego temperaturę. Umieścić próbkę w pojemniku z olejem tak, aby była całkowicie zanurzona i nie dotykała ścianek ani dna pojemnika. Uruchomić program akwizycji danych; liczbę punktów pomiarowych ustalić na co najmniej 800, gdyż odczyt danych z miernika dokonywany jest co  $1.5\text{ s}$ , a jeden pomiar powinien trwać co najmniej 20 minut. Po zakończeniu pomiaru wyjąć próbkę i ponownie wymieszać olej, a następnie po zmierzeniu jego temperatury zmienić próbkę. Powtórzyć procedurę pomiarową dla kilku próbek różniących się kształtem lub materiałem, z którego zostały wykonane.

### 2.10.3 Opracowanie wyników

Znając charakterystyki termistorów umieszczonych w badanych próbkach, dla każdej próbki narysować zależność temperatury wnętrza próbki  $T_t$  od czasu  $t$ . Wykreślić zależność  $\ln(T_0 - T_t)$  od czasu, gdzie  $T_0$  jest zmierzoną temperaturą oleju. Znaleźć wartość  $t_s$ , powyżej której wspomniana zależność jest liniowa. Jeżeli zależność nie jest liniowa nawet po pewnym czasie  $t_s$ , to należy przerysować wykres dla lekko zmienionej temperatury  $T_0$ . Dopasowujemy się w ten sposób do rzeczywistej temperatury utrzymywanej przez termostat. Dla  $t > t_s$  dopasować prostą metodą regresji liniowej. Obliczyć wartość zależnego od kształtu próbki współczynnika  $\lambda_1$ . Dla prostopadłościanu o wymiarach  $a \times b \times c$ :  $\lambda_1 = \pi^2 (1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2)$ ; dla sześcianu o krawędzi  $a$ :  $\lambda_1 = 3(\pi/a)^2$ ; dla walca o promieniu  $r$  i wysokości  $h$ :  $\lambda_1 = (2.4/r)^2 + (\pi/h)^2$ ; dla kuli o promieniu  $R$ :  $\lambda_1 = (\pi/R)^2$ . Następnie, korzystając ze wzoru (2.10.9), wyznaczyć wartość współczynnika dyfuzji cieplnej  $K$  oraz jego niepewność pomiarową. Przeprowadzić dyskusję zgodności uzyskanych wyników z wartościami, które można znaleźć w literaturze.

## 2.11 Gaz klockowy

Celem ćwiczenia jest poznanie podstawowych praw fizyki statystycznej.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- stan mikroskopowy i makroskopowy układu;
- równowaga statystyczna układu, entropia;
- rozkład kanoniczny;
- gaz doskonały i gaz klockowy.

Literatura podstawowa: [6], [16], [17], [18].

### 2.11.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Stan mikroskopowy (mikrostan) to stan układu opisany szczegółowo w sposób mikroskopowy przez podanie, zgodnie z prawami mechaniki, najbardziej kompletnego zespołu informacji o wszystkich cząsteczkach układu. Przykładowo dla gazu doskonałego w opisie klasycznym będzie to podanie położenia i pędów wszystkich cząsteczek (punktu w przestrzeni fazowej). W opisie kwantowym (cząstki w trójwymiarowym pudle) dla każdej cząstki mamy zespół trzech liczb kwantowych.

Stan makroskopowy (makrostan) to stan układu opisany przez podanie tylko tych wielkości, które mogą być wyznaczone przez pomiary makroskopowe, bez wnikania w szczegóły mikroskopowe. Dla gazu doskonałego będą to np. liczba cząstek, objętość, ciśnienie, temperatura.

Hipoteza Boltzmannowa mówi, że wszystkie mikrostan, realizujące makrostan o ustalonych parametrach, są jednakowo prawdopodobne. Jednak różne możliwe makrostan układu nie są jednakowo prawdopodobne, ponieważ mogą być zrealizowane na różną liczbę sposobów (mikrostanów). Wagą statystyczną  $\Omega$  nazywamy liczbę możliwych mikrostanów odpowiadających danemu makrostanowi.

Układ jest w stanie równowagi statystycznej, jeżeli jego waga statystyczna jest maksymalna. Możliwe są wtedy fluktuacje, czyli drobne odchylenia od wartości maksymalnej. Można zdefiniować entropię układu  $S$  jako funkcję logarytmu wagi statystycznej  $S = k_B \ln \Omega$ . Wtedy stan równowagi statystycznej odpowiada maksimum entropii.

Stan mikroskopowy układu zwykle nie jest dokładnie znany, dlatego próba opisu musi prowadzić do pojęć probabilistycznych. W takim przypadku zamiast rozważać pojedynczy układ makroskopowy, rozpatrujemy bardzo dużą liczbę układów tego samego typu, czyli zespół statystyczny. Należy określić parametry zewnętrzne układu, które wpływają na ruch cząstek tworzących dany układ. W fizyce statystycznej często stosuje się następujące zespoły:

- zespół mikrokanoniczny (stała liczba cząstek  $N$  i energia  $U$ ),
- zespół kanoniczny (stała liczba cząstek  $N$  i temperatura  $T$ , energia  $E$  fluktuuje wokół wartości średniej  $U = \langle E \rangle$ ),
- wielki zespół kanoniczny (stały potencjał chemiczny  $\mu$  i temperatura  $T$ , fluktuuje energia i liczba cząstek).

Dla powyższych zespołów wyprowadza się odpowiednio rozkład mikrokanoniczny, kanoniczny i wielki kanoniczny. Rozkłady mówią nam o prawdopodobieństwie znalezienia układu w danym mikro stanie i umożliwiają powiązanie termodynamiki statystycznej z termodynamiką klasyczną.

### Rozkład kanoniczny

Z rozkładem kanonicznym mamy do czynienia wtedy, gdy liczba cząstek jest stała i układ znajduje się w stałej temperaturze dzięki kontaktowi cieplnemu ze zbiornikiem ciepła. Można pokazać, że prawdopodobieństwo znalezienia układu z energią  $E$  (energia fluktuuje) jest proporcjonalne do liczby mikrostanów realizujących dany makrostan i do czynnika Boltzmanna  $e^{-\beta E}$ , gdzie  $\beta = 1/(k_B T)$ , a  $k_B$  jest stałą Boltzmanna. Wygodnie jest zdefiniować funkcję podziału w postaci:

$$Z_N = \sum_i e^{-\beta E_i}, \quad (2.11.1)$$

gdzie sumowanie po  $i$  przebiega po wszystkich mikrostanach. Przy pomocy funkcji podziału możemy obliczyć potrzebne funkcje termodynamiczne, takie jak energia swobodna  $F$ , średnia energia układu  $U$ , entropia  $S$ , pojemność cieplna przy stałej objętości  $C_{V,N}$ , fluktuacje energii  $\Delta U$ :

$$F = -k_B T \ln Z_N, \quad (2.11.2)$$

$$U = -\frac{\partial (\ln Z_N)}{\partial \beta}, \quad (2.11.3)$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}, \quad (2.11.4)$$

$$C_{V,N} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N}, \quad (2.11.5)$$

$$(\Delta U)^2 = C_{V,N} k_B T^2. \quad (2.11.6)$$

### Gaz doskonały i rozkład kanoniczny

Rozważamy zbiór  $N$  rozróżnialnych cząstek. Aby obliczyć funkcję podziału należy wykonać całkowanie po  $6N$  wymiarowej przestrzeni fazowej, czyli po położeniach i pędach cząstek (stosujemy podejście klasyczne)

$$Z_N = \frac{(2m\pi/\beta)^{\frac{3N}{2}} V^N}{C^{(N)}}, \quad (2.11.7)$$

gdzie  $m$  to masa cząstki,  $V$  objętość zajmowana przez gaz,  $C^{(N)} = h^{3N} N!$  stała zapewniająca poprawne zliczanie stanów ( $h$  jest stałą Plancka). Energia gazu jest to energia kinetyczna cząstek, która ograniczona jest tylko z dołu przez zero (rośnie liniowo z temperaturą)

$$U = \frac{3N}{2\beta} = \frac{3}{2} N k_B T. \quad (2.11.8)$$

Entropia gazu rośnie logarytmicznie ze wzrostem temperatury

$$S = \left( \ln Z_N + \frac{3N}{2} \right) k_B. \quad (2.11.9)$$

Pojemność cieplna przy stałej objętości jest stała

$$C_{V,N} = \frac{3}{2} N k_B. \quad (2.11.10)$$

Fluktuacje energii (względne) maleją ze wzrostem układu

$$\frac{\Delta U}{U} = \sqrt{\frac{2}{3N}}. \quad (2.11.11)$$

### Gaz klockowy i rozkład kanoniczny

Rozważamy zbiór  $N$  rozróżnialnych klocków. Przyjmujemy dla prostoty, że dla każdego klocka są dostępne trzy poziomy energetyczne o energiach odpowiednio  $-\epsilon_0$ ,  $0$  oraz  $+\epsilon_0$  i jest to energia potencjalna środka masy klocka w polu grawitacyjnym. Dla takiego układu funkcja podziału ma postać

$$Z_N = \left( x + 1 + \frac{1}{x} \right)^N, \quad (2.11.12)$$

gdzie  $x = e^{\beta\epsilon_0} > 0$ . Energia gazu klockowego to suma energii potencjalnych wszystkich klocków i jest ograniczona z dołu przez  $-N\epsilon_0$  i z góry przez  $+N\epsilon_0$ . Energię gazu klockowego możemy obliczyć korzystając z wzoru (2.11.3)

$$U = N\epsilon_0 \frac{1 - x^2}{1 + x + x^2}. \quad (2.11.13)$$

Zauważmy, że dla dodatnich temperatur energia jest ujemna, a ze wzrostem temperatury dąży do zera. Entropię gazu klockowego liczymy ze wzorów (2.11.2) i (2.11.4)

$$S = k_B \beta U + N k_B \ln \left( x + 1 + \frac{1}{x} \right). \quad (2.11.14)$$

Zależność entropii od energii przypomina odwróconą parabolę i ma maksimum dla  $U = 0$ . Dla wyższych (dodatnich) energii entropia maleje, co formalnie odpowiada

ujemnym temperaturom bezwzględnych. Pojemność cieplna przy stałej objętości zależy od temperatury poprzez związek

$$C_{V,N} = Nk_B \frac{x(1+4x+x^2)(\ln x)^2}{(1+x+x^2)^2}. \quad (2.11.15)$$

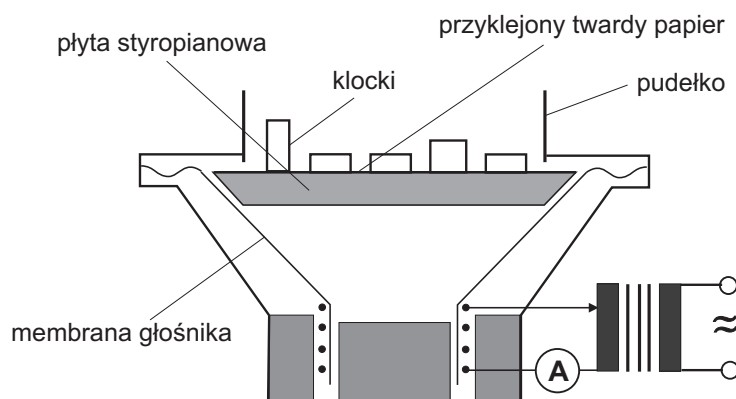
Względne fluktuacje energii zależą od rozmiaru układu i od temperatury

$$\frac{\Delta U}{U} = \sqrt{\frac{x(1+4x+x^2)}{N(1-x^2)^2}}. \quad (2.11.16)$$

## 2.11.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: sto prostopadłościennych klocków, głośnik, amperomierz, suwmiarka, waga elektroniczna. Układ doświadczalny przedstawiony jest na rysunku 2.11.1.



Rys. 2.11.1: Przekrój symulatora ruchu termicznego. Na membranie głośnika znajduje się pudełko ograniczające ruch klocków.

### Przebieg doświadczenia

Zmierzyć rozmiary około dziesięciu różnych klocków. Zważyć wszystkie klocki na wadze elektronicznej. Zestawić układ doświadczalny. Ustawić napięcie na zasilaczu w zakresie 150 – 220 V.

Włączyć głośnik za pomocą przycisku na małym zasilaczu. Zanotować natężenie prądu płynącego przez głośnik. Za pomocą przycisku na małym zasilaczu wyłączyć głośnik po czasie około 10 s. Zliczyć klocki znajdujące się w każdym z trzech położeń. Powtórzyć procedurę co najmniej dziesięć razy dla tego samego natężenia prądu. Powtórzyć pomiary dla co najmniej pięciu różnych natężeń prądu płynącego przez głośnik.



### 2.11.3 Opracowanie wyników

Należy porównać wyniki doświadczalne z teorią gazu klockowego, oraz przedyskutować różnice między gazem doskonałym i gazem klockowym.

Obliczyć energię potencjalną klocka spoczywającego na każdym z boków  $E_g = mgh/2$ . Obliczyć parametr  $\epsilon_0$  (w mikrodżulach  $\mu J$ ), który wyznacza skalę energii w naszym modelu. Energie stanów oznaczyć  $E_1 = -\epsilon_0$ ,  $E_2 = 0$ ,  $E_3 = +\epsilon_0$ , a obsadzenia odpowiednio  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ .

Obliczyć energię całkowitą gazu klockowego dla każdego natężenia prądu

$$U = N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3, \quad (2.11.17)$$

$$U^* = \frac{U}{N\epsilon_0}. \quad (2.11.18)$$

Obliczyć fluktuacje energii  $\Delta U$  i stosunek  $\Delta U/U$  dla każdego natężenia prądu, przy czym

$$\Delta U = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2, \quad (2.11.19)$$

$$\langle E^2 \rangle = N_1 E_1^2 + N_2 E_2^2 + N_3 E_3^2, \quad (2.11.20)$$

$$\Delta U^* = \frac{\Delta U}{N\epsilon_0}. \quad (2.11.21)$$

Dla każdej serii pomiarów z ustalonym natężeniem prądu zrobić wykres zależności  $\ln N_i$  od  $E_i$  (są tu tylko trzy punkty na wykresie). Z regresji liniowej ( $\ln N_i = A - \beta E_i$ ) obliczyć  $\beta$ , temperaturę bezwymiarową  $T^* = 1/(\beta\epsilon_0)$  oraz  $T = 1/(\beta k_B)$  i  $x = e^{\beta\epsilon_0}$ . Zrobić wykres  $U^*(T^*)$ .

Niech  $C^* = C_{V,N}/(Nk_B)$ . Obliczyć bezwymiarową pojemność cieplną dwoma metodami.

$$C^* = \frac{U_2^* - U_1^*}{T_2^* - T_1^*}, \quad (2.11.22)$$

$$C^* = \left( \frac{\Delta U^*}{T^*} \right)^2. \quad (2.11.23)$$

Obliczyć bezwymiarową entropię  $S^* = S/(Nk_B)$  dla każdej temperatury (korzystamy z alternatywnego wzoru na entropię)

$$S^* = -\frac{N_1}{N} \ln \left( \frac{N_1}{N} \right) - \frac{N_2}{N} \ln \left( \frac{N_2}{N} \right) - \frac{N_3}{N} \ln \left( \frac{N_3}{N} \right). \quad (2.11.24)$$

Zrobić wykresy zależności  $S^*(T^*)$  oraz  $S^*(U^*)$ .



# 3 Elektryczność

## 3.1 Temperaturowa zależność oporu przewodników

Celem ćwiczenia jest zbadanie temperaturowej zależności oporu i wyznaczenie temperaturowego współczynnika oporu właściwego  $\alpha$  dla kilku różnych przewodników. W temperaturze pokojowej wykonywany jest również pomiar oporu zastępczego szeregowego i równoległego połączenia oporników i porównanie wyników z przewidywaniami teoretycznymi. Pomiar oporu prowadzony jest metodą równoważenia mostka Wheatstone'a.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- przewodnictwo ciał stałych, zależność oporu przewodnika od temperatury,
- pierwsze i drugie prawo Ohma,
- pierwsze i drugie prawo Kirchhoffa,
- opór zastępczy szeregowego i równoległego połączenia oporników,
- pomiar oporu elektrycznego za pomocą mostka Wheatstone'a.

Literatura podstawowa: [1], [2], [15], [44].

### 3.1.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Opór elektryczny i prawa Ohma

Opór elektryczny jest zasadniczą cechą materiałową, decydującą o natężeniu prądu, jaki przepłynie przez element układu elektrycznego wykonany z danej substancji, gdy do końców tego elementu przyłożymy różnicę potencjałów  $U$ .

**Pierwsze prawo Ohma** mówi, że natężenie prądu stałego  $I$  płynącego przez przewodnik jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia  $U$  (różnicy potencjałów pomiędzy końcami przewodnika), a współczynnikiem proporcjonalności jest odwrotność oporu  $R$  (jednostka  $\Omega = V/A$ ). Matematycznie można to zapisać w następującej postaci:

$$I = \frac{1}{R}U. \quad (3.1.1)$$

**Drugie prawo Ohma** wiąże opór przewodnika z jego wymiarami geometrycznymi (a mianowicie długością przewodnika  $l$  i powierzchnią jego przekroju poprzecznego  $S$ ) oraz własnościami fizycznymi materiału z jakiego jest wykonany. Matematycznie przedstawia to równanie:

$$R = \varrho \frac{l}{S}, \quad (3.1.2)$$

gdzie współczynnikiem proporcjonalności  $\varrho$  jest opór właściwy, który jest stałą materiałową charakteryzującą daną substancję. Dla metali w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  jest on rzędu  $10^{-8} \Omega m$ .

### Przewodnictwo ciał stałych

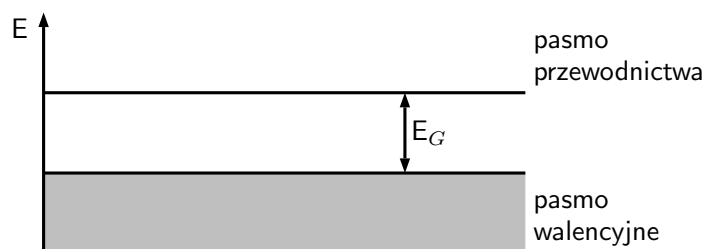
Własności elektronów w ciałach stałych wynikają z ich oddziaływań między sobą oraz oddziaływań z atomami (jonami) sieci krystalicznej. Mimo sukcesów podejścia półempirycznego i klasycznej teorii przewodnictwa należy zdawać sobie sprawę z tego, że wiele zagadnień związanych z przewodnictwem może być wyjaśnionych tylko na gruncie kwantowej teorii ciał stałych, umożliwiającej poprawny opis uporządkowanego transportu nośników ładunku elektrycznego oraz różnic pomiędzy przewodnikami, izolatorami i półprzewodnikami.

Do opisu elektronów w sieci krystalicznej stosuje się dwa przybliżenia: przybliżenie elektronów prawie swobodnych i przybliżenie elektronów silnie związanych (silnie skorelowanych). W obu przypadkach otrzymujemy pewne przedziały energii dozwolone dla elektronów, które nazywamy pasmami energetycznymi oraz przedziały energii zabronione dla elektronów, nazywane przerwami energetycznymi. To właśnie ich szerokość i wzajemne położenie determinują podział materiałów na przewodniki, półprzewodniki i izolatory.

Pasmo energetyczne stanowi układ dyskretnych, leżących bardzo blisko siebie poziomów energetycznych. Dla pojedynczego atomu odległość między poziomami energetycznymi jest rzędu 1 eV, natomiast dla 1 mola substancji (w warunkach normalnych) odległości te zmniejszają się do około  $10^{-20}$  eV i można przyjąć, iż tworzą one ciągle widmo energetyczne. Szerokości tych pasm i ich odległości względem siebie na skali energii zależą tylko od odległości między atomami w sieci.

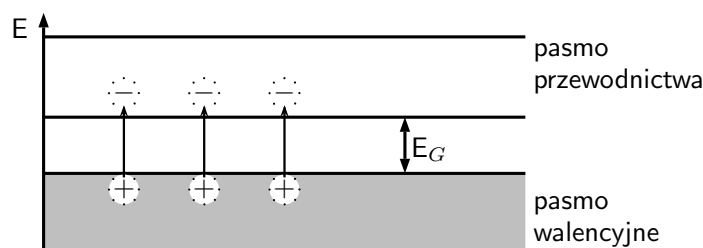
W przewodnictwie ciał stałych najważniejszą rolę odgrywają dwa pasma energetyczne: pasmo podstawowe (walencyjne), które odpowiada elektronom pochodzącym z zewnętrznych (walencyjnych) powłok atomowych i najbliższe pasmo stanów wzbudzonych tych elektronów, które nazywamy pasmem przewodnictwa. Pasmo walencyjne i pasmo przewodnictwa są oddzielone pasmem energii wzbronionych.

Jeżeli najwyższe położone pasmo jest całkowicie wypełnione (rysunek 3.1.1), to substancja nie przewodzi prądu elektrycznego, jest więc izolatorem. Aby przepływ prądu elektrycznego był możliwy to elektrony, uzyskujące dodatkową energię pod wpływem pola elektrycznego, musiałyby przejść na wyżej położone poziomy w paśmie przewodnictwa. Jednakże prawdopodobieństwo przejścia elektronu z całkowicie zapełnionego pasma walencyjnego do wyższego (pustego) pasma przewodnictwa jest niezmiernie małe, gdyż przerwa energetyczna  $E_G$  w izolatorach wynosi zwykle kilka eV (dla diamentu około 6 eV).



Rys. 3.1.1: Schematyczne przedstawienie poziomów energetycznych w izolatorze. Całkowicie wypełnione pasmo walencyjne oraz duża wartość przerwy energetycznej  $E_G$  uniemożliwiają przewodnictwo.

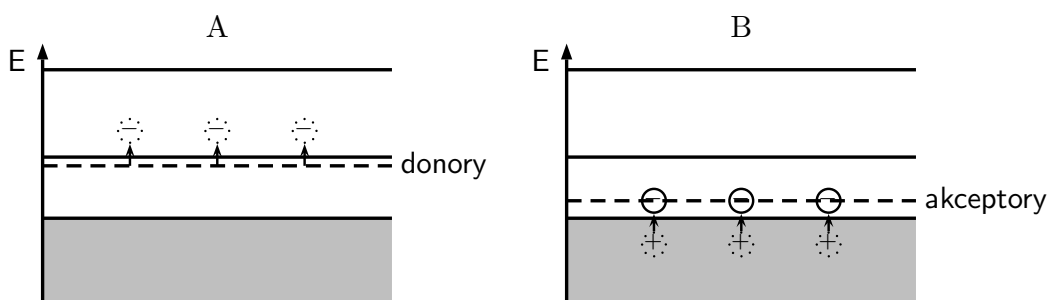
Struktura pasmowa półprzewodników jest podobna do struktury pasmowej izolatorów, z tym, że przerwa energetyczna  $E_G$  jest rzędu elektronowolta (np. 0.7 eV dla germanu lub 1.1 eV dla krzemu). Ze wzrostem temperatury elektrony mogą z większym prawdopodobieństwem przejść do pasma przewodnictwa, umożliwiając (podobnie jak w metalach) przepływ prądu elektrycznego. W paśmie walencyjnym powstają wówczas nieobsadzone stany tzw. dziury (rysunek 3.1.2), które stają się nośnikami dodatniego ładunku elektrycznego.



Rys. 3.1.2: Schemat poziomów energetycznych w półprzewodniku samoistnym. Wartość przerwy energetycznej  $E_G$  jest znacznie mniejsza niż dla izolatorów, a więc elektrony termiczne mogą przeskoczyć z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa pozostawiając w paśmie przewodnictwa dodatnio naładowane dziury.

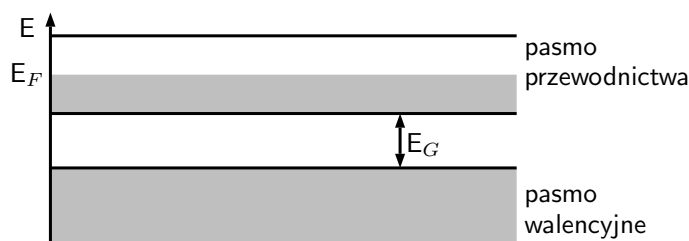
Przewodnictwo elektryczne w półprzewodniku jest związane z przemieszczaniem się elektronów w paśmie przewodnictwa oraz dziur w paśmie walencyjnym. Przewodnictwo można zwiększyć poprzez wprowadzenie tzw. domieszek donorowych lub akceptorowych (rysunek 3.1.3). Wprowadzając do krzemu (półprzewodnik samoistny, cztery elektrony walencyjne, czternasta grupa w układzie okresowym) pierwiastek posiadający pięć elektronów walencyjnych (np. fosfor; z piętnastej grupy układu okresowego) generujemy w strukturze energetycznej dodatkowe podpoziomy donorowe pod pasmem przewodnictwa. Tak otrzymany półprzewodnik nazywamy półprzewodnikiem typu n

(od ang. *negative* – ujemny). Podobnie domieszkując kryształ krzemu pierwiastkami posiadającymi trzy elektrony walencyjne (z trzynastej grupy układu okresowego) generujemy stany akceptorowe tuż nad pasmem walencyjnym, a otrzymany półprzewodnik nosi nazwę typu p (od ang. *positive* – dodatni).



Rys. 3.1.3: Poziomy donorowe w półprzewodniku typu n (część A) i akceptorowe w półprzewodniku typu p (część B).

W metalach pasmo przewodnictwa jest tylko częściowo wypełnione przez elektrony (rysunek 3.1.4). Dzięki temu metale są dobrymi przewodnikami prądu elektrycznego.



Rys. 3.1.4: Schematyczne przedstawienie poziomów energetycznych w metalu. Pasmo walencyjne jest częściowo zapelnione.  $E_F$  (energia Fermiego) – energia najwyższego poziomu zajętego przez elektrony liczona jest od dna pasma przewodnictwa.

### Zależność oporu przewodnika od temperatury

Zgodnie z klasyczną teorią przewodnictwa (sformułowaną w XIX wieku przez Drudego i Lorentza) przewodniki charakteryzują się bardzo dużą koncentracją elektronów swobodnych stanowiących gaz elektronowy. W nieobecności zewnętrznego pola elektrycznego elektrony te są w bezustannym chaotycznym ruchu. Jeżeli między końcami przewodnika wytworzymy różnicę potencjałów  $U$ , to pojawi się dodatkowa składowa prędkości elektronów (przeciwnie skierowana do wektora pola elektrycznego), w wyniku czego gaz elektronowy dryfuje, dając przepływ prądu elektrycznego. Ruch elektronów

swobodnych hamowany jest głównie przez oddziaływania z siecią krystaliczną, na dwa sposoby: poprzez rozpraszanie na fononach, dominujące w temperaturach wyższych od 100 K (tzw. opór fononowy) oraz rozpraszanie na domieszkach i defektach sieci krystalicznej (tzw. opór resztkowy), dominujące w temperaturach niższych. Wraz ze wzrostem temperatury rosną amplitudy drgań atomów sieci krystalicznej wokół położenia równowagi. W wyniku tego maleje średnia droga swobodna elektronów (droga przebywana pomiędzy kolejnymi aktami rozproszenia), a w konsekwencji rośnie opór właściwy  $\varrho$ . Dla przewodników zależność oporu właściwego od temperatury  $T$  jest w przybliżeniu zależnością liniową, którą można opisać wzorem empirycznym:

$$\varrho_T - \varrho_0 = \varrho_0 \alpha (T - T_0), \quad (3.1.3)$$

gdzie  $\alpha$  jest temperaturowym współczynnikiem oporu właściwego,  $T_0$  temperaturą odniesienia (zazwyczaj 293 K, czyli 20° C),  $\varrho_0$  oporem właściwym w temperaturze  $T_0$ , a  $\varrho_T$  oporem właściwym w temperaturze  $T$ . Ponieważ bezpośrednio mierzoną wielkością jest opór  $R$ , to korzystając ze wzoru (3.1.2) można wzór (3.1.3) przekształcić do postaci:

$$R_T = R_0 + R_0 \alpha (T - T_0), \quad (3.1.4)$$

gdzie  $R_0$  i  $R_T$  są odpowiednio oporami przewodnika w temperaturze  $T_0$  i  $T$ . Stąd temperaturowy współczynnik oporu właściwego w tym przybliżeniu można znaleźć jako:

$$\alpha = \frac{R_T - R_0}{R_0(T - T_0)}. \quad (3.1.5)$$

### Obwody elektryczne proste (o jednym oczku) i złożone (o wielu oczkach)

**Pierwsze prawo Kirchhoffa** (znane również jako bilans natężeń prądów w węźle) jest konsekwencją zasady zachowania ładunku elektrycznego. Mówi ono, że algebraiczna suma natężeń prądów wpływających do węzła sieci elektrycznej i prądów z niego wypływających jest równa zero. Prądy wpływające poprzedza się znakiem plus, a prądy wypływające znakiem minus. Matematycznie I prawo Kirchhoffa można zapisać w postaci:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (3.1.6)$$

**Drugie prawo Kirchhoffa** (znane również jako bilans napięć w zamkniętym obwodzie elektrycznym – oczku sieci) jest konsekwencją zasady zachowania energii. Aby omówić to prawo, konieczne jest zdefiniowanie kilku pojęć pomocniczych. Siła elektromotoryczna to jeden z najważniejszych parametrów charakteryzujących źródła energii elektrycznej (zwanymi źródłami siły elektromotorycznej; są nimi m. in. baterie). W literaturze siła elektromotoryczna oznaczana jest jako *SEM* lub jako  $\mathcal{E}$ , a jej jednostką jest

wolt. Oczko sieci elektrycznej jest to zamknięta część obwodu elektrycznego (czasem cały obwód).

Drugie prawo Kirchhoffa mówi, że suma wartości chwilowych sił elektromotorycznych występujących w oczku sieci równa się sumie wartości chwilowych spadków napięć na elementach pasywnych (np. opornikach) tego obwodu. Matematycznie drugie prawo Kirchhoffa można zapisać jako:

$$\sum_i SEM_i = \sum_j U_j. \quad (3.1.7)$$

Aby zapisać drugie prawo Kirchhoffa dla danego oczka sieci należy najpierw ustalić kierunek obchodzenia tego oczka. Jeżeli obchodząc oczko zgodnie z ruchem wskazówek zegara napotykamy źródło siły elektromotorycznej i mijamy go przechodząc od bieguna ujemnego do dodatniego (wzrost potencjału), to  $SEM$  tego źródła zapisujemy ze znakiem plus. Natomiast, jeśli przechodzimy od bieguna dodatniego do ujemnego (spadek potencjału) to  $SEM$  zapisujemy ze znakiem minus. Jeśli napotykamy opór elektryczny, np. w postaci rezystora, to (zgodnie z pierwszym prawem Ohma) iloczyn jego rezystancji (oporności) i natężenia prądu przez niego płynącego zapisujemy ze znakiem plus, gdy prąd płynie przeciwnie do kierunku obchodzenia oczka (wzrost potencjału), a ze znakiem minus, gdy zgodnie z kierunkiem wędrówki po oczku (spadek potencjału).

Warto zwrócić uwagę, że drugie prawo Kirchhoffa dla połączenia równoległego dwóch oporników (rysunek 3.1.5b):

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \quad (3.1.8)$$

prowadzi do użytecznego związku:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (3.1.9)$$

z którego wynika, że natężenia prądów płynących przez dwa oporniki połączone równolegle są odwrotnie proporcjonalne do wartości oporów tych oporników.

### Opór zastępczy szeregowego i równoległego połączenia oporników

Rzeczywiste obwody elektryczne stanowią kombinację oporników połączonych szeregowo lub równolegle (co często nazywane jest połączeniem mieszanym). Szeregowo połączenie oporników (rysunek 3.1.5a) jest to takie połączenie, w którym koniec pierwszego opornika połączony jest z początkiem następnego opornika w tzw. szereg oporowy. Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa, natężenie prądu płynącego przez każdy z oporników połączonych szeregowo jest takie samo i wynosi  $I$ . Na każdym oporniku następuje spadek napięcia  $U_i$ , a więc napięcie elektryczne  $U$  między końcami szeregu oporników jest równe sumie spadków napięć na poszczególnych opornikach, co można zapisać:



$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (3.1.10)$$

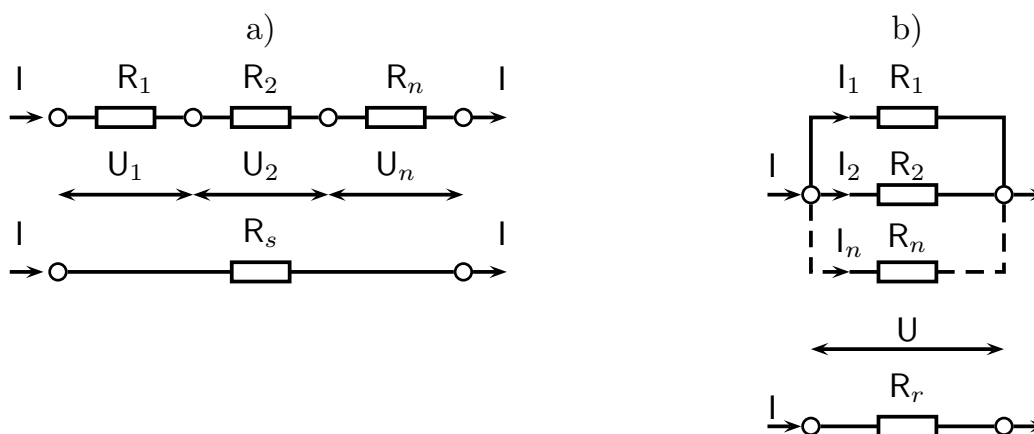
Jeśli skorzystamy z pierwszego prawa Ohma (przekształconego do postaci  $U = IR$ ) to wzór powyższy przyjmie postać:

$$IR_s = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n, \quad (3.1.11)$$

gdzie  $R_s$  jest oporem zastępczym układu. Dzieląc obie strony tego równania przez  $I$ , otrzymujemy:

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (3.1.12)$$

Opór zastępczy szeregowo połączonych oporników jest równy sumie algebraicznej ich rezystancji.



Rys. 3.1.5: Schemat szeregowego (część a) i równoległego (część b) połączenia oporników.  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_n$  oznaczają wartość rezystancji poszczególnych oporników obwodu,  $R_s$  jest oporem zastępczym połączenia szeregowego, a  $R_r$  jest oporem zastępczym połączenia równoległego.

W przypadku równoległego połączenia oporników (rysunek 3.1.5b) spadek napięcia na każdym oporniku jest taki sam i jest równy spadkowi napięcia  $U$  na rezystancji zastępczej  $R_r$ . Zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa, natężenia prądów  $I_i$  płynących przez poszczególne oporniki sumują się do wartości natężenia prądu  $I$  wpływającego do tego układu (rysunek 3.1.5b), co można zapisać w postaci:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (3.1.13)$$

Wykorzystując pierwsze prawo Ohma (przekształcone do postaci  $I = U/R$ ) możemy powyższe równanie zapisać jako:

$$\frac{U}{R_r} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n}. \quad (3.1.14)$$

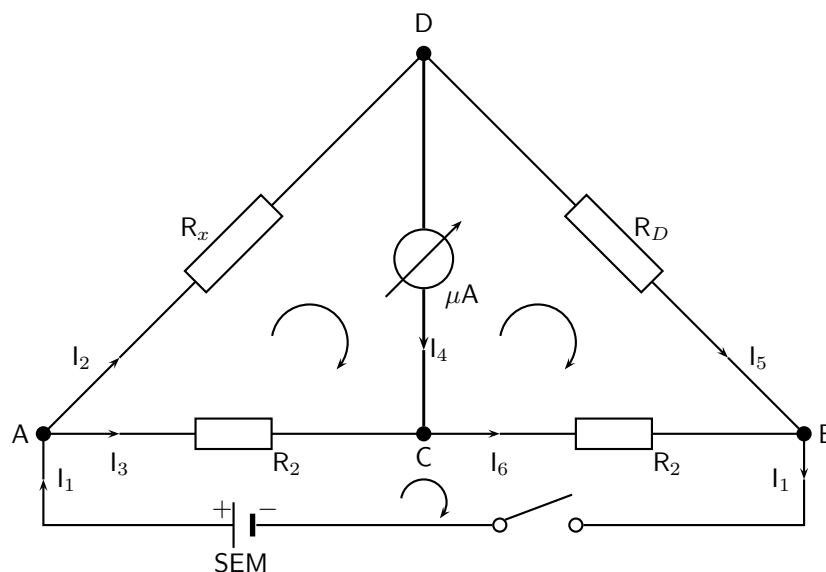
Dzieląc obie strony przez  $U$  otrzymujemy:

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (3.1.15)$$

Odwrotność oporu zastępczego  $R_r$  równolegle połączonych oporników jest równa algebraicznej sumie odwrotności rezystancji poszczególnych oporników.

### Pomiar oporu elektrycznego w układzie mostka Wheatstone'a

Mostek Wheatstone'a jest układem czterech oporników połączonych w czworobok oraz czulego galwanometru (tutaj mikroamperomierz) i źródła zasilania napięciem stałym włączonych w jego przekątne (rysunek 3.1.6). Mostek pozwala na precyzyjny pomiar oporu bez konieczności pomiaru napięcia i natężenia prądu. Układ ten może znajdować się tylko w jednym z dwóch stanów: albo  $U_{CD} = 0$  i przez galwanometr prąd nie płynie (mówimy, że mostek jest zrównoważony), albo  $U_{CD} \neq 0$  i w gałęzi CD płynie prąd (mostek jest niezrównoważony). Galwanometr jest tu tylko wskaźnikiem przepływu prądu w gałęzi CD, pozwalając odróżnić stan zrównoważonego mostka od stanu niezrównoważonego.



Rys. 3.1.6: Schemat mostka Wheatstone'a z zaznaczonymi kierunkami przepływu prądów. Litera A, B, C i D oznaczają węzły sieci elektrycznej.  $R_1$  i  $R_2$  oznaczają oporniki o ustalonej wartości oporu,  $R_D$  – opornicę dekadową, a  $R_X$  – badany opornik.

Rozpatrując przypadek zrównoważonego mostka Wheastone'a, zauważamy że (rysunek 3.1.6 węzły C i D mają ten sam potencjał (są równoważne). Wobec tego  $I_4 = 0$ , a z tego wynika iż  $I_2 = I_5 = I_D$  oraz  $I_3 = I_6 = I_C$ , gdzie  $I_C$  i  $I_D$  oznaczają natężenie prądu płynącego przez węzeł C i D odpowiednio. Korzystając ze wzoru (3.1.9) możemy zapisać  $R_X I_D = R_1 I_C$  (dla oczka ACD) i  $R_D I_D = R_2 I_C$  (dla oczka CBD), z czego wynika, że:

$$\frac{R_X}{R_D} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.1.16)$$

Zastosowanie praw Kirchhoffa do układu mostka Wheastone'a prowadzi do równania (3.1.16), które pozwala na wyznaczenie wartości nieznanego oporu z zależności:

$$R_X = \frac{R_1}{R_2} R_D. \quad (3.1.17)$$

Jeżeli opory  $R_1$  i  $R_2$  mają taką samą wartość, to opór badanego opornika jest wprost równy oporowi nastawionemu na opornicy dekadowej przy zrównoważonym mostku.

### 3.1.2 Przebieg pomiarów

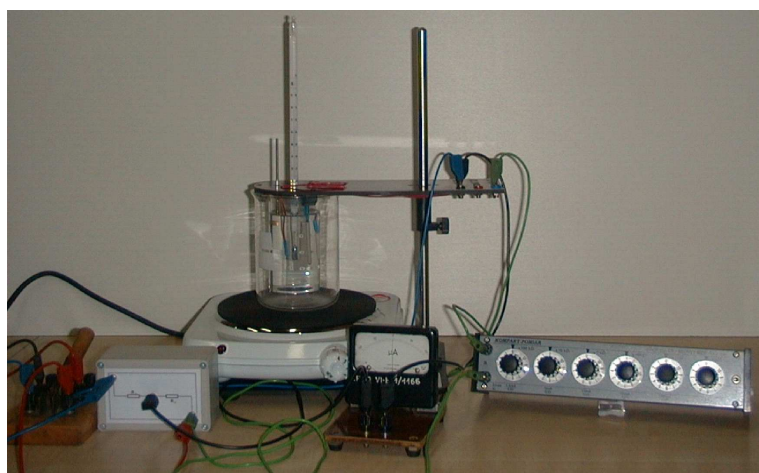
#### Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego (fotografia 3.1.7) wchodzi: zestaw trzech oporników wykonanych z różnych materiałów (grafitu, niklu i platyny), dwa oporniki o tej samej rezystancji połączone ze sobą szeregowo (oporniki drutowe  $10 \Omega$ ; dokładność 5%), opornica dekadowa, termometr rtęciowy, miernik uniwersalny, klucz i/lub komutator. Obwód elektryczny zasilany jest ze źródła napięcia stałego 1.5 V. Badane oporniki zanurzone są w zlewce z olejem parafinowym, która umieszczona jest w kąpielu wodnej podgrzewanej na maszynie elektrycznej z termostatem.

#### Przebieg doświadczenia

Doświadczenie rozpoczynamy od pomiaru oporu dostępnych oporników za pomocą miernika uniwersalnego (wykorzystując funkcję omomierza). Pomiar oporu powtarzamy w układzie mostka Wheastone'a. Zestawiamy połączenie szeregowo, a następnie równoległe dwóch wybranych oporników i dokonujemy pomiaru oporu tych połączeń. W przypadku połączenia równoległego dokonujemy pomiarów dla oporników o porównywalnych oporach oraz o oporach znacznie się różniących (np. ok.  $10 \Omega$  i  $100 \Omega$ ). Sprawdzamy zgodność uzyskanych wyników z przewidywanymi na podstawie równań (3.1.12) i (3.1.15). Przeprowadzamy analizę niepewności pomiarowych.

Drugą część doświadczenia rozpoczynamy od wybrania dwóch oporników, dla których badana będzie zależność ich oporu od temperatury. Najlepiej, wybrać oporniki o porównywalnym oporze, gdyż dzięki temu unikamy zmian rzędów rezystancji na opornicy dekadowej. Usprawnia to przebieg pomiarów i znacznie zmniejsza prawdopodobieństwo uszkodzenia mikroamperomierza przez nagły skok wartości natężenia prądu



Rys. 3.1.7: Układ doświadczalny do badania temperaturowej zależności oporu.

przepływającego przez niego w przypadku, gdy mostek jest niezrównoważony. Następnie należy połączyć układ mostka Wheatstone'a (schemat na rysunku 3.1.6). Zlewkę zewnętrzną (o pojemności 0.5 l) napełnić wodą destylowaną do około 3/4 wysokości (większa ilość podczas wrzenia będzie się wylewać na powierzchnię grzejną maszyny). Po przedyskutowaniu szczegółowego planu pomiarów z asystentem prowadzącym ćwiczenie należy, powoli ogrzewając układ, dokonywać pomiaru oporu badanych oporników (na przemian) co kilka stopni. Aby usprawnić proces chłodzenia można wynurzyć zlewkę wewnętrzną nad powierzchnię wody i użyć wentylatora.

### 3.1.3 Opracowanie wyników

Wykonać wykres zależności oporu od temperatury dla badanych oporników nanosząc wszystkie punkty pomiarowe (najlepiej w jednym układzie współrzędnych, używając różnych symboli dla różnych materiałów oraz wersji symbol pełny i symbol pusty dla temperatury rosnącej i malejącej). Można wykonać wykres oporu zredukowanego  $R/R_0$  od temperatury względnej  $(T - T_0)$  - w tym przypadku należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną propagację niepewności pomiarowych. Jeżeli pomiar oporu wykonywany był w tych samych temperaturach zarówno podczas ogrzewania jak i chłodzenia układu należy rozważyć zasadność wzięcia do rozważań wartości średniej  $R$  w danej temperaturze. Dla kilku punktów nanieść prostokąty niepewności pomiarowych. Ocenić czy z powodu błędów grubych nie należy pewnych punktów odrzucić z dalszego opracowania (tj. sprawdzić czy punkty wyraźnie odbiegające od spodziewanej zależności liniowej to wynik złego wpisania danych z tabeli pomiarowej, czy też innych czynników, spróbować ustalić jakich i czy da się takie błędy skorygować czy też punkty te należy, po podaniu uzasadnienia, zaniedbać w dalszym opracowaniu). Do punktów eksperymentalnych dopasować prostą metodą regresji liniowej (klasycznej czy ważonej

– wybór uzasadnić) i na bazie wartości parametrów prostej i ich niepewności wyznaczyć temperaturowy współczynnik oporu właściwego  $\alpha$  i jego niepewność. Następnie wyznaczyć wartość temperaturowego współczynnika oporu właściwego  $\alpha$  i jego niepewność na podstawie pomiarów oporu w dwóch dobrze wystabilizowanych temperaturach (zazwyczaj jest to temperatura pokojowa i temperatura wrzenia wody). W podsumowaniu porównać z wartością tablicową (np. z tabeli 3.1.1) i ze sobą wartości współczynnika  $\alpha$  wyznaczone tymi metodami oraz skomentować uzyskane wyniki. Omówić czynniki, które mogły mieć wpływ na jakość uzyskanych wyników.

Tabela 3.1.1: Temperaturowy współczynnik oporności właściwej dla wybranych materiałów [46]

	C	Ni	Pt
$\alpha$ [1/deg]	-0.005	0.006	0.003

## 3.2 Wyznaczanie pojemności kondensatora metodą rozładowania

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie pojemności kondensatora i ładunku na nim zgromadzonego oraz sprawdzenie zależności opisujących pojemności zastępcze dla baterii kondensatorów połączonych równolegle oraz szeregowo. Pomiary prowadzone są metodą rozładowania.

Zagadnienia do przygotowania:

- pojemność kondensatora – definicja;
- obwody  $RC$ ; ładowanie i rozładowanie kondensatora;
- zależność natężenia prądu płynącego w obwodzie  $RC$  od czasu;
- pojemność zastępcza (równoważna) baterii kondensatorów.

Literatura podstawowa: [15] §26.1, 26.2, 26.4, 28.8; literatura dodatkowa [2].

### 3.2.1 Podstawowe pojęcia i definicje

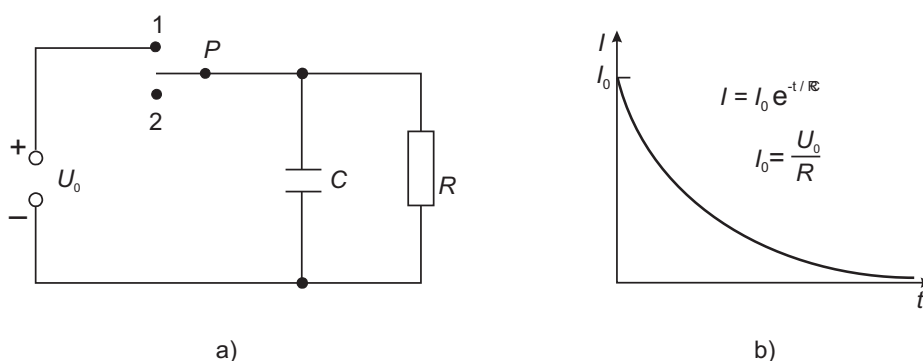
#### Pojemność kondensatora

Kondensatorem nazywamy układ dwóch przewodników (zwanymi okładkami kondensatora) rozdzielonych dielektrykiem. Jeżeli ładujemy kondensator tj. zwiększamy ładunek  $q$  zgromadzony na jego okładkach, rośnie również różnica potencjałów (napięcie)  $U$  między okładkami kondensatora, przy czym iloraz  $q/U$  pozostaje stały. Iloraz  $q/U$  jest więc wielkością charakterystyczną dla danego kondensatora i nazywamy go pojemnością kondensatora. Pojemność kondensatora zależy od jego rozmiarów geometrycznych oraz od rodzaju wypełniającego go dielektryka. Jednostką pojemności w układzie SI jest farad ( $1 F = 1 C/V$ ). W praktyce stosowane są jednostki podwielokrotne: mili-, mikro-, nano- i pikofarad ( $10^{-3} F$ ,  $10^{-6} F$ ,  $10^{-9} F$  i  $10^{-12} F$ ).

### Rozładowanie kondensatora w obwodzie RC

Szeregowy obwód RC przedstawiony jest na rysunku 3.2.1a (opór wewnętrzny źródła oraz opory połączeń zanedbujemy). Po ustawieniu przełącznika (klucza)  $P$  w położenie 1 w obwodzie płynie prąd ładowania, aż do całkowitego naładowania kondensatora. Na okładkach kondensatora zgromadzony zostaje ładunek  $q$ , a między jego okładkami panuje różnica potencjału  $U_0$ , taka że:

$$q = CU_0, \quad (3.2.1)$$



Rys. 3.2.1: Obwód RC: a) schemat obwodu RC, b) zależność prądu rozładowania od czasu.

gdzie  $C$  jest pojemnością kondensatora. Po przestawieniu klucza  $P$  w położenie 2 następuje rozładowanie kondensatora. Jeżeli z okładek odprowadzony zostanie ładunek  $dq$  to różnica potencjałów między okładkami zmaleje o  $dU$  i spełniony będzie związek:

$$q - dq = C(U_0 - dU). \quad (3.2.2)$$

Odejmując stronami równania (3.2.1) i (3.2.2) otrzymamy:

$$dq = CdU. \quad (3.2.3)$$

Przez opór  $R$  popłynie prąd  $I$  spełniający warunek:

$$-dq = Idt, \quad (3.2.4)$$

a ponieważ w obwodzie mamy tylko opór omowy, więc:

$$dU = RdI. \quad (3.2.5)$$

Po wstawieniu równań (3.2.4) i (3.2.5) do równania (3.2.3) i przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}dt, \quad (3.2.6)$$

skąd po scałkowaniu:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{1}{RC}t, \quad (3.2.7)$$

co można zapisać w postaci równoważnej:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (3.2.8)$$

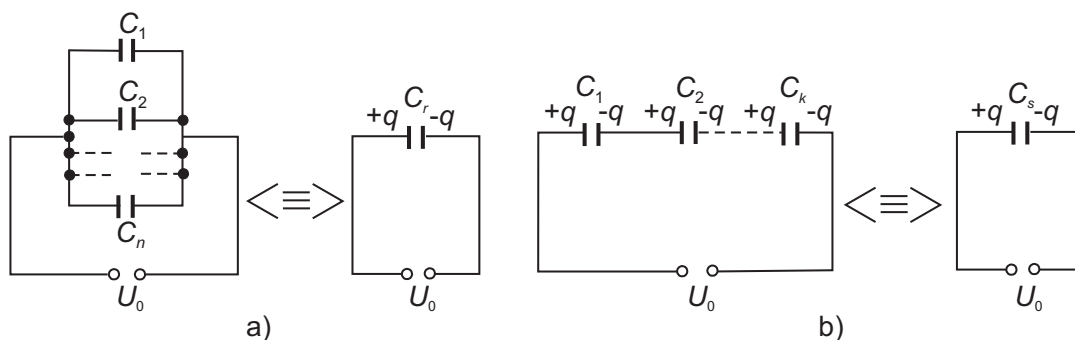
gdzie  $\tau = RC$  nazywamy stałą czasową obwodu,  $I_0$  jest prądem płynącym w obwodzie w chwili  $t = 0$ . Z ostatniego wzoru wynika, że natężenie prądu rozładowania maleje wykładniczo z czasem, z szybkością określoną przez stałą czasową  $\tau$  (rysunek 3.2.1b).

Znając stałą czasową  $\tau$  i wartość  $I_0$  (w naszym przypadku  $I_0 = U_0/R$ ) możemy obliczyć ładunek  $q$ , który został zgromadzony na okładkach kondensatora. W chwili  $t = 0$  na kondensatorze znajduje się ładunek  $q$ , a po całkowitym rozładowaniu, czyli w chwili  $t = \infty$  na kondensatorze jest ładunek 0. Więc podstawiając równanie (3.2.8) do równania (3.2.4) i całkując po czasie w granicach  $(0, \infty)$  oraz po ładunku w granicach  $(q, 0)$  otrzymujemy:

$$q = \tau I_0. \quad (3.2.9)$$

### Łączenie kondensatorów

Rozważymy tutaj najprostsze połączenia kondensatorów tj. połączenie szeregowe i równoległe (rysunek 3.2.2). Wyznaczając pojemność zastępczą układu (baterii) kondensatorów korzystamy z właściwości elektrostatycznych przewodników (powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną tzn. jest zbiorem punktów o takim samym potencjale elektrycznym) i z zasady zachowania ładunku.



Rys. 3.2.2: Łączenie kondensatorów: a) równoległe, b) szeregowe.

W przypadku kondensatorów połączonych równoległe taka sama różnica potencjałów  $U_0$  jest przyłożona do każdego z kondensatorów (rysunek 3.2.2a), natomiast ładunek, który gromadzi się na kondensatorach jest zależny od ich pojemności ( $q_i = C_i U_0$ ).

Całkowity ładunek zgromadzony w baterii kondensatorów jest sumą ładunków zgromadzonych na okładkach poszczególnych kondensatorów ( $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_{i=1}^n q_i$ ). Baterię kondensatorów połączonych równolegle można zastąpić jednym kondensatorem o pojemności  $C_r$  takiej, że przyłożenie do jego okładek różnicy potencjałów  $U_0$  spowoduje zgromadzenie na nim ładunku  $q$  ( $q = C_r U_0$ ). Tak więc, pojemność zastępcza dla układu  $n$  kondensatorów połączonych równolegle jest sumą ich pojemności:

$$C_r = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (3.2.10)$$

W przypadku gdy różnica potencjałów  $U_0$  przyłożona jest do układu kondensatorów połączonych szeregowo (rysunek 3.2.2b), suma spadków napięć na poszczególnych kondensatorach jest równa przyłożonej różnicy potencjałów ( $U_0 = \sum_{j=1}^k U_j$ ). Zgodnie z zasadą zachowania ładunku w wyniku ładowania baterii kondensatorów połączonych szeregowo, na kondensatorach zgromadzą się jednakowe ładunki  $q$ , a na okładkach kondensatorów wytworzą się różnice potencjałów  $U_j = q/C_j$ . Wobec tego dochodzimy do zależności:

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{C_j}. \quad (3.2.11)$$

Tak więc, w przypadku układu  $k$  kondensatorów połączonych szeregowo odwrotność pojemności zastępczej jest sumą odwrotności pojemności kondensatorów tworzących baterię.

### 3.2.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego wchodzi: źródło stabilizowanego napięcia stałego o napięciu  $U_0 = 6\text{ V}$ , mikroamperomierz o zakresie do  $100\ \mu\text{A}$ , opornica dekadowa  $R$  o zakresie co najmniej  $40\ \text{k}\Omega$ , przycisk załączający  $P$ , badane kondensatory, przewody połączeniowe, stoper. Schemat połączeń przedstawiony jest na rysunku 3.2.3.

#### Przebieg doświadczenia

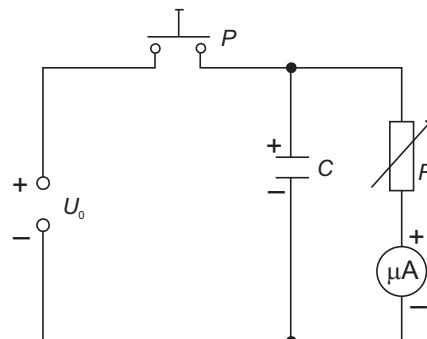
##### Wyznaczanie pojemności kondensatora i zgromadzonego na nim ładunku

Na opornicy dekadowej nastawić wstępnie taką wartość, by przy napięciu zasilającym  $6\text{ V}$  wartość prądu płynącego w obwodzie nie przekroczyła  $2/3$  zakresu mikroamperomierza. Połączyć układ według schematu przedstawionego na rysunku 3.2.3. Sprawdzić poprawność połączonych układu (sprawdzić biegunowość mikroamperomierza).



Zamknąć obwód wciskając przycisk  $P$ . Po ustabilizowaniu się wartości płynącego prądu ustawić tę wartość dokładnie na  $80 \mu A$ , dobierając odpowiednio opór opornicy dekadowej (regulując rezystancję opornicy dekadowej nie wolno doprowadzić do przekroczenia zakresu mikroamperomierza). Zapisać wartość prądu  $I_0$  oraz wartość rezystancji opornicy dekadowej  $R$ .

Wcisnąć przycisk  $P$ , poczekać do chwili uzyskania stabilnego wskazania  $80 \mu A$  i następnie rozłączyć obwód poprzez zwolnienie przycisku, jednocześnie uruchamiając stoper. Zatrzymać stoper w chwili przejścia wskazówki mikroamperomierza przez z góry ustaloną wartość prądu  $I_n$ . Zapisać tę wartość prądu oraz czas rozładowania kondensatora. Wartości prądu  $I_n$  wygodnie jest ustalić jako:  $70; 65; \dots; 10; 5 \mu A$ . Dla danej wartości prądu  $I_n$  trzykrotnie powtórzyć pomiar czasu rozładowania kondensatora. Pomiary powtórzyć dla innego kondensatora.



Rys. 3.2.3: Schemat układu do wyznaczania pojemności i ładunku kondensatora metodą rozładowania.

### Wyznaczanie pojemności dwóch kondensatorów połączonych równolegle

Zmodyfikować układ pomiarowy włączając w miejsce kondensatora  $C$  połączone równolegle kondensatory, których pojemności zostały wcześniej zmierzone. Wyznaczyć pojemność tego układu w analogiczny sposób jak poprzednio.

### Wyznaczanie pojemności dwóch kondensatorów połączonych szeregowo

Zmodyfikować układ pomiarowy włączając w miejsce kondensatora  $C$  połączone szeregowo kondensatory, których pojemności zostały wcześniej zmierzone. Wyznaczyć pojemność tego układu tą samą metodą co poprzednio.

### 3.2.3 Opracowanie wyników

Sporządzić wykresy zależności prądu rozładowania  $I$  oraz logarytmu  $\ln(I/I_0)$  od czasu dla badanych kondensatorów oraz ich połączeń. Metodą regresji liniowej znaleźć wartości stałej czasowej, a następnie obliczyć pojemności badanych kondensatorów i ich połączeń.

Wykorzystując wzory wiążące pojemności kondensatorów tworzących baterię z pojemnościami zastępczymi obliczyć pojemności zastępcze dla używanych tutaj kondensatorów połączonych równolegle i szeregowo.

Przeprowadzić rachunek niepewności metodą różniczki zupełnej. Porównać wartości obliczonych pojemności zastępczych z wartościami wyznaczonymi eksperymentalnie.

### 3.3 Wyznaczanie współczynnika Halla

Bezpośrednim celem ćwiczenia jest zbadanie zjawiska Halla, wyznaczenie współczynnika Halla oraz gęstości nośników ładunku dla badanej próbki przewodzącej.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- zachowanie się cząstki naładowanej w polach magnetycznym i elektrycznym;
- potencjał i napięcie pola elektrycznego;
- zjawisko przewodnictwa – zależność pomiędzy wartością natężenia prądu elektrycznego, a wielkościami mikroskopowymi tzn. ładunkiem i gęstością nośników prądu;
- zjawisko Halla – napięcie Halla, współczynnik Halla (opis i wyprowadzenie końcowego wzoru powinno być umieszczone w części teoretycznej sprawozdania);
- sposoby wytwarzania jednorodnego pola magnetycznego.

Literatura podstawowa: [2], [25], [26].

#### 3.3.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Na cząstkę posiadającą ładunek  $q$  i znajdującą się w polu elektrycznym o natężeniu  $\vec{E}$  działa siła  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ . Jej kierunek jest zgodny z kierunkiem wektora natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ . Siła działa niezależnie od prędkości  $\vec{v}$  naładowanej cząstki, nawet wtedy, gdy  $\vec{v} = 0$ . Działanie tej siły zmienia energię kinetyczną cząstki, a więc zmienia wartość jej prędkości.

Na naładowaną cząstkę znajdującą się w polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$  działa siła Lorentza  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ , której kierunek jest zawsze prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego  $\vec{B}$  i prędkości  $\vec{v}$ . Siła ta działa tylko na cząstkę poruszającą się (czyli gdy  $\vec{v} \neq 0$ ), powodując zakrzywienie toru cząstki. Ponieważ siła ta jest zawsze prostopadła do wektora przesunięcia  $d\vec{s}$ , to wykonywana przez nią praca  $W = \vec{F}d\vec{s} = 0$ . W konsekwencji tego nie zachodzi zmiana energii kinetycznej cząstki pod wpływem działania pola magnetycznego. Pole magnetyczne może zmienić kierunek wektora prędkości poruszającej się cząstki, ale nie może zmienić wartości jej prędkości.

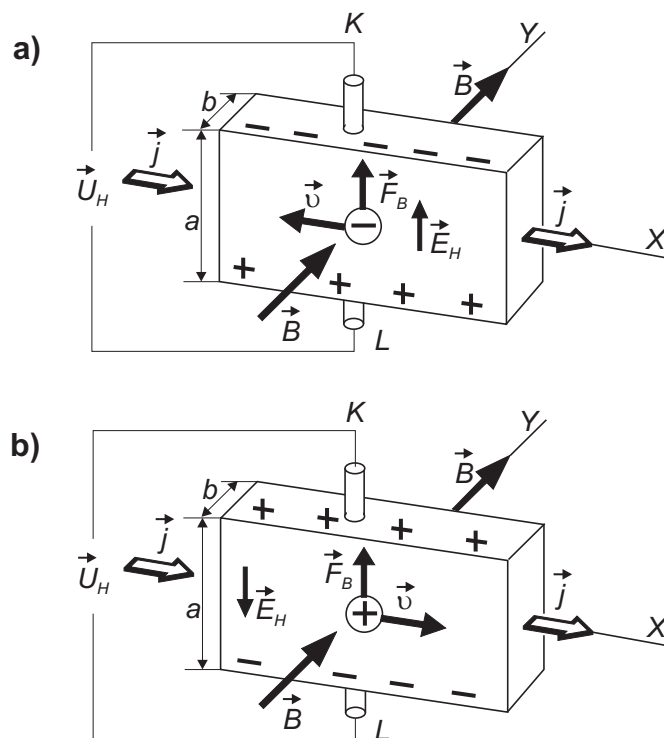
W 1879 roku Edwin Hall odkrył zjawisko, nazwane później jego imieniem, będące bezpośrednim efektem oddziaływania pola magnetycznego na poruszające się nośniki ładunku w przewodniku. Rozważmy prostopadłościenną płytkę przewodnika o wymiarach  $a$ ,  $b$  i  $c$ , przez którą przepływa prąd o natężeniu  $I$  (rysunek 3.3.1).

Przepływ prądu polega na uporządkowanym ruchu nośników ładunku  $q$ . Jeżeli liczba nośników ładunku w jednostce objętości wynosi  $n_0$ , a ich średnia prędkość jest równa  $v$ , to gęstość płynącego prądu można opisać równaniem:

$$j = qvn_0. \quad (3.3.1)$$

Jeżeli prąd przepływa przez powierzchnię  $S$  prostopadłą do kierunku prądu, to natężenie płynącego prądu wynosi  $I = jS$ . Dla powierzchni w kształcie prostokąta o bokach  $a$  i  $b$  mamy  $S = ab$ , więc natężenie prądu można zapisać jako:

$$I = qvn_0ab. \quad (3.3.2)$$



Rys. 3.3.1: Płytkę wykorzystywaną w zjawisku Halla. a) przypadek ujemnych nośników ładunku b) przypadek dodatnich nośników ładunku.

Dla ładunków dodatnich ( $q > 0$ ) kierunek wektora prędkości pokrywa się z kierunkiem płynącego prądu, natomiast ładunki ujemne ( $q < 0$ ) poruszają się w kierunku przeciwnym względem prądu.

Płytkę umieszczamy w zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B}$ , prostopadłym do wektora prędkości  $\vec{v}$ . Na poruszające się nośniki ładunku działa siła Lorentza  $\vec{F}_B$ . Ponieważ wektory  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$  są prostopadłe to wartość siły Lorentza wynosi:

$$F_B = qvB. \quad (3.3.3)$$

Pod wpływem tej siły ładunki, niezależnie od znaku, odchylane są w kierunku górnej ścianki płytki i tam powstaje ich nadmiar, a w pobliżu dolnej ścianki pojawia się ich niedomiar. Wskutek tego w płytce wytwarza się dodatkowe pole elektryczne  $\vec{E}_H$  w kierunku pionowym, którego zwrot jest zawsze od potencjału wyższego do niższego (rysunek 3.3.1). Pole to działa na ładunki siłą o wartości:

$$F_E = qE_H, \quad (3.3.4)$$

która skierowana jest przeciwnie do siły Lorentza i jest jej równa co do wartości bezwzględnej  $F_E = F_B$ . Zakładając jednorodność pola elektrycznego  $\vec{E}_H$ , różnica poten-

cjałów między punktami  $K$  i  $L$ , nazywana napięciem Halla, wynosi  $U_H = E_H a$ . Korzystając z równań (3.3.3) i (3.3.4), dzięki równości sił  $F_E$  i  $F_B$  otrzymujemy wyrażenie na napięcie Halla  $U_H$ :

$$U_H = vBa. \quad (3.3.5)$$

Korzystając z równań (3.3.2) i (3.3.5), otrzymujemy:

$$U_H = \frac{1}{qn_0} \frac{IB}{b}, \quad (3.3.6)$$

gdzie wielkość  $R_H = \frac{1}{qn_0}$  nazywana jest współczynnikiem Halla. A zatem ostatecznie:

$$U_H = R_H \frac{IB}{b}. \quad (3.3.7)$$

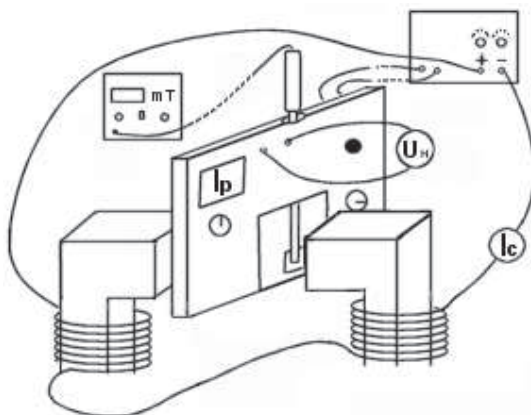
Zależność (3.3.7) wskazuje doświadczalną metodę wyznaczania współczynnika Halla dla różnych materiałów. Przy znanej grubości płytki  $b$  konieczny jest pomiar wartości  $U_H$ ,  $I$  oraz  $B$ . Wyznaczony współczynnik Halla pozwala na określenie koncentracji nośników ładunku.

Zgodnie z zastosowanym w powyższych rozważaniach klasycznym modelem przewodnictwa (gaz swobodnych elektronów), znak i wartość współczynnika Halla zależy od rodzaju nośników ładunku i ich gęstości. Dla elektronów współczynnik Halla  $R_H$  jest ujemny, a dla dziur dodatni. W większości metali nośnikami ładunku są elektrony. Gęstość nośników ładunku określona z pomiarów efektu Halla dla metali jednowartościowych takich jak Li, Na, Ag, gdzie na jeden atom przypada jeden elektron przewodnictwa, pozostaje w dobrej zgodności z wynikami innych metod pomiarowych i obliczeń. Jednakże ten klasyczny model nie daje dobrych wyników dla metali o bardziej skomplikowanej budowie powłok elektronowych (Fe, Bi, Cd), a także dla półprzewodników i w tym przypadku należy szukać wyjaśnienia w teorii pasm elektronowych.

### 3.3.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

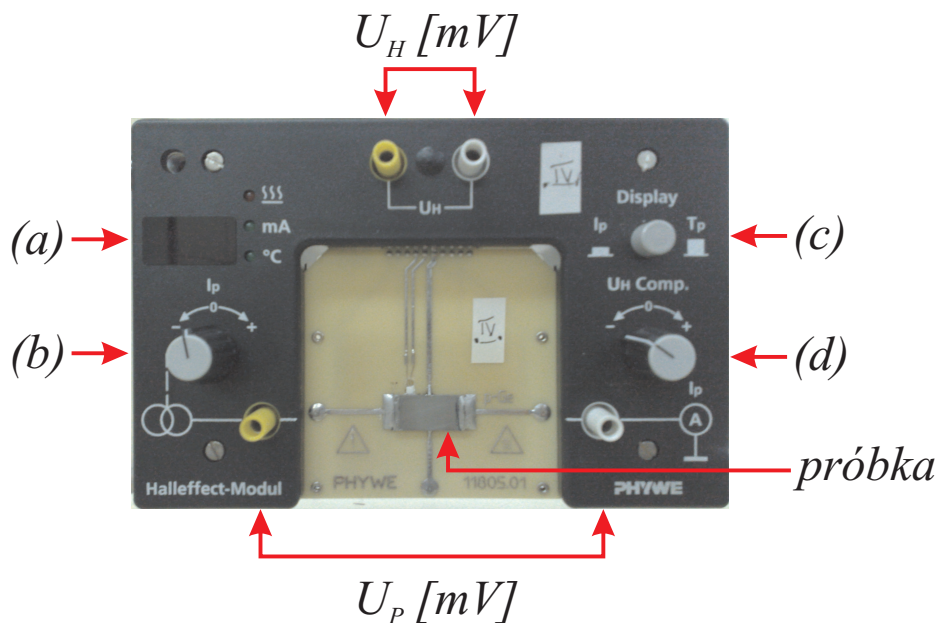
Układ eksperymentalny daje możliwość pomiaru zależności pozwalających na wyznaczenie współczynnika Halla zgodnie z równaniem (3.3.7). Stosowany do wykonania tego ćwiczenia zestaw doświadczalny przedstawiony jest na rysunku 3.3.2. Układ doświadczalny składa się z następujących elementów: płyty z próbką (1), układu zasilania płyty z próbką oraz elektromagnesu (2), konsoli teslomierza (3) wraz z sondą (4), elektromagnesu z dwoma nabiegunnikami (5) oraz zestawu mierników uniwersalnych (6). Jeden z tych mierników o większej precyzji służy do pomiaru napięcia Halla  $U_H$ , drugi miernik używany jest do pomiaru prądu  $I_C$  płynącego przez uzwojenia elektromagnesu. Należy zwrócić uwagę, iż przy obydwóch końcach uzwojeń elektromagnesu zaznaczone są kierunki nawinięcia przewodów.



Rys. 3.3.2: Schemat połączenia elementów układu pomiarowego. Symbolem (6) zaznaczono miejsca odczytu wartości  $U_H$  i  $I_C$  za pomocą mierników uniwersalnych. Symbolem  $I_P$  na wyświetlaczu wbudowanym w płytę oznaczono miejsce odczytu prądu płynącego przez próbkę. Pokazano także sposób umieszczenia w otworze płyty sondy (4) do pomiaru indukcji pola magnetycznego w miejscu próbki.

### Płyta z próbką

Na rysunku 3.3.3 przedstawiono płytę, w której umieszczona jest próbka (zaznaczona na niebiesko), wraz z oznaczeniami według poniższego opisu:



Rys. 3.3.3: Płyta z próbką (opis oznaczeń w tekście).

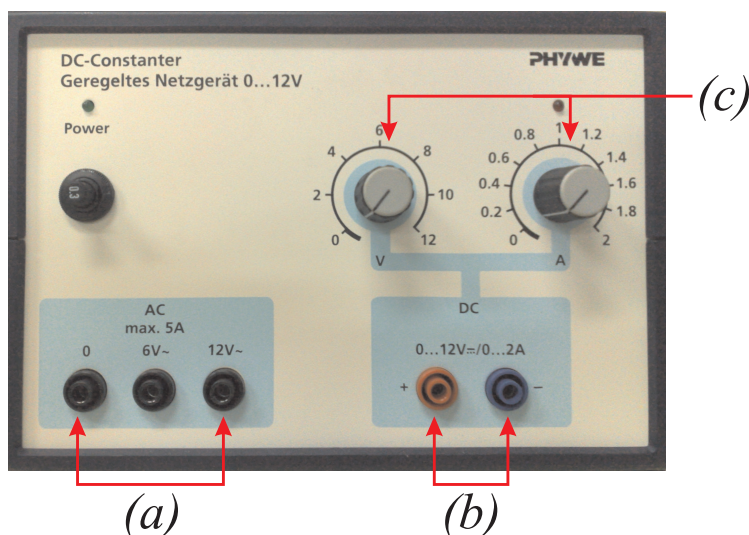
- $U_H$ ,  $U_P$  - wyjścia do pomiaru odpowiednio napięcia Halla  $U_H$  oraz napięcia na próbce  $U_P$ . Do tych wyjść podłącza się mierniki uniwersalne pracujące jako miliwoltomierze (mV);
- a - wyświetlacz wartości prądu próbki  $I_P$  (jednostka mA). Wyświetlacz ten jest uniwersalny i może alternatywnie pracować jako wskaźnik temperatury. Należy zwrócić uwagę co wyświetlacz wskazuje aktualnie i ewentualnie zmienić ustawienie (przy pomocy przycisku c) na żadaną wielkość;
- b - pokrętło do regulacji wartości prądu  $I_P$ ;
- c - przycisk zmiany pomiędzy wskazaniem wartości prądu  $I_P$  a temperatury na wyświetlaczu a
- d - pokrętło zerowania (kompensacji) napięcia  $U_H$ .

Na odwrocie płyty znajdują się wejścia zasilania. Należy połączyć je z odpowiednimi wyjściami układu zasilającego (na rysunku 3.3.4 oznaczone przez a). Również na odwrocie znajduje się przycisk włączający ogrzewanie próbki, które nie jest używane w tym eksperymencie. Należy uważać, by nie wcisnąć tego przycisku, gdyż spowoduje to natychmiastowe grzanie próbki i konieczne będzie oczekiwanie, aż jej temperatura powróci do wartości pokojowej.

#### **Układ zasilania płytki z próbką oraz elektromagnesu**

Na rysunku 3.3.4 przedstawiono zasilanie płytki z próbką oraz elektromagnesu, wraz z oznaczeniami według poniższego opisu:

- a - wyjścia +/- zasilania płytki z próbką (12V);
- b - wyjścia +/- zasilania elektromagnesu;
- c - pokrętła sterowania napięciem i natężeniem prądu elektromagnesu.

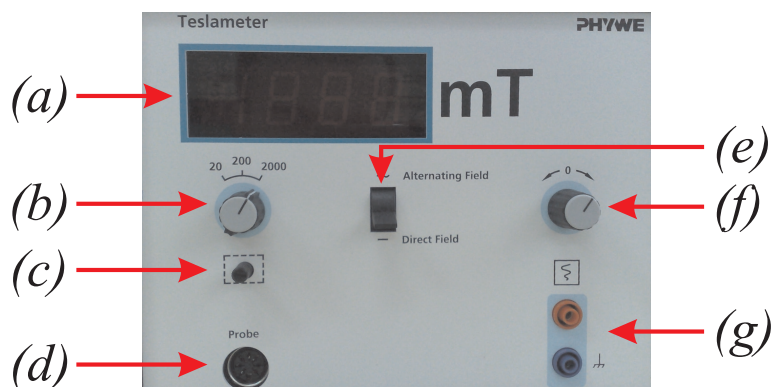


Rys. 3.3.4: Układ zasilający płytę z próbką i elektromagnes (opis oznaczeń w tekście).

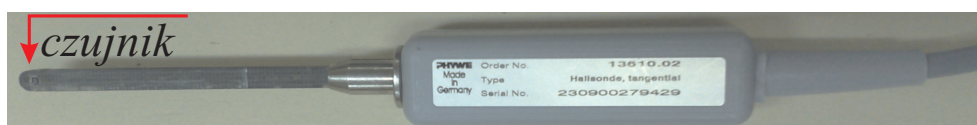
**Teslomierz - konsola teslomierza i sonda**

Płyta czołowa konsoli przedstawiona na rysunku 3.3.5 zawiera:

- a - wyświetlacz cyfrowy podający wartość indukcji pola magnetycznego (jednostka mT), z dokładnością zależną od ustawionego zakresu pomiaru. Dla zakresu 0-20 mT dokładność jest 0.01 mT, dla zakresu 0-200 mT dokładność jest 0.1 mT oraz dla zakresu 0-1000 mT dokładność jest 1 mT;
- b - pokrętko zmiany zakresu (0-20, 0-200 i 0-1000 mT);
- c - śruba zgrubnej regulacji „zera” teslomierza;
- d - wejście dla sondy;
- e - przełącznik w tryb pomiaru pola zmiennego (*alternating field*) lub pola stałego (*direct field*);
- f - pokrętko precyzyjnej regulacji „zera” teslomierza;
- g - wyjścia do podłączenia zewnętrznych urządzeń pomiarowych (nie używane w eksperymencie).



Rys. 3.3.5: Konsola teslomierza wraz z oznaczeniem poszczególnych elementów.



Rys. 3.3.6: Sonda.

Sonda (przedstawiona na rysunku 3.3.6) podłączona do teslomierza pozwala na pomiar wartości i zwrotu wektora indukcji pola magnetycznego. Sonda składa się z uchwyty zaopatrzonego w naklejkę znamionową oraz płaskiego ramienia, na którego końcu umieszczony jest czujnik natężenia pola magnetycznego (na rysunku 3.3.6 zaznaczony na czerwono). Ramię jest zazwyczaj osłonięte metalową nakładką, którą

należy zdjąć przed przystąpieniem do pomiarów. Po zakończeniu doświadczenia należy z powrotem założyć osłonę.

Podczas pomiaru sonda powinna być ustawiona tak, aby płaska powierzchnia ramienia była prostopadła do linii pola magnetycznego, a czujnik znajdował się nieruchomo w miejscu, w którym wykonywany jest pomiar. Wynik dodatni pomiaru wartości indukcji magnetycznej oznacza, że linie pola magnetycznego zwrócone są w kierunku sondy od strony uchwytu, po której znajduje się naklejka znamionowa. Z kolei wynik ujemny wskazuje na zwrot wektora wychodzący od strony uchwytu sondy zaopatrzonej w naklejkę. Wartość indukcji magnetycznej mierzona z dala od źródła pola magnetycznego (np. nabiegowników elektromagnesu) powinna wynosić około  $\pm 0.05$  mT. Wartość ta odpowiada natężeniu pola magnetycznego Ziemi, a jej znak zależy od ustawienia sondy względem linii pola magnetycznego Ziemi. Otrzymana wartość stanowi tzw. „zero” teslomierza. Jeżeli mierzona wartość znacznie odbiega od podanej, należy najpierw skorygować „zero” teslomierza pokrętłem oznaczonym symbolem f na rysunku 3.3.5, a w miarę potrzeby również pokrętłem oznaczonym symbolem c na rysunku 3.3.5. Dla sprawdzenia poprawności ustawienia „zera” należy sprawdzić, obracając sondą w obszarze z dala od źródeł pola magnetycznego, czy mierzone wartości mieszczą się w przedziale około  $\pm 0.05$  mT.

### Przebieg doświadczenia

Układ doświadczalny zestawić tak, jak to pokazano na rysunku 3.3.2. Ustawić odpowiednio miernik uniwersalny  $I_C$  na pomiar prądu i przy pomocy układu zasilania cewek ustawić wartość prądu na 0.5 A. Następnie dokonać identyfikacji biegunów magnesu za pomocą sondy. Korygując położenie nabiegowników zadbać o jak najbardziej jednorodne pole magnetyczne w szczelinie między biegunami elektromagnesu. Ustawienia te mogą wpłynąć na końcowy wynik doświadczenia.

Wykorzystując teslomierz, zmierzyć wartość indukcji pola magnetycznego  $B$  pomiędzy nabiegownikami dla różnych wartości prądu cewek elektromagnesu  $I_C$ . Wartość prądu  $I_C$ , zmienianą przy pomocy pokrętła oznaczonego symbolem c na rysunku 3.3.4, odczytywać używając miernika uniwersalnego (w trybie amperomierza) włączonego w obwód szeregowo (oznaczonego symbolem 6 na rysunku 3.3.2). Wartość prądu  $I_C$  nie powinna przekraczać 1.5 A, co odpowiada indukcji pola magnetycznego między nabiegownikami około 320 mT. Po dokonaniu pomiarów wyjąć sondę z płyty z próbką i wyłączyć konsolę teslomierza.

Prąd próbki  $I_P$  regulowany jest przy pomocy pokrętła oznaczonego symbolem c na rysunku 3.3.3. Wartość tego prądu odczytywać należy na wyświetlaczu oznaczonym symbolem a na rysunku 3.3.3. Wartość napięcia Halla  $U_H$  odczytywać na mierniku uniwersalnym (w trybie miliwoltomierza) oznaczonym symbolem 6 na rysunku 3.3.2.

Zgodnie z równaniem (3.3.7) wyznaczenia stałej Halla  $R_H$  można dokonać na podstawie pomiaru zależności napięcia  $U_H$  od wartości prądu cewek elektromagnesu  $I_C$  przy stałej wartości prądu próbki  $I_P$ . Można także wyznaczyć stałą Halla badając zależność napięcia  $U_H$  od wartości prądu próbki  $I_P$  przy stałej wartości prądu zasilania



cewek elektromagnesu  $I_C$ . W ćwiczeniu należy wykorzystać obie metody. W pierwszej metodzie dla trzech wartości prądu  $I_P$  dokonać pomiaru wartości napięcia  $U_H$ , zmieniając prąd zasilania cewek  $I_C$ . W drugiej metodzie dla jednej wartości prądu  $I_C$  dokonać pomiaru zależności napięcia  $U_H$  od prądu  $I_P$ .

### 3.3.3 Opracowanie wyników

Na podstawie zmierzonych wartości indukcji pola magnetycznego  $B$  dla różnych wartości prądu cewek elektromagnesu  $I_C$  sporządzić wykres kalibracyjny  $B(I_C)$ , a następnie korzystając z regresji liniowej wyznaczyć współczynniki linii prostej opisującej tę zależność oraz ich niepewności. Korzystając z równania prostej kalibracyjnej, przeliczyć zarejestrowane w dalszej części doświadczenia wartości prądu  $I_C$  na odpowiadające im wartości indukcji magnetycznej  $B$ . Obliczyć także niepewności wyznaczonych wartości indukcji magnetycznej  $B$ .

Dla pomiarów zależności  $U_H$  w funkcji  $I_C$ , dla każdej z wartości prądu próbki  $I_P$ , sporządzić wykresy napięcia Halla  $U_H$  w funkcji  $B$  i dopasować proste metodą regresji liniowej. Dla pomiarów zależności  $U_H(I_P)$  przy stałej wartości  $I_C$ , sporządzić wykres  $U_H$  w funkcji  $I_P$  i dopasować prostą metodą regresji liniowej. Z otrzymanych współczynników dopasowanych linii prostych, korzystając z równania (3.3.7), obliczyć współczynnik Halla wraz z niepewnością pomiarową. Obliczyć gęstość nośników prądu i niepewność pomiarową tej wielkości.

## 3.4 Badanie charakterystyk tranzystora

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie charakterystyk tranzystora *npn* w układzie ze wspólnym emiternem *WE*.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- półprzewodniki, złącze p-n;
- budowa i zasada działania tranzystora;
- charakterystyki tranzystora w układzie *WE*;
- układy pracy tranzystora.

Literatura podstawowa: [2], [4], [19].

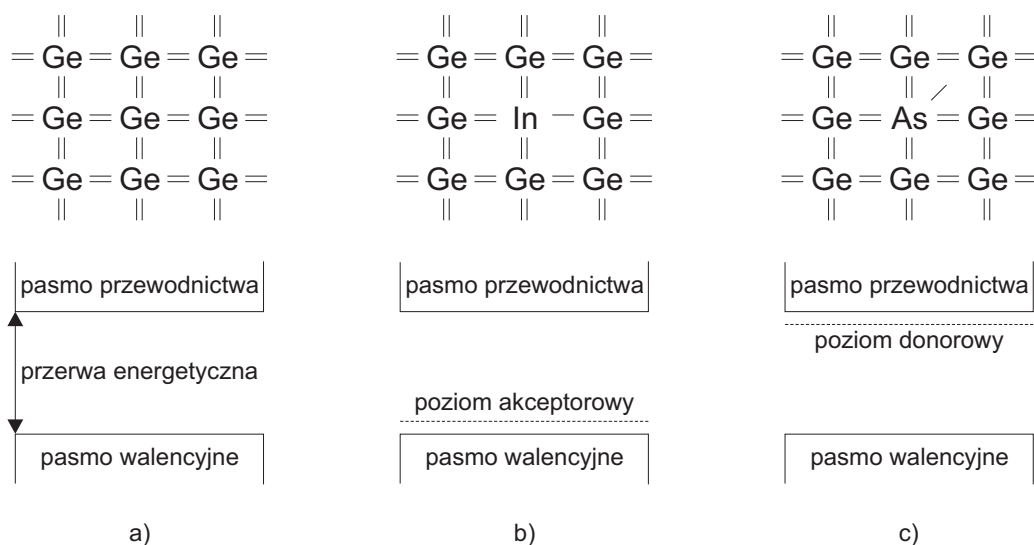
### 3.4.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Półprzewodniki

Półprzewodniki są to ciała stałe charakteryzujące się tym, że ich przewodność elektryczna rośnie w szerokim zakresie wraz z temperaturą i wykazuje wrażliwość na niezmiernie małe ilości niektórych domieszek. Grupa tych materiałów ze względu na przewodnictwo elektryczne znajduje się pomiędzy metalami a dielektrykami (izolatorami). Półprzewodniki czyste chemicznie nazywamy samoistnymi. Pierwiastki czwartej grupy układu okresowego, np. german i krzem są półprzewodnikami samoistnymi. Mają one

strukturę krystaliczną typu diamentu. Każdy atom otoczony jest czterema najbliższymi sąsiadami, a para elektronów - po jednym z dwu sąsiadujących atomów - wytwarza wiązanie kowalencyjne. Zjawiska zachodzące w metalach, półprzewodnikach i izolatorach tłumaczy się w sposób uproszczony za pomocą modelu pasmowego ciał stałych. Dokładny opis jest możliwy tylko na podstawie kwantowej teorii ciała stałego.

W półprzewodnikach samoistnych w temperaturze zera bezwzględne pasmo walencyjne jest całkowicie zapełnione, a pasmo przewodnictwa całkowicie puste (rysunek 3.4.1a). Oba pasma rozdziela przerwa energetyczna rzędu  $1\text{ eV}$ . Pod wpływem wzbudzeń termicznych, naświetlania lub przyłożenia silnego pola elektrycznego elektrony z pasma walencyjnego mogą uzyskać dodatkową energię, wystarczającą do przekroczenia przerwy. Stają się wtedy swobodnymi nośnikami prądu. Jednocześnie w paśmie walencyjnym pojawiają się stany nieobsadzone (dziury) po elektronach, które również mogą powodować przepływ prądu. Liczba dziur jest równa liczbie elektronów w paśmie przewodnictwa. W ten sposób półprzewodnik samoistny może przewodzić prąd elektryczny, który składa się z prądu elektronowego w paśmie przewodnictwa i prądu dziurowego w paśmie walencyjnym. Przez cały czas zachodzi rekombinacja, dzięki której elektrony z pasma przewodnictwa oddają nadmiar energii i zapełniają dziury w paśmie walencyjnym. W związku z tym definiuje się średni czas życia nośników prądu elektrycznego.



Rys. 3.4.1: Wiązania elektronowe w półprzewodniku samoistnym (a), typu p (b) oraz typu n (c). Przedstawione są także pasma walencyjne i przewodzenia oraz stany energetyczne akceptorowe i donorowe.

W półprzewodnikach domieszkowych istnieją domieszki pierwiastków z trzeciej lub piątej grupy układu okresowego. Jeżeli w sieci germanu zamiast jednego z jego atomów znajdzie się atom z trzeciej grupy (ind, bor), to jedno z wiązań atomu germanu

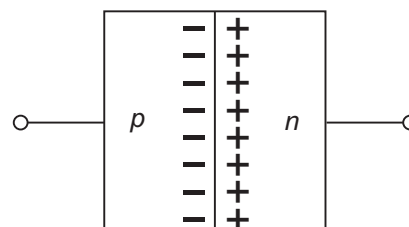
pozostanie niewyasycone, gdyż atom domieszki ma o jeden elektron mniej niż atom germanu (rysunek 3.4.1b). Wiązanie to może być uzupełnione dowolnym elektronem z innego atomu germanu. Ten nowy elektron zajmie wtedy stan zlokalizowany przy atomie domieszki, a jednocześnie pojawi się dziura w paśmie walencyjnym. Domieszki powodujące tego typu efekty nazywają się akceptorami, a półprzewodnik domieszkowy jest typu  $p$  (*positive*). Jeżeli w sieci germanu znajdzie się atom z piątej grupy (arsen, antymon), cztery z jego elektronów walencyjnych tworzą wiązania z sąsiednimi atomami germanu, a piąty jest bardzo słabo związany (rysunek 3.4.1c). Nieduża energia wystarczy, aby przenieść ten elektron do pasma przewodnictwa. Domieszki tego rodzaju nazywają się donorami, a półprzewodnik jest typu  $n$  (*negative*).

### Złącze $p$ - $n$

Złączeniem  $p$ - $n$  nazywamy granicę istniejącą w półprzewodniku między dwoma obszarami typu  $p$  i typu  $n$ . Można go utworzyć nawet z jednego półprzewodnika przez odpowiednie domieszkowanie.

W temperaturach wyższych od zera bezwzględnego znaczna część poziomów domieszkowych jest zjonizowana. W paśmie podstawowym części  $p$  istnieją więc dziury, a w paśmie przewodnictwa części  $n$  elektrony. Są to nośniki większościowe. W każdym półprzewodniku istnieją również nośniki mniejszościowe: elektrony w  $p$  i dziury w  $n$ . Liczba nośników mniejszościowych zależy jedynie od temperatury i szerokości pasma zabronionego i ustala się w wyniku równowagi dynamicznej między procesami tworzenia oraz rekombinacji nośników.

Na skutek zetknięcia obu części półprzewodnika zaczyna wyrównywać się stężenie nośników większościowych w każdym z pasm. W paśmie przewodnictwa elektrony płyną z  $n$  do  $p$ , a w paśmie walencyjnym dziury z  $p$  do  $n$ . Po stronie  $p$  pojawia się warstwa ładunku ujemnego, a po stronie  $n$  dodatniego (rysunek 3.4.2). Między tymi warstwami powstaje próg potencjału, przeciwdziałający dalszemu przechodzeniu tych nośników. Przechodzenie dziur z obszaru typu  $p$  do obszaru typu  $n$  oraz elektronów w kierunku odwrotnym, a więc do obszarów, w których stają się one nośnikami mniejszościowymi, nazywa się wstrzykiwaniem nośników.



Rys. 3.4.2: Złącze  $p$ - $n$ .

Jeżeli do półprzewodnika typu  $n$  przyłożymy dodatni (w stosunku do półprzewodnika typu  $p$ ) potencjał elektrostatyczny, to bariera potencjału w złączu powiększy się. Mówimy wtedy, że półprzewodnik został spolaryzowany w kierunku zaporowym. Prąd płynący przez złącze jest mały i ze wzrostem napięcia szybko osiąga nasycenie. Odmiennie zachowuje się złącze przy polaryzacji odwrotnej, gdy potencjał dodatni jest przyłożony do półprzewodnika typu  $p$ . Teraz bariera potencjału obniża się, co sprzy-

ja znacznemu (wykładniczemu) wzrostowi prądu wraz ze wzrostem napięcia. Mówimy wtedy, że półprzewodnik został spolaryzowany w kierunku przewodzenia.

### Tranzystory

Tranzystory są grupą elementów elektronicznych o regulowanym (sterowanym) przepływie ładunków elektrycznych. Ze względu na zasadę działania tranzystory dzieli się na dwie grupy: tranzystory bipolarne i tranzystory unipolarne (polowe). Tranzystorem bipolarnym nazywamy układ złożony z trzech warstw półprzewodnika, ułożonych w kolejności *pnp* lub *npn*. Poszczególne warstwy tranzystora nazywamy emiterym *E*, bazą *B* i kolektorem *K*.

Złącze *EB* polaryzujemy w kierunku przewodzenia, a złącze *BK* w kierunku zaporowym. W obszarze emitera prąd jest głównie przenoszony przez nośniki większościowe. Przechodzą one do bazy, gdzie jako nośniki mniejszościowe dyfundują do kolektora. Jeżeli grubość bazy jest dużo mniejsza niż średnia droga dyfuzji tych nośników, to prawie wszystkie nośniki wstrzykiwane z emitera do bazy osiągają kolektor. Tam znowu stają się nośnikami większościowymi, znacznie zwiększając płynący tam prąd wsteczny.

### Układy pracy tranzystora

Tranzystor może pracować w różnych układach połączeń, w których cechą charakterystyczną jest wspólna jedna z elektrod. Możliwa jest praca w układzie ze wspólnym emiterym *WE*, ze wspólną bazą *WB* oraz ze wspólnym kolektorem *WK*. Przydatność tranzystora do celów praktycznych określa się za pomocą parametrów, takich jak współczynnik wzmocnienia prądowego  $\beta$ , opór wejściowy  $r_{wej}$ , czy opór wyjściowy  $r_{wyj}$ :

$$\beta = \left( \frac{\partial I_K}{\partial I_B} \right)_{U_{KE}}, \quad (3.4.1)$$

$$r_{wej} = \left( \frac{\partial U_{BE}}{\partial I_B} \right)_{U_{KE}}, \quad (3.4.2)$$

$$r_{wyj} = \left( \frac{\partial U_{KE}}{\partial I_K} \right)_{I_B}. \quad (3.4.3)$$

### Charakterystyki tranzystora w układzie *WE*

Charakterystyki tranzystorów podają wzajemne zależności pomiędzy prądami przepływającymi przez tranzystor a napięciami występującymi między jego elektrodami. Dostarczają one wielu informacji dotyczących własności i możliwości zastosowania tych elementów półprzewodnikowych w układach elektronicznych. Wybrane charakterystyki tranzystora w układzie *WE*:

- charakterystyka wejściowa  $I_B = f(U_{BE})$  przy  $U_{KE} = const$  - krzywa jest charakterystyką diody utworzonej przez złącze *EB*. Z charakterystyki obliczamy parametr

- $r_{wej}$  dla określonego punktu (przedziału) pracy;
- charakterystyka przejściowa  $I_K = f(I_B)$  przy  $U_{KE} = const$  - zależność jest na całej długości prawie linią prostą, więc można przyjąć, że prąd kolektora  $I_K$  jest proporcjonalny do prądu bazy  $I_B$ . Z charakterystyki obliczamy parametr  $\beta$ ;
  - charakterystyka wyjściowa  $I_K = f(U_{KE})$  przy  $I_B = const$  - prąd  $I_K$  szybko osiąga swoją stałą wartość. Jest to spowodowane zjawiskiem nasycenia, gdyż powyżej pewnego napięcia  $U_{KE}$  wszystkie nośniki ładunku elektrycznego, pobudzone napięciem  $U_{KE}$ , biorą udział w tworzeniu prądu kolektora. Z charakterystyki obliczamy parametr  $r_{wyj}$  dla określonego punktu (przedziału) pracy.

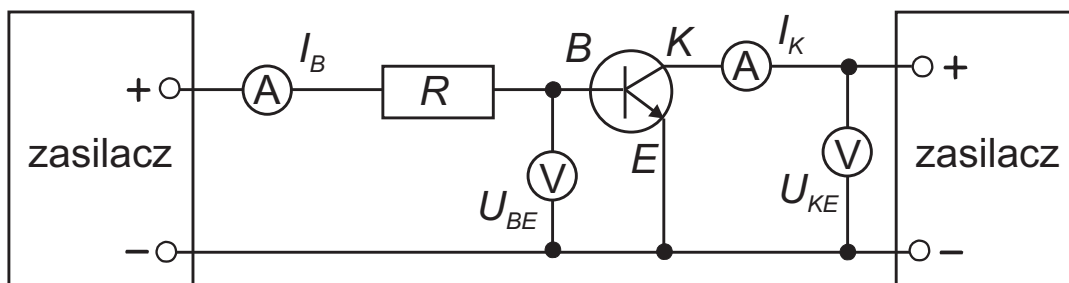
Typowe wartości parametrów tranzystorów pracujących w układzie WE wynoszą: rezystancja wejściowa 50-5000  $\Omega$ , rezystancja wyjściowa 10-500  $k\Omega$ , wzmocnienie prądowe 10-1000.

### 3.4.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Przyrządy: tranzystor krzemowy *npn*, dwa zasilacze, cztery mierniki uniwersalne, przewody, dodatkowy opór.

Schemat układu doświadczalnego w układzie wspólnego emitera przedstawiony jest na rysunku 3.4.3. Dodatkowy opornik  $R$  pozwala na lepsze sterowanie prądem bazy  $I_B$ . Należy również zdawać sobie sprawę z istniejących oporów wewnętrznych mierników uniwersalnych.



Rys. 3.4.3: Schemat układu doświadczalnego.

#### Przebieg doświadczenia

Zapoznać się z przyrządami i zmontować układ według schematu, a następnie sprawdzić układ przed jego włączeniem.

Zmierzyć jednocześnie charakterystykę wejściową i przejściową. W tym celu należy ustawić napięcie kolektor-emiter  $U_{EK}$  przykładowo na 3 V. Następnie wykonać pomiary prądów bazy  $I_B$  i kolektora  $I_K$  oraz kolejno ustawianych napięć  $U_{BE}$ . Aby otrzymać

prawidłową wartość oporu wejściowego  $r_{wej}$  należy wykonać pomiary gęściej w okolicy szybkiego wzrostu prądu bazy, tj. powyżej  $U_{BE} = 0.6 V$ . Zbadać wpływ dodatkowego oporu na układ.

Zmierzyć kilka charakterystyk wyjściowych. W tym celu ustawić prąd bazy  $I_B$  przykładowo na  $1 mA$ . Wykonać pomiary prądu kolektora  $I_k$  i kolejno ustawianych napięć  $U_{KE}$ . Ewentualne wahania  $I_B$  należy skorygować napięciem na zasilaczu po stronie bazy. Aby otrzymać prawidłową wartość oporu wyjściowego  $r_{wyj}$  należy wykonać pomiary większej ilości punktów w obszarze słabego wzrostu prądu kolektora  $I_K$ . Analogiczne pomiary wykonać dla innej wartości prądu bazy  $I_B$ , przykładowo dla  $0.5 mA$  lub  $1.5 mA$ .

### 3.4.3 Opracowanie wyników

Wykonać wykresy czterech charakterystyk tranzystora. Osie wykresów powinny być opisane wraz z jednostkami. Na wszystkich wykresach zaznaczyć obszary, które pozwolą wyznaczyć interesujące nas parametry.

Korzystając z regresji liniowej wyznaczyć: opór wejściowy (charakterystyka wejściowa), wzmocnienie prądowe (charakterystyka przejściowa) i dwie wartości oporu wyjściowego (z obu charakterystyk wyjściowych).

Obliczyć niepewności wyznaczonych parametrów. Otrzymane wartości porównać z wartościami podanymi w katalogu tranzystorów. Przeprowadzić dyskusję otrzymanych wyników.

## 3.5 Wyznaczanie stosunku $e/m$

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie stosunku ładunku  $e$  do masy  $m$  elektronu metodą badania odchylenia wiązki elektronów w poprzecznym polu magnetycznym.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- budowa i działanie lampy oscyloskopowej (źródła elektronów);
- ruch elektronu w polu elektrycznym, wyznaczanie prędkości elektronu;
- ruch elektronu w polu magnetycznym, wyznaczanie promienia krzywizny toru elektronu;
- natężenie pola magnetycznego wytwarzanego przez cewki Helmholtza-Gaugaina;
- rozszerzanie zakresu pomiarowego woltomierza. Przygotować obliczenia wartości oporu, który należy zastosować, aby zmienić zakres woltomierza z  $1000 V$  na  $3000 V$ , przy zadanym oporze wewnętrznym woltomierza.

Literatura podstawowa: [2].

### 3.5.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Wyznaczanie stosunku  $e/m$  elektronu, nazywanego też ładunkiem właściwym elektronu, sprowadza się do badania ruchu elektronu w polach elektrycznym  $\vec{E}$  i magnetycz-

nym  $\vec{B}$ . Znając kształt toru elektronu oraz wartości pól elektrycznego i magnetycznego, można wyznaczyć szukaną wartość.

Elektrony w lampie oscyloskopowej, w obszarze pomiędzy katodą i anodą są przyspieszane w jednorodnym polu elektrycznym. Różnica potencjałów  $U$  pomiędzy katodą i anodą powoduje zmianę energii kinetycznej elektronu o masie  $m$  i ładunku  $e$ :

$$eU = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.5.1)$$

gdzie  $v$  oznacza prędkość elektronu.

Poza anodą elektrony poruszają się ze stałą prędkością i są poddane działaniu pola magnetycznego o indukcji  $\vec{B}$  prostopadłego do wektora prędkości elektronu. Pole magnetyczne wytwarzane jest przez parę cewek Helmholtza-Gaugaina o promieniu  $R$ , umieszczonych we wzajemnej odległości  $L = R$ . Takie pole jest wystarczająco jednorodne i można założyć, że na elektron działa siła Lorentza o wartości  $F_B = evB$ . Działanie tej siły powoduje ruch elektronu po okręgu o promieniu:

$$r = \frac{mv}{eB}. \quad (3.5.2)$$

Z równań (3.5.1) i (3.5.2) wynika zależność:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{e}{m} \frac{B^2}{2U}. \quad (3.5.3)$$

Indukcja pola magnetycznego  $B$  między cewkami Helmholtza-Gaugaina jest równa (wyprowadzenie poniżej):

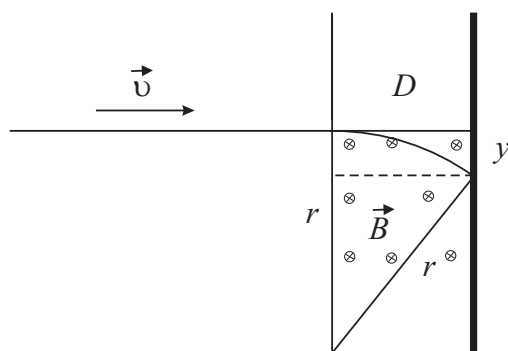
$$B = \frac{\mu_0 IN}{R(5/4)^{3/2}}, \quad (3.5.4)$$

gdzie  $\mu_0$  – przenikalność magnetyczna próżni,  $N$  – liczba zwojów w cewce,  $R$  – promień cewek Helmholtza-Gaugaina,  $I$  – natężenie prądu płynącego przez cewki.

Obszar, w którym na elektron działa jednorodne, prostopadłe do wektora prędkości  $\vec{v}$  pole magnetyczne ma szerokość  $D$ . Szerokość ta jest na tyle mała, że elektrony nie zakreślają pełnego okręgu, a na ekranie można mierzyć odchylenie położenia plamki  $y$  (ekran pokryty jest luminoforem) od punktu trafienia w ekran w przypadku nieobecności pola magnetycznego  $B$  (brak zakrzywienia toru, ruch po linii prostej). Jak widać z rysunku 3.5.1, wielkości  $D$ ,  $y$  i  $r$  związane są zależnością:

$$r = \frac{D^2 + y^2}{2y} \quad (3.5.5)$$

Przy zasilaniu cewek Helmholtza-Gaugaina prądem zmiennym, na ekranie lampy oscyloskopowej pojawi się linia ciągła o długości równej  $2y$ . Znając szerokość obszaru działania jednorodnego pola magnetycznego  $D$ , można obliczyć promień toru elektronu  $r$  korzystając z równania (3.5.5). Pomiar natężenia prądu  $I$  płynącego przez cewki i ich promienia  $R$  umożliwia obliczenie indukcji pola magnetycznego  $B$  – równa-



Rys. 3.5.1: Zakrzywienie toru elektronu w poprzecznym polu magnetycznym.

nie (3.5.4). Tak otrzymane dane dla ustalonego napięcia  $U$  pozwalają na znalezienie szukanej wartości  $e/m$  korzystając z równania (3.5.3).

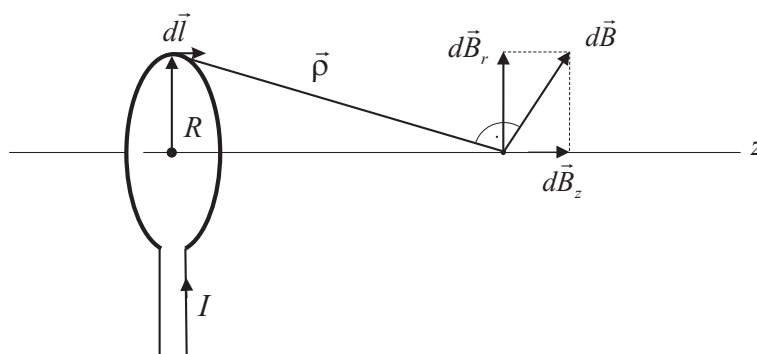
### Indukcja pola magnetycznego pary cewek Helmholtza-Gaugaina

Rozpatrzmy pętlę o promieniu  $R$ , przez którą płynie prąd o natężeniu  $I$ . Stosując prawo Biota-Savart'a :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{\rho}}{\rho^3} \quad (3.5.6)$$

można obliczyć przyczynkę do indukcji pola magnetycznego w odległości  $\rho$  od elementu pętli o długości  $d\vec{l}$  (rysunek 3.5.2). Wektor  $d\vec{l}$  jest prostopadły do wektora  $\vec{\rho}$  stąd:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho^2} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}}{R^2 + z^2}, \quad (3.5.7)$$



Rys. 3.5.2: Indukcja pola magnetycznego pochodzącego od pojedynczej pętli.



gdzie  $z$  jest odległością od pętli mierzoną wzdłuż jej osi. Wektor  $d\vec{B}$  można rozłożyć na dwie składowe prostopadłe  $d\vec{B}_z$  i  $d\vec{B}_r$ . Składowe  $d\vec{B}_z$  mają ten sam kierunek dla wszystkich elementów  $d\vec{l}$  wzdłuż pętli, co powoduje że poszczególne przyczynki dodają się. Natomiast składowe  $d\vec{B}_r$  pochodzące od elementów pętli znajdujących się po przeciwnych stronach odejmują się. W konsekwencji  $\vec{B}_r = 0$ , natomiast

$$\vec{B} = \vec{B}_z = \int d\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[ 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (3.5.8)$$

Dla dwóch cewek, po  $N$  zwojów każda, umieszczonych względem siebie w odległości  $d$  otrzymujemy więc:

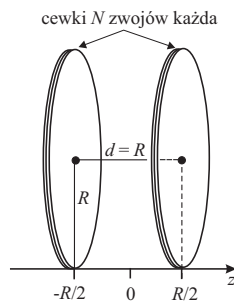
$$\vec{B}(z, r = 0) = \frac{\mu_0 I N}{2R} \left[ (1 + A_1^2)^{-3/2} + (1 + A_2^2)^{-3/2} \right] \quad (3.5.9)$$

gdzie:  $A_1 = \frac{z+d/2}{R}$ ,  $A_2 = \frac{z-d/2}{R}$ , punkt  $z = 0$  odpowiada środkowi układu cewek (rysunek 3.5.3).

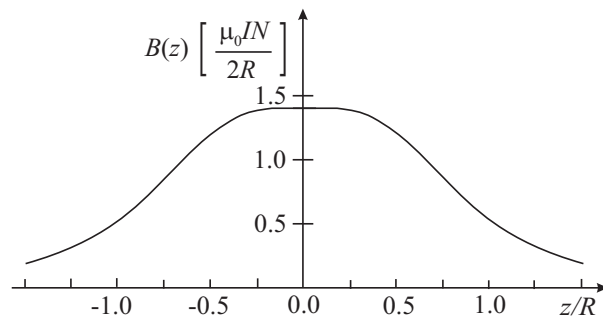
Dla  $z = 0$  i  $d = R$  indukcja pola magnetycznego osiąga maksimum wartości i wynosi

$$B(0, 0) = \frac{\mu_0 I N}{R (5/4)^{3/2}}. \quad (3.5.10)$$

Z analizy wyrażenia (3.5.9) dla  $d = R$  wynika, że pole  $B$  jest w dobrym przybliżeniu jednorodne w obszarze  $-R/2 < z < +R/2$  (rysunek 3.5.4). Dlatego używa się układu dwóch cewek ustawiając je we wzajemnej odległości równej ich promieniowi  $d = R$ .



Rys. 3.5.3: Układ cewek Helmholtza-Gaugaina.



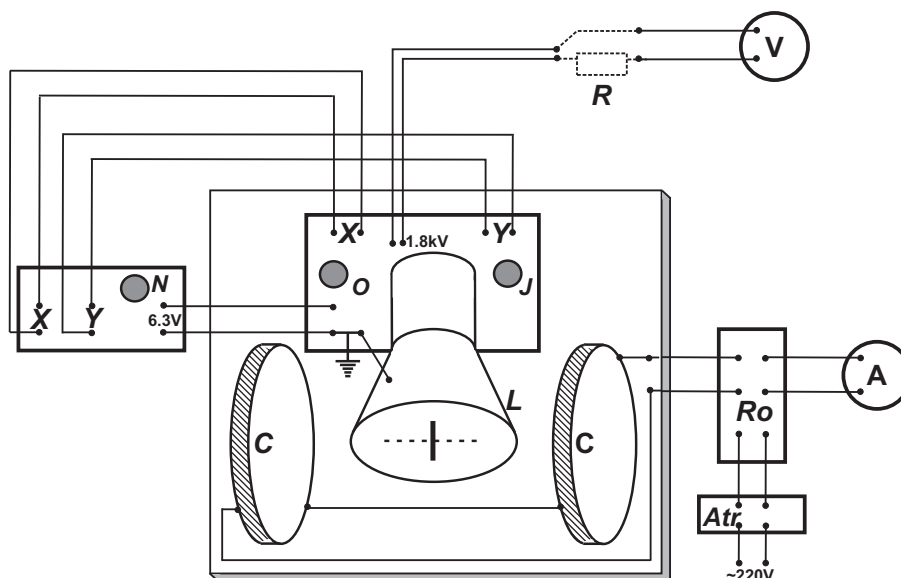
Rys. 3.5.4: Wykres zależności pola magnetycznego  $B(z)$  dla dwóch cewek umieszczonych w odległości równej ich promieniowi.

### 3.5.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Do wykonania tego doświadczenia służy układ pomiarowy, w którego skład wchodzi: lampa oscyloskopowa z układem zasilającym i skalą milimetrową na ekranie; pa-

ra cewek Helmholtza-Gaugaina (60 zwojów każda), między którymi wytwarzane jest jednorodne pole magnetyczne  $B$ ; autotransformator; amperomierz; woltomierz; opór (posobnik) wmontowany w rozdzielacz.



Rys. 3.5.5: Schemat aparatury pomiarowej:  $L$  – lampa oscyloskopowa,  $C$  – cewki Helmholtza-Gaugaina,  $X(Y)$  – odchylenie poziome (pionowe) wiązki elektronów,  $R$  – opór (posobnik),  $V$  – woltomierz,  $A$  – amperomierz,  $R_o$  – rozdzielacz,  $Atr$  – autotransformator,  $O$  – regulacja ostrości,  $J$  – regulacja jasności,  $N$  – regulacja napięcia anodowego.

Układ eksperymentalny przedstawiony jest na rysunku 3.5.5. Centralnym elementem układu jest lampa oscyloskopowa z zasilaczem. Odpowiednie bloki regulacyjne pozwalają na przesuwanie wiązki elektronów (plamki) na ekranie (odchylenie poziome  $X$  i pionowe  $Y$ ). Napięcie  $U$  pomiędzy katodą i anodą może być zmieniane potencjometrem  $N$ , a wartość napięcia jest mierzona za pomocą woltomierza napięcia stałego  $V$ , którego zakres rozszerzamy włączając szeregowo opornik  $R$  (posobnik). Jasność i ostrość plamki na ekranie można optymalizować używając odpowiednich regulatorów umieszczonych na płycie czołowej zasilacza lampy. Lampa oscyloskopowa znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym  $\vec{B}$  wytwarzanym pomiędzy cewkami Helmholtza-Gaugaina. Cewki połączone są szeregowo i zasilane prądem zmiennym (autotransformator  $Atr$ , rozdzielacz  $R_o$ ), którego natężenie mierzone jest amperomierzem prądu zmiennego  $A$ . Proszę pamiętać, że to jest pomiar natężenia skutecznego. Dla  $B \neq 0$  na ekranie widoczna jest linia, której długość odpowiada podwojonemu odchyleniu położenia plamki od położenia przy  $B = 0$  ( $2y$ ). Dopuszczalne natężenie prądu wynosi 0.7 A. Można przyjąć, że szerokość obszaru  $d$  na którym na elektron działa pole magnetyczne jest równa odległości anoda-ekran, która wynosi 24 cm.

### Przebieg doświadczenia

Sprawdzić opór wewnętrzny woltomierza i obliczyć wartość oporu (posobnika), który należy włączyć przy rozszerzaniu zakresu od 1000 V do 3000 V. Zanotować klasę przyrządu. Przy zerowym natężeniu prądu w cewkach ( $B = 0$ ) zmierzyć kilkakrotnie średnicę cewek  $2R$ .

Połączyć obwody według schematu układu pomiarowego przedstawionego na rysunku 3.5.5. Ustawić minimalne napięcie anodowe  $U$ , kiedy na ekranie pojawia się plamka, zoptymalizować jej jasność i ostrość. Za pomocą regulacji  $X$  i  $Y$  ustawić plamkę na środku skali.

Dla znanej wartości napięcia anodowego (przyspieszającego)  $U$ , mierzonego woltomierzem, wykonać pomiary wartości odchylenia plamki na ekranie ( $2y$ ) dla 10 wartości natężenia prądu  $I$  zasilającego cewki Helmholtza-Gaugaina. Pionowa linia, odpowiadająca wychyleniu plamki nie może wykraczać poza skalę.

Pomiary powtórzyć dla innych wartości napięcia przyspieszającego  $U$ . Przy zmianie napięcia należy ponownie ustawić ostrość i jasność plamki oraz położenie jej na środku skali.

### 3.5.3 Opracowanie wyników

Dla każdej wartości natężenia prądu  $I$ , obliczyć indukcję pola magnetycznego  $B$  pomiędzy cewkami Helmholtza-Gaugaina – równanie (3.5.3) oraz odpowiednie niepewności pomiarowe.

Dla każdej serii pomiarowej (ustalona wartość  $U$ ), metodą regresji liniowej dopasować prostą  $1/r^2 = \alpha B^2 + \beta$ . W granicach niepewności pomiarowych wyraz  $\beta$  powinien być równy zero. Dopasowana zależność opisywana jest przez równanie (3.5.3). Dlatego znając wartość współczynnika  $\alpha$  można obliczyć szukaną wartość  $e/m$  oraz jej niepewność pomiarową.

Obliczyć średnią ważoną wartości  $e/m$ , uzyskanych dla różnych napięć przyspieszających, wraz z jej niepewnością pomiarową i porównać z wartością tablicową.



# 4 Fale

## 4.1 Obsługa oscyloskopu

Bezpośrednim celem ćwiczenia jest zapoznanie się z działaniem i obsługą oscyloskopu tak, aby w przyszłości można było przy jego pomocy wykonywać pomiary. W tym celu należy przeprowadzić obserwację prostych, periodycznych przebiegów napięciowych oraz zmierzyć ich amplitudę i częstotliwość. Wykorzystując bardziej zaawansowane funkcje oscyloskopu można obserwować składanie sygnałów periodycznych czyli dudnienia i krzywe Lissajous.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- budowa i działanie lampy oscyloskopowej; zasada działania układu podstawy czasu, znajomość funkcji elementów regulacyjnych na płycie czołowej oscyloskopu;
- ruch harmoniczny; składanie ruchów harmonicznych: dudnienia, krzywe Lissajous.

Literatura podstawowa: [2], [5].

### 4.1.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Do czego służy oscyloskop?

Podstawową funkcją oscyloskopu jest wyświetlanie na ekranie zależności napięcia sygnału elektrycznego od czasu. W typowym zastosowaniu pozioma oś  $X$  reprezentuje czas  $t$ , a pionowa oś  $Y$  reprezentuje napięcie  $V$ . Większość oscyloskopów może pracować także w kilku innych trybach pracy.

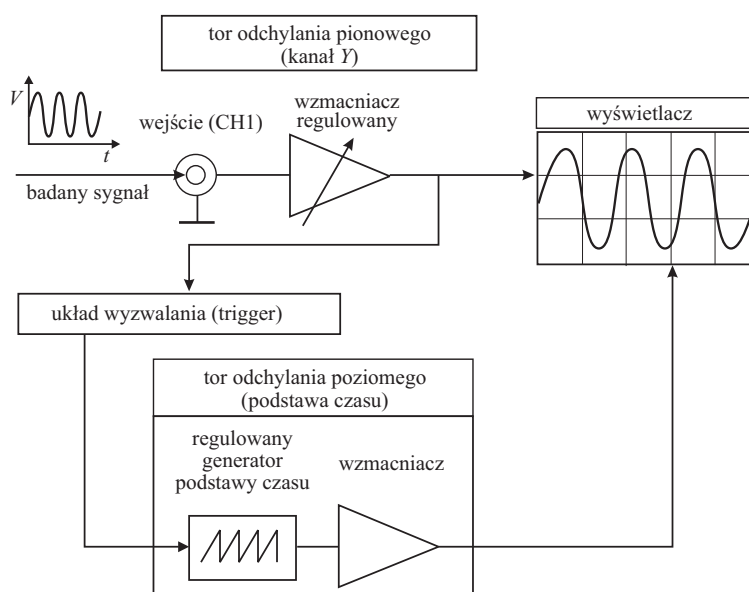
Oscyloskop jest jednym z podstawowych przyrządów diagnostycznych i pomiarowych. Można go spotkać nie tylko w laboratoriach badawczych fizyków, chemików czy biologów, ale także w szpitalach i przychodniach. Znajduje zastosowanie wszędzie tam, gdzie zachodzi potrzeba pomiaru czy kontroli przebiegu napięć elektrycznych w czasie. Dzięki istnieniu tzw. przetworników, czyli urządzeń przetwarzających mierzone wielkości fizyczne (np. ciśnienie czy temperaturę) na napięcie, zakres zastosowań oscyloskopu jest bardzo szeroki. Jest on podstawowym wyposażeniem większości laboratoriów.

#### Jak działa oscyloskop?

Oscyloskop składa się z czterech głównych bloków funkcyjnych:

- wyświetlacza;
- układów odchylenia pionowego – kanałów  $Y$  oznaczonych często jako CH1 oraz CH2 lub A oraz B (większość oscyloskopów ma dwa kanały wejściowe);
- układu odchylenia poziomego (tzw. podstawy czasu);
- układu wyzwalania (trigger) czyli synchronizacji podstawy czasu z obserwowanym sygnałem.

Schemat blokowy najprostszego oscyloskopu przedstawiony jest na rysunku 4.1.1.



Rys. 4.1.1: Schemat blokowy oscyloskopu.

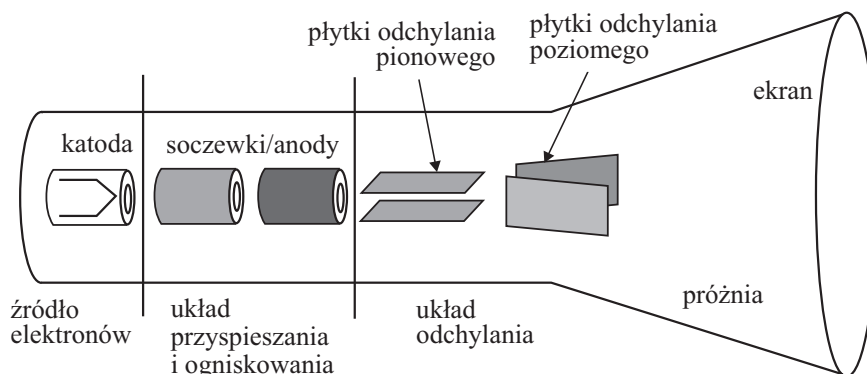
## Wyświetlacz

Podstawowym elementem oscyloskopu jest wyświetlacz, na którego ekranie możemy śledzić badany sygnał. Zadaniem wyświetlacza jest przedstawienie wykresu badanego napięcia w funkcji czasu –  $V(t)$ . Do niedawna najbardziej popularnym wyświetlaczem była lampa katodowa (CRT – Cathode Ray Tube) – podobna do lamp kineskopowych stosowanych w telewizorach czy ekranach monitorów. Obecnie często można spotkać oscyloskopy z ekranami ciekłokrystalicznymi (LCD – Liquid Cristal Display) lub półprzewodnikowymi.

Lampa elektronowa, schematycznie przedstawiona na rysunku 4.1.2, składa się z następujących podstawowych elementów:

- działka elektronowego, gdzie produkowana jest dobrze skolimowana wiązka elektronów skierowana w stronę ekranu wyświetlacza (zwykle przyspieszanych napięciem kilku lub kilkunastu  $kV$ );

- elektrod optyki elektrostatycznej, odchylających wiązkę elektronów we wzajemnie prostopadłych kierunkach  $X$  i  $Y$ , w zależności od napięcia doprowadzonego do tych elektrod. W najprostszym przypadku są to dwie, ustawione prostopadle pary równoległych do siebie metalowych płytek;
- ekranu pokrytego od wewnątrz warstwą luminoforu – substancji świecącej na skutek bombardowania elektronami.



Rys. 4.1.2: Schemat budowy lampy katodowej.

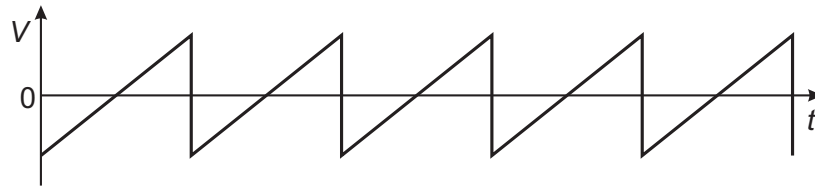
W tak zbudowanym wyświetlaczu wiązka elektronów zmienia swoje położenie na ekranie w zależności od wartości napięcia przyłożonego do elektrod odchylających, tworząc na nim odpowiedni ślad.

### Tor odchylenia pionowego

Podstawowym zadaniem toru odchylenia pionowego jest odpowiednie wzmocnienie lub osłabienie badanego sygnału poprzez odpowiedni dobór napięcia na płytkach odchylenia pionowego. Jest to realizowane przy pomocy regulowanego wzmacniacza kontrolowanego pokrętelem regulacji wzmocnienia  $V/div$ , określającym jaką wielkość napięcia wejściowego  $V$  powoduje wychylenie wiązki elektronów o jedną podziałkę  $div$  ekranu w pionie.

### Tor odchylenia poziomego (podstawy czasu)

Wyświetlenie zmian badanego napięcia w czasie realizowane jest przez układ podstawy czasu. W przypadku braku napięcia na elektrodach odchylenia poziomego wiązka elektronów zmienia swoje położenie tylko w pionie, w zależności od amplitudy badanego napięcia, w wyniku czego na ekranie będzie widoczna pionowa linia. Aby zobaczyć zmiany napięcia w czasie, na elektrody odchylenia poziomego doprowadzone jest cyklicznie napięcie liniowo narastające w czasie. Funkcję tę pełni tzw. generator podstawy czasu. Uproszczony przebieg napięcia wyjściowego z tego generatora jest przedstawiony na rysunku 4.1.3.



Rys. 4.1.3: Przebieg napięcia na wyjściu najprostszego generatora podstawy czasu.

Wiązka elektronów, pod wpływem napięcia z tego generatora przesuwa się cyklicznie po ekranie w kierunku poziomym. Ze względu na kształt sygnału z generatora podstawy czasu, wiązka przesuwa się z lewa na prawo stosunkowo wolno, natomiast wraca na początek bardzo szybko, by znowu rozpocząć jednostajny ruch po ekranie. Czas potrzebny na przesunięcie wiązki z lewa na prawo ustalany jest pokrętelem regulacji generatora i określany jest jako czas potrzebny na przejście jednej działki na ekranie  $time/div$ . Na ogół zastosowany jest tu również dodatkowo tzw. układ wygaszania plamki, wygaszający wiązkę elektronów w czasie powrotu, aby nie pozostawiała śladu na ekranie. W ten sposób na ekranie oscyloskopu realizowane jest wyświetlanie badanego napięcia w funkcji czasu -  $V(t)$ .

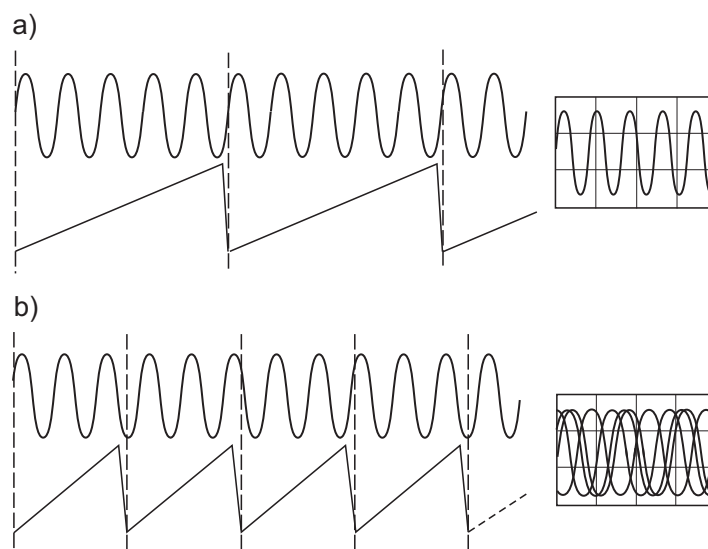
### Układ wyzwalania (trigger)

Ten bardzo ważny układ służy do synchronizacji przebiegów generatora podstawy czasu ze zmianami badanego napięcia. Załóżmy, iż przedmiotem pomiarów jest napięcie zmienne sinusoidalnie o okresie  $T_B$ . Niech okres przebiegów z generatora podstawy czasu wynosi  $T_P$ . Jeżeli  $T_P$  jest całkowitą wielokrotnością  $T_B$  to obraz otrzymany na ekranie oscyloskopu będzie stabilny, gdyż w czasie każdego kolejnego przebiegu „plamki” po ekranie będziemy widzieć zawsze całkowitą ilość okresów badanego napięcia (zaniedbujemy tu w rozważaniach czas potrzebny na powrót wiązki). Opisana sytuacja jest bardzo wyjątkowa. Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony, obraz na ekranie będzie niestabilny, gdyż początki kolejnych poziomych przebiegów plamki na ekranie będą skorelowane z różnymi fazami badanego sygnału. Schematycznie przedstawia to rysunek 4.1.4.

Efektom takiego rozsynchronizowania będzie tzw. płynięcie obrazu i jego niestabilność. Aby temu zaradzić, generator podstawy czasu pracuje zwykle w innym trybie, gdzie kolejne generowane przebiegi (pojedyncze impulsy trójkątne) nie następują jeden po drugim w sposób ciągły lecz są wyzwalane tylko wtedy, gdy napięcie badanego sygnału przekroczy pewien poziom (ustalany przez pokrętko LEVEL i często wyświetlany na ekranie w postaci kursora). Ustalane jest również, przy pomocy odpowiedniego przełącznika, w którym kierunku następuje przekroczenie tego poziomu, tzn. czy wyzwolenie ma zajść, gdy sygnał jest opadający czy też rosnący.

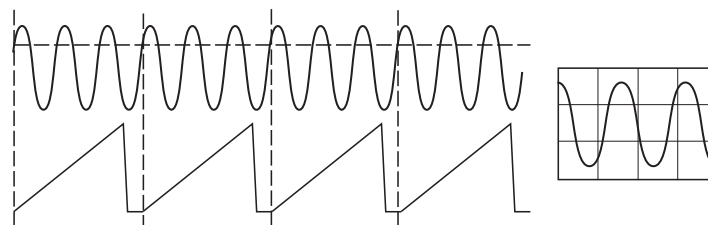
Taki tryb pracy zapewnia, iż generator podstawy czasu powoduje poziomy przebieg plamki zawsze w tej samej fazie badanego zmiennego przebiegu. Obraz jest stabilny





Rys. 4.1.4: Sygnały wejściowe (o okresie  $T_B$ ) oraz sygnały generatora podstawy czasu (o okresie  $T_P$ ) dla całkowitego (a) i niecałkowitego (b) stosunku okresów obu sygnałów. Po prawej stronie pokazane są obrazy uzyskiwane na ekranie oscyloskopu dla tych stosunków.

bez względu na wzajemną relację pomiędzy  $T_P$  i  $T_B$ . Obrazuje to rysunek 4.1.5. Odcinki o stałym napięciu występujące po kolejnych impulsach trójkątnych powodują opóźnienie wyzwalań (HOLD OFF), aż do czasu osiągnięcia poziomu wyzwalań.



Rys. 4.1.5: Idea tzw. wyzwalanej podstawy czasu. Poziomą linią przerywaną zaznaczony jest poziom (napięcia) wyzwalań. Dopiero w momencie gdy jest on osiągnięty, wyzwala jest kolejny impuls trójkątny sygnału podstawy czasu.

Istnieją dwa podstawowe tryby pracy generatora podstawy czasu: tryb automatyczny AT oraz normalny NM. W trybie wyzwalań AT generator podstawy czasu wysyła po określonym czasie (dłuższym jednak niż pewien minimalny czas oczekiwania) kolejny impuls trójkątny nawet wtedy, kiedy poziom wyzwalań nie będzie osiągnięty. Ponieważ w trybie automatycznym generator podstawy czasu pracuje samoczynnie, na ekranie widoczna jest linia bazowa (ślad podstawy czasu), gdy sygnał nie jest podany na wejście. Tryb wyzwalań automatycznego jest zalecany do stosowania przy

wszystkich prostych pomiarach, a także jako ustawienie wstępne przy skomplikowanych zadaniach pomiarowych. W trybie NM kolejny impuls trójkątny zostanie wysłany tylko wtedy, gdy poziom wyzwania zostanie osiągnięty. Tryb NM jest bardziej przydatny do obserwacji skomplikowanych przebiegów. Jeżeli okazuje się, że dla sygnału o bardzo złożonym kształcie nie można znaleźć punktu wyzwania, to stabilny obraz często można uzyskać wykorzystując funkcję regulacji czasu podtrzymania HOLD OFF. Funkcja ta jest szczególnie przydatna w przypadku obserwacji sygnałów zawierających impulsy synchronizacji, ciągi impulsów aperiodycznych o tej samej amplitudzie lub zniekształcenia w okolicach punktu wyzwania.

### Tryby pracy oscyloskopu

Oprócz opisanego jednokanałowego trybu pracy oscyloskopu  $V(t)$ , tj. obserwacji pojedynczego przebiegu, istnieją jeszcze dwa podstawowe i często wykorzystywane tryby pracy: tryby pracy dwukanałowej  $V(t)$  oraz tryb pracy  $X - Y$ . W tych przypadkach wykorzystywany jest dodatkowo drugi kanał oscyloskopu.

### Tryby pracy dwukanałowej $V(t)$

Większość oscyloskopów pozwala na jednoczesną obserwację, porównywanie oraz dodawanie lub odejmowanie dwóch niezależnych sygnałów podawanych na kanały 1 i 2. W trybie pracy DUAL na ekranie wyświetlane są jednocześnie dwa przebiegi, przy czym podstawa czasu pracuje z przemiennym (ALT) lub siekanym (CHOP) przełączaniem kanałów. W trybie przemiennym w ciągu kolejnych okresów sygnału podstawy czasu obserwowane są naprzemiennie sygnały z pierwszego i drugiego kanału. Przy pracy siekanej, w czasie jednego cyklu podstawy czasu, kanały są w sposób ciągły przełączane z dużą częstotliwością, co powoduje, że sygnały o częstotliwościach poniżej 1 kHz są wyświetlane bez zjawiska migotania.

Podczas pracy dwukanałowej źródłem sygnału wyzwalającego może być kanał 1 lub 2, przy czym przełączania dokonuje się używając przycisku TRIG. Przy pomocy tego przycisku można też włączyć wyzwalanie przemiennie sygnałami obu kanałów.

W trybie ADD przebiegi wejściowe obu kanałów są sumowane i wynik tej operacji jest wyświetlany w postaci jednego śladu. Odejmowanie sygnałów realizowane jest przez jednoczesne odwracanie sygnału podawanego na kanał 2 (przycisk INV).

### Tryb pracy $X - Y$

Oscyloskop może również pracować w tzw. trybie  $X - Y$ . Generator sygnału podstawy czasu nie jest wtedy używany, a na kanał 2 podaje się drugi sygnał wejściowy. Praca w trybie  $X - Y$  pozwala między innymi na obserwację krzywych Lissajous.

## Obsługa oscyloskopu

Niedawno, rzucającą się w oczy cechą charakterystyczną oscyloskopów była bardzo duża ilość pokręteł i przełączników kontrolnych znajdujących się na płycie czołowej. Obecnie, przy coraz powszechniejszym wprowadzaniu układów kontroli elektronicznej, płyty czołowe oscyloskopów mają mniej elementów kontroli dzięki możliwości przełączania pełnionych przez nie w danej chwili funkcji. Zwykle metoda przełączania jest opisana bezpośrednio na płycie czołowej (proszę zwrócić uwagę na symbole PUSH LONG, PUSH BOTH).

Zasady obsługi są zazwyczaj proste. W nowszych typach oscyloskopów przyciski reagują na krótkie lub długie naciśnięcie oraz na kombinację dwóch przycisków. Ustawienia parametrów są sygnalizowane przez diody LED umieszczone na płycie czołowej lub wyświetlane wprost na ekranie. Niezależnie od tego jak skomplikowany jest oscyloskop, z którym mamy do czynienia, pierwszym naszym zadaniem jest zidentyfikowanie poznanych powyżej jego podstawowych bloków funkcyjnych wraz z elementami kontrolnymi. Producenci oscyloskopów starają się na ogół w logiczny sposób zgrupować wszystkie pokręta i przełączniki kontrolujące dany blok funkcyjny oscyloskopu w jednym miejscu i dodatkowo wyróżnić je graficznie. Większość oscyloskopów ma wszystkie pokręta i przełączniki opisane skrótami pochodzącymi od angielskich nazw funkcji jakie pełnią. Poniżej będą więc używane angielskie nazwy najczęściej występujących funkcji.

Na pewno najłatwiejszy do znalezienia jest wyświetlacz z towarzyszącą mu grupą kontrolnych pokręteł, służących do regulacji optyki wiązki elektronów z działka lampy elektronowej. Najczęściej będzie to intensywność (jasność) oraz focus (ogniskowanie). Na ekranie wyświetlacza znajduje się podziałka umożliwiająca przeprowadzanie pomiarów oraz wyświetlane są podstawowe parametry pracy takie, jak wzmocnienie kanałów odchylenia pionowego lub częstotliwość generatora podstawy czasu.

Następnie należy znaleźć tor odchylenia pionowego. Najczęściej oscyloskopy mają dwa niezależne takie tory, umożliwiające obserwację dwóch przebiegów naraz, oznaczone na ogół CH1 (channel 1) oraz CH2 (channel 2). Wzmocnienie wzmacniacza każdego z torów jest kontrolowane przez niezależne przełączniki (obrotowe), których ustawienie określa, jaka wartość badanego napięcia powoduje wychylenie plamki na ekranie o jedną działkę (co jest oznaczone jako:  $V/div$ ,  $mV/div$ ,  $\mu V/div$ ). Przesuwanie obrazu w pionie jest realizowane poprzez pokrętkę Y-POS.

Znalezienie układu odchylenia poziomego, czyli generatora podstawy czasu też nie powinno sprawić problemów. Wszystkie kontrolne przełączniki będą skupione tu wokół obrotowego przełącznika oznaczonego TIME BASE lub TIME (podstawa czasu), którego poszczególne położenia wyskalowane są w  $s/div$  i wyznaczają czas, jaki zajmuje plamce na wyświetlaczu przebycie jednej podziałki w kierunku poziomym. Przesunięcie obrazu w poziomie jest realizowane poprzez pokrętkę X-POS.

Wreszcie, przełączniki trybu wyzwalania będą na ogół tworzyć osobną grupę na płycie czołowej, oznaczoną jako TRIG (od trigger).

### Dobieranie parametrów pracy

Bardzo pomocna w obsłudze oscyloskopu jest funkcja autoregulacji AUTO SET. Krótkie naciśnięcie przycisku AUTO SET powoduje przełączenie oscyloskopu do pracy w ostatnio używanym trybie odchylenia pionowego. Jednocześnie funkcja ta ustawia standardowe parametry umożliwiające obserwację i pomiar większości nieskomplikowanych przebiegów. Proszę zaobserwować, jakie parametry są wtedy ustawiane. Po podłączeniu nieznanego sygnału, użycie tego przycisku znacznie skraca czas potrzebny do uzyskania stabilnego obrazu. Niestety, starsze typy oscyloskopów nie posiadają tej funkcji. Dodatkowo, w przypadku nieco bardziej skomplikowanych sygnałów AUTO SET nie musi doprowadzić do uzyskania stabilnego obrazu. Dlatego też (oraz w celu nabrania wprawy) nie należy go nadużywać i spróbować ustawiać parametry ręcznie.

### Przeprowadzanie pomiarów przy użyciu oscyloskopu

#### *Pomiary amplitudy*

W zastosowaniach technicznych podstawowym parametrem sygnałów prądu przemiennego jest wartość skuteczna napięcia, jednakże w technice pomiarów oscyloskopowych do wyznaczenia wartości bezwzględnej i zależności napięciowych sygnałów zmiennych wykorzystywana jest międzyszczytowa wartość napięcia (na oscyloskopie odległość między maksimum i minimum sygnału). Aby uzyskać wartość skuteczną napięcia należy wartość międzyszczytową podzielić przez współczynnik  $\sqrt{2}$ . Regulacji amplitudy sygnału dokonuje się potencjometrami VOLTS/DIV.

Współczynniki wzmocnienia odchylenia pionowego (czułość wejściowa) kanałów wyrażane są w  $mV/div$  lub  $V/div$ , przy czym wielkości napięcia dotyczą jego wartości międzyszczytowej. Aby uzyskać wartość zmierzonego napięcia w voltach należy pomnożyć wartość napięcia wyrażoną w ilości działek przez współczynnik wzmocnienia odchylenia pionowego podawany na ekranie oscyloskopu:

$$HD = U, \quad (4.1.1)$$

gdzie  $U$  - wartość mierzonego napięcia wyrażona w voltach,  $D$  - współczynnik wzmocnienia odchylenia pionowego w  $V/div$ ,  $H$  - wysokość przebiegu na ekranie w działkach.

#### *Pomiary czasu i częstotliwości*

Większość sygnałów obserwowanych na ekranie oscyloskopu (szczególnie w I Pracowni Fizycznej) ma charakter okresowy. Zależnie od ustawienia współczynnika podstawy czasu (odchylenia poziomego) za pomocą regulatora TIME/DIV na ekranie może być zobrazowany jeden lub więcej okresów mierzonego sygnału.

Wartości współczynnika podstawy czasu podawane są w  $s/div$ ,  $ms/div$ ,  $\mu s/div$ . Pomiar wybranego odcinka czasowego polega na odczycie z ekranu odpowiadającej mu odległości w działkach wzdłuż poziomej osi współrzędnych i pomnożeniu jej przez kalibrowaną wartość współczynnika wzmocnienia podstawy czasu:

$$T = LT_C, \quad (4.1.2)$$

gdzie  $T$  - okres obserwowanego przebiegu w sekundach,  $L$  - odczytana długość okresu w działkach,  $T_C$  - współczynnik wzmocnienia podstawy czasu w  $s/div$ .

Jeżeli mierzony odcinek czasu jest krótki w stosunku do okresu przebiegu, to jego pomiar powinien być przeprowadzony po 10-krotnym zmniejszeniu podstawy czasu za pomocą funkcji X-MAG.x10. W takim przypadku zmierzona wartość czasu musi być podzielona przez 10.

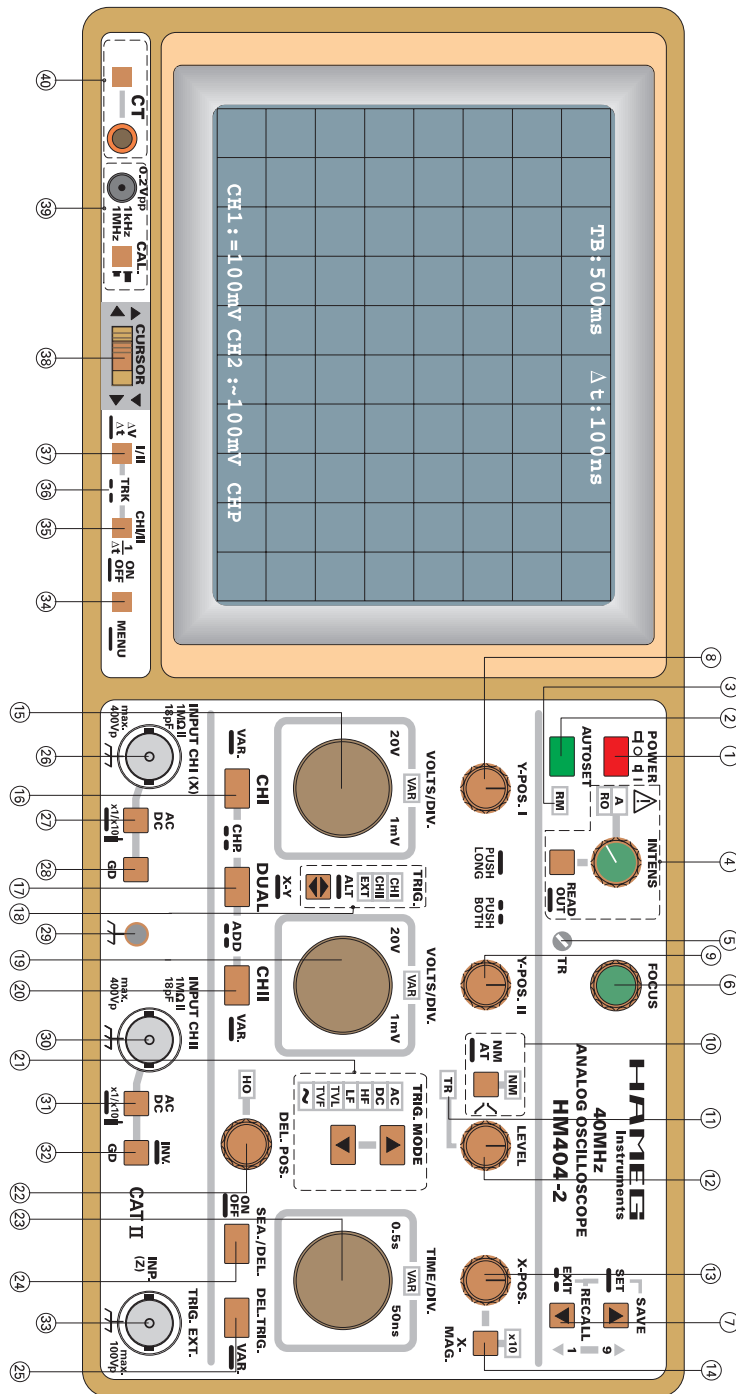
Pomiary na oscyloskopie można przeprowadzić tylko w przypadku, gdy współczynniki wzmocnienia sygnałów wejściowych oraz generatora podstawy czasu są kalibrowane (napis VAR nad pokrętkami VOLTS/DIV oraz TIME/DIV nie jest podświetlony).

#### **Użycie kursorów**

W nowszych typach oscyloskopów pomiary amplitudy i częstotliwości można przeprowadzić przy pomocy kursorów (sterowanych przyciskami znajdującymi się zwykle bezpośrednio pod ekranem), które można ustawiać ręcznie lub automatycznie. Mierzona wielkość wyświetlana jest wtedy automatycznie na ekranie w odpowiednich jednostkach.

#### **Płyta czołowa oscyloskopu Hameg HM404**

1. POWER – przycisk włączania zasilania.
2. AUTO SET – przycisk funkcji autoregulacji.
3. RM – dioda wskazująca czy zdalne sterowanie przez interfejs szeregowy RS232 jest włączone.
4. INTENS/READ OUT – potencjometr regulacji jasności obserwowanego przebiegu oraz dodatkowych wskaźników. Wyświetlanie dodatkowych wskaźników można włączać i wyłączać poprzez przytrzymanie przycisku READ OUT.
5. TR – potencjometr korekcji równoległości śladu.
6. FOCUS – potencjometr regulacji ostrości obrazu.
7. SAVE/RECALL – przycisk wywoływania i zapisywania pamięci, w których przechowywane są ustawienia oscyloskopu. Oscyloskop wyposażono w pamięć, w której w momencie wyłączenia zasilania zapisywane są aktualne ustawienia przyrządu. Pamięć może być również wykorzystywana przez użytkownika do zapamiętania (do 9) różnych ustawień urządzenia, które w każdej chwili można odtworzyć przyciskiem SAVE/RECALL.
8. Y-POS. I – potencjometr regulacji położenia przebiegu kanału 1 w pionie.
9. Y-POS. II – potencjometr regulacji położenia przebiegu kanału 2 w pionie.
10. NM-AT – przełącznik zmiany wyzwiania automatycznego na normalne i vice versa.
11. TR – dioda stanu wyzwiania.
12. LEVEL – potencjometr regulacji poziomu wyzwiania.
13. X-POS. – potencjometr regulacji położenia przebiegu wzdłuż osi poziomej.



Rys. 4.1.6: Płyta czołowa oscyloskopu Hameg HM404.

14. X-MAG. x10 – przycisk włączania 10-krotnego rozciągnięcia przebiegu na osi poziomej.
15. VOLTS/DIV. – potencjometr czułości wejściowej wzmacniacza odchylenia pionowego w  $mV/div$  lub w  $V/div$  dla kanału 1.
16. CH I – przycisk wyboru kanału 1.
17. DUAL-XY – przycisk wyboru trybu pracy oscyloskopu.
18. TRIG. – przycisk wyboru źródła wyzwania:
  - CH1 – wyzwalać sygnałem z kanału 1.
  - CH2 – wyzwalać sygnałem z kanału 2.
  - ALT – Wyzwalanie przemienne z kanału 1 i 2. W trybie wyzwania przemiennego możliwe jest wyzwalać podstawy czasu sygnałami o różnych częstotliwościach (asynchronicznymi) w kanałach 1 i 2. W takim przypadku układ odchylenia musi pracować w trybie DUAL z przemiennym przełączaniem kanałów (ALT) i wyzwaniem wewnętrznym. Aby uniknąć problemów z synchronizacją zalecane jest ustawienie sprzężenia AC.
  - EXT – wyzwalać sygnałem zewnętrznym (np. z osobnego generatora). Kształt zewnętrznego sygnału wyzwalającego może całkowicie się różnić od kształtu badanego napięcia, ale oba te sygnały muszą być synchroniczne. Przebieg sygnału zewnętrznego wyzwalać podajemy na gniazdo TRIG. EXT.
19. VOLTS/DIV. – potencjometr czułości wejściowej wzmacniacza odchylenia pionowego w  $mV/div$  lub w  $V/div$  dla kanału 2.
20. CH II – przycisk wyboru kanału 2.
21. TRIG. MODE – przyciski wyboru trybów sprzężenia wyzwania.
  - AC – najczęściej używana opcja wyzwania. Składowa stała oraz niskie częstotliwości sygnału wyzwalającego (sygnału wejściowego) są odcinane.
  - DC, HF, LF, TFL, TFF, LINE – inne opcje, rzadko stosowane w trakcie obserwacji prostych przebiegów.
22. DEL.POS. – HO – pokrętko płynnej regulacji czasu podtrzymania między kolejnymi impulsami podstawy czasu. Dalej używana nazwa HOLD OFF. Funkcja ta jest szczególnie przydatna w przypadku obserwacji sygnałów zawierających impulsy synchronizacji, ciągi impulsów aperiodycznych o tej samej amplitudzie lub zniekształcenia w okolicach punktu wyzwania.
23. TIME/DIV. – potencjometr do wyboru kalibrowanej wartości współczynnika podstawy czasu w zakresie  $0.5 s/div$  do  $50 ns/div$ .
24. SEA./DEL. – przycisk opóźnionej podstawy czasu i wyzwania z opóźnieniem.
25. DEL.TRIG. – przycisk kalibracji generatora podstawy czasu / przycisk przełączenia na wyzwalać z opóźnieniem.
26. INPUT CH I (X) – wejście sygnału kanału 1.
27. AC/DC – przełącznik rodzaju sprzężenia sygnału wejściowego kanału 1.
28. GD – przycisk pozwalający na odłączanie sygnału wejściowego w kanale 1.

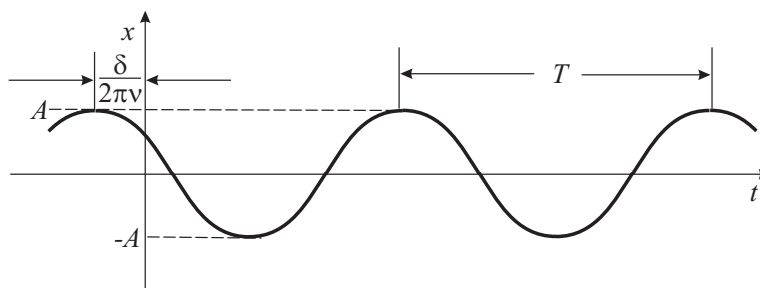
29. Ground Socket – gniazdo bananowe do uziemienia oscyloskopu.
30. INPUT CH II – wejście sygnału kanału 2.
31. AC/DC – przełącznik rodzaju sprzężenia sygnału wejściowego kanału 2.
32. GD – INV – przycisk pozwalający na odłączanie sygnału wejściowego i odwracanie fazy przebiegu w kanale 2.
33. TRIG. EXT./INPUT (Z) – wejście sygnału wyzwalania zewnętrznego.
34. MENU – przycisk wywołania menu kalibracji oscyloskopu.
35. ON/OFF - CHI/II -  $1/\Delta t$  – przycisk wyświetlania na ekranie linii kursorów. Dłuższe przytrzymanie przycisku włącza i wyłącza linie kursorów, krótkie naciśnięcie przełącza pomiar wysokości sygnału pomiędzy kanałami lub zmienia pomiędzy pomiarem czasu i częstotści.
36. TRK – jednoczesne naciśnięcie przycisków ON/OFF - CHI/II -  $1/\Delta t$  oraz I/II -  $\Delta V/\Delta t$  przełącza pomiędzy trybem pojedynczych niezależnych linii kursora i dwóch sprzężonych ze sobą linii kursorów.
37. I/II -  $\Delta V/\Delta t$  – przełącznik aktywujący kolejno kursory oraz zmieniający (dłuższe przytrzymanie) pomiędzy pomiarem czasu i wysokości sygnału.
38. CURSOR – przyciski sterowania liniami kursorów.
39. CAL – przycisk i gniazdo służące do kalibracji przyrządu.
40. CT – przycisk i gniazdo służące do testowania komponentów oscyloskopu.

### Ruch harmoniczny prosty

Ruch, w którym wychylenie  $x$  z położenia równowagi zmienia się zgodnie z relacją:

$$x = A \cos(2\pi\nu t + \delta) = A \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right) \quad (4.1.3)$$

nazywany jest ruchem harmonicznym prostym, gdzie:  $A$  – amplituda, czyli maksymalna wartość  $x$ ,  $\nu$  – częstotliwość (wyrażana w  $Hz$ ),  $T$  – okres (mierzony w  $s$ ),  $\delta$  – faza początkowa określająca wychylenie  $x$  w chwili  $t = 0$  (patrz rysunek 4.1.7).



Rys. 4.1.7: Zależność wychylenia od czasu w ruchu harmonicznym prostym.



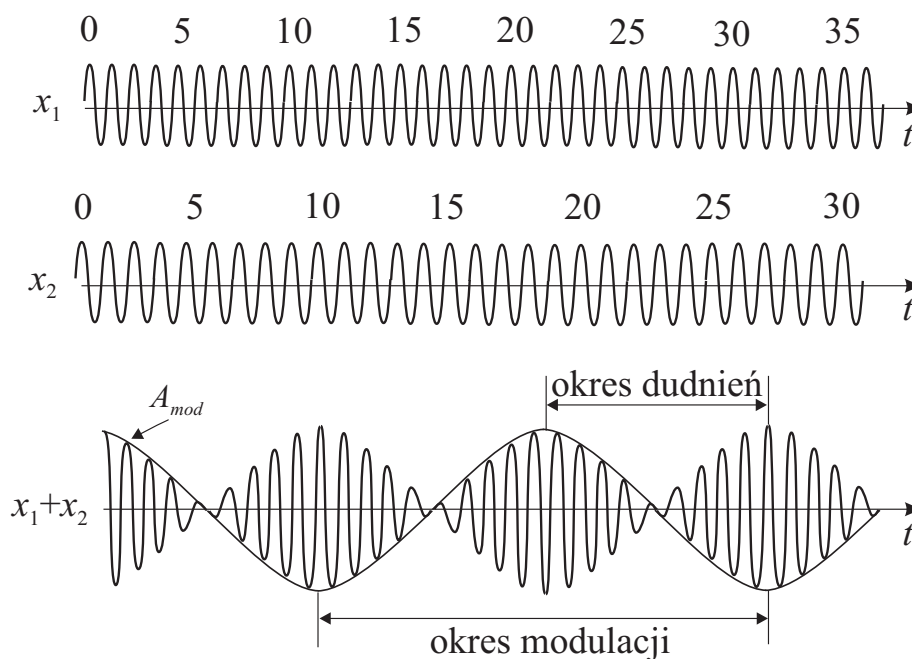
## Składanie ruchów harmoniczných

### Dudnienia

Dodawanie dwóch drgań harmoniczných odbywających się wzdłuż tego samego kierunku i posiadających zbliżone wartości częstotliwości prowadzi do wypadkowego ruchu zwanego dudnieniem. Zakładając dla uproszczenia, że amplitudy obu drgań są równe, a ich fazy początkowe są równe zero, dudnienie opisane jest równaniem:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos 2\pi\nu_1 t + A \cos 2\pi\nu_2 t = 2A \cos \left( 2\pi \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} t \right) \cos \left( 2\pi \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t \right) = \\ &= [2A \cos 2\pi\nu_{mod} t] \cos 2\pi\nu_{sr} t = A_{mod} \cos 2\pi\nu_{sr} t \quad (4.1.4) \end{aligned}$$

Taki ruch można interpretować jako oscylacje o częstotliwości  $\nu_{sr}$  i amplitudzie  $A_{mod}$  zmieniającej się w czasie z częstotliwością  $\nu_{mod}$ . Gdy częstotliwości  $\nu_1$  i  $\nu_2$  są zbliżone, wtedy częstotliwość modulacji jest mała w porównaniu z częstotliwością średnią, więc amplituda  $A_{mod}(t)$  zmienia się nieznacznie w czasie wielu szybkich oscylacji  $\cos(2\pi\nu_{sr}t)$ . Rysunek 4.1.8 przedstawia zależności pomiędzy częstotliwościami w dudnieniach. Widać, że okres dudnień jest dwa razy mniejszy od okresu modulacji amplitudy, a stąd częstotliwość dudnień jest równa podwojonej częstotliwości modulacji amplitudy, czyli  $\nu_{dudnienia} = \nu_1 - \nu_2$ . Częstotliwość  $\nu_{sr}$  jest nazywana częstotliwością drgań wewnętrznych.



Rys. 4.1.8: Dudnienia powstające w wyniku złożenia dwóch przebiegów harmoniczných.

**Krzywe Lissajous**

Dodawanie dwóch drgań harmoniczych zachodzących w kierunkach wzajemnie prostopadłych, mających postać:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(2\pi\nu_1 t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T_1}\right) \\ y &= B \cos(2\pi\nu_2 t + \delta) = B \cos\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \delta\right), \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

przy założeniu, że stosunek częstości  $\nu_1/\nu_2$  jest liczbą wymierną, prowadzi do powstania drgania wypadkowego tworzącego tzw. krzywą Lissajous. Kształt krzywej zależy od stosunku częstotliwości drgań składowych i od fazy początkowej  $\delta$ . Ze względu na to, że okresem krzywej Lissajous jest czas, po którym obie współrzędne przyjmują wartości początkowe, to spełniona jest zależność:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{n_y}{n_x}, \quad (4.1.6)$$

gdzie  $n_x$  i  $n_y$  są liczbami całkowitymi równymi liczbie przecięć krzywej Lissajous odpowiednio z osiami  $X$  i  $Y$ . Badając kształt krzywej i stosunek liczby jej przecięć z osiami  $X$  i  $Y$  oraz wartość częstości jednego drgania składowego, można znaleźć częstość drugiego drgania harmonicznego. Przykłady różnych krzywych Lissajous podaje rysunek 4.1.9.

**4.1.2 Przebieg pomiarów****Układ doświadczalny**

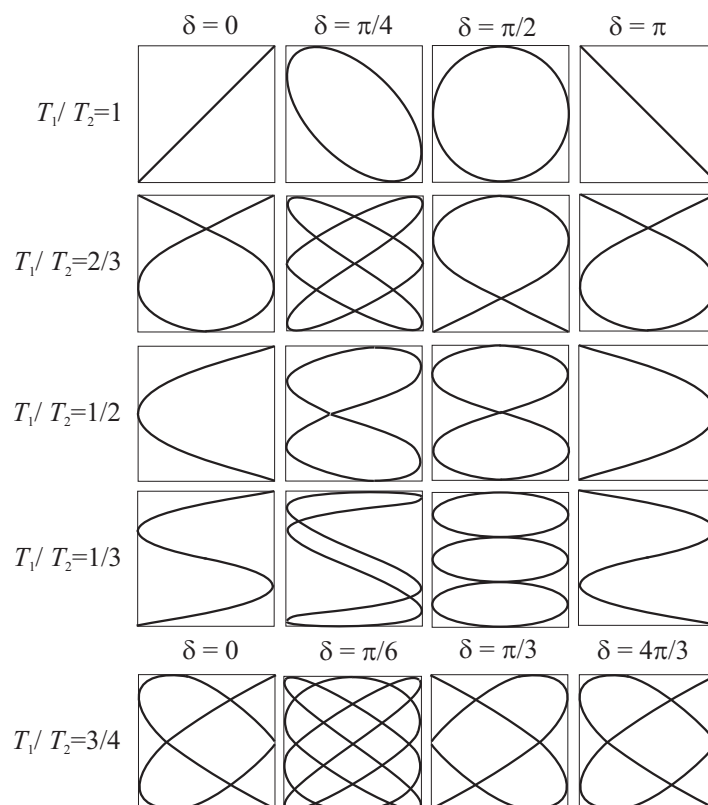
Do wykonania tego doświadczenia służy układ pomiarowy zawierający: oscyloskop Hameg HM404, dwa generatory drgań sinusoidalnych, mieszacz-demodulator częstości różnicowej (urządzenie pozwalające na otrzymanie stabilnego obrazu dudnień na ekranie oscyloskopu), przewody koncentryczne.

**Przebieg doświadczenia**

Przed przystąpieniem do pomiarów należy zidentyfikować na płycie czołowej oscyloskopu pokręta i przyciski kontrolujące tryb pracy i poszczególne bloki oscyloskopu.

**Tryb pracy  $V(t)$** 

Podać sygnał na jedno z wejść oscyloskopu (CHI lub CHII). Za pomocą elementów regulacyjnych uzyskać stabilny obraz sygnału. Dobrać wzmocnienie oraz podstawę czasu tak, aby uzyskać możliwie dużą dokładność odczytu amplitudy oraz okresu sygnału. Odczytać amplitudę i okres sygnału oraz częstotliwość ustawioną na generatorze. Pomiar powtórzyć dla kilku różnych częstotliwości generatora.



Rys. 4.1.9: Krzywe Lissajous dla różnych stosunków okresów  $T_1/T_2$  oraz dla różnych przesunięć fazowych  $\delta$ .

### Obserwacja dudnień

Na wejścia oscyloskopu CHI i CHII podać sygnały o zbliżonych częstotliwościach i równych amplitudach. Można zastosować mieszacz-demodulator częstotliwości i wówczas wybrać wyzwalanie zewnętrzne (TRIG.EXT.) podłączając do gniazda TRIG.EXT. sygnał z mieszacza-demodulatora. Wybrać tryb pracy ADD – obserwacja sumy sygnałów z obu kanałów. Regulując częstotliwość na jednym z generatorów uzyskać stabilny obraz dudnień. Dokonać pomiaru okresu dudnień oraz drgań wewnętrznych. Przełączyć oscyloskop w tryb jednokanałowy  $V(t)$  (kolejno CHI i CHII) i odczytać okresy drgań składowych. Powtórzyć pomiary dla innych częstotliwości sygnałów wejściowych.

### Tryb pracy $X - Y$ – obserwacja krzywych Lissajous

Na wejścia oscyloskopu podać sygnały o jednakowych częstotliwościach i amplitudach. Przełączyć oscyloskop w tryb pracy  $X - Y$ . Regulując częstotliwość na jednym z generatorów, uzyskać stabilny obraz krzywej Lissajous i przerysować kształt zaobserwowanej krzywej. Przełączyć oscyloskop w tryb jednokanałowy i odczytać częstotliwości sygnałów składowych. Powtórzyć pomiary dla innych stosunków częstotliwości sygnałów wejściowych.

### 4.1.3 Opracowanie wyników

Obliczyć częstotliwości obserwowanych sygnałów (przyjąć dokładność pomiaru długości na kranie oscyloskopu  $\pm 0.2 \text{ cm}$ ). Na podstawie częstotliwości drgań składowych obliczyć teoretyczne częstotliwości dudnień oraz drgań wewnętrznych i porównać z częstotliwościami zmierzonymi za pomocą oscyloskopu. Dla zaobserwowanych krzywych Lissajous obliczyć stosunek częstotliwości drgań składowych i porównać obliczoną wartość ze stosunkiem liczby przecięć krzywej z osiami  $X$  i  $Y$ . Dla wszystkich wyznaczonych wielkości podać odpowiednie jednostki i niepewności pomiarowe.

## 4.2 Analiza fourierowska

Celem doświadczenia jest wyznaczenie współczynników szeregu Fouriera dla sygnałów okresowych.

Zagadnienia do przygotowania:

- szereg Fouriera;
- sygnał prostokątny;
- sygnał trójkątny;
- układ  $RLC$ .

Literatura podstawowa: [3], [20], [21].

### 4.2.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Szereg Fouriera

Rozkład funkcji okresowej  $F$  o okresie  $T$  na szereg Fouriera ma postać:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t), \quad (4.2.1)$$

gdzie współczynniki  $a_k$  i  $b_k$  dane są równaniami:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \cos(k\omega t) dt, \quad (4.2.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \sin(k\omega t) dt, \quad (4.2.3)$$

a  $\omega = 2\pi/T$  jest częstością kołową.

Jeżeli funkcja  $F$  spełnia warunki Dirichleta, tzn.:

- przedział, w którym funkcja jest określona, można rozłożyć na skończoną liczbę podprzedziałów, a w każdym z nich funkcja  $F$  jest ciągła i monotoniczna;

- w każdym punkcie nieciągłości  $F$  istnieje granica prawostronna  $F(t^+)$  i lewostronna  $F(t^-)$ ,

to szereg Fouriera tej funkcji jest zbieżny i jego suma równa się  $F(t)$  w punktach ciągłości funkcji, a w punktach nieciągłości funkcji suma ta równa się  $[F(t^-) + F(t^+)]/2$ .

### Sygnal prostokątny

Mamy dany sygnał prostokątny postaci:

$$F(t) = \begin{cases} U & \text{dla } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ -U & \text{dla } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases} . \quad (4.2.4)$$

Współczynniki szeregu Fouriera dla tego sygnału wynoszą:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 & \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= 0 & \text{dla } k = 2, 4, 6, \dots \\ b_k &= \frac{4U}{k\pi} & \text{dla } k = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

### Sygnal trójkątny

Niech będzie dany sygnał trójkątny postaci:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{4Ut}{T} & \text{dla } t \in [-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}] \\ U(2 - \frac{4t}{T}) & \text{dla } t \in [\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}] \end{cases} . \quad (4.2.6)$$

Maksimum i minimum sygnału wynoszą odpowiednio  $U$  dla  $t = T/4$  i  $-U$  dla  $t = -T/4$  lub  $t = 3T/4$ . Współczynniki szeregu Fouriera mają postać:

$$\begin{aligned} a_k &= 0 & \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{8U}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2} & \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Należy pamiętać (szczególnie przy rekonstrukcji sygnału), że dla sygnału przesuniętego względem podanego wyżej współczynniki Fouriera będą inne. Przykładowo dla sygnału trójkątnego zdefiniowanego następująco:

$$F(t) = U - \left| \frac{4Ut}{T} \right| \quad \text{dla } t \in \left[ \frac{-T}{2}, \frac{T}{2} \right], \quad (4.2.8)$$

współczynniki mają postać:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{8U}{(k\pi)^2} \quad \text{dla } k = 1, 3, 5, \dots \\ a_k &= 0 \quad \text{dla } k = 0, 2, 4, \dots \\ b_k &= 0 \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

### Układ RLC

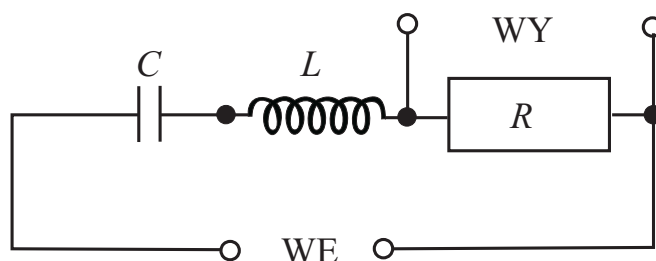
Eksperymentalne wyznaczanie współczynników Fouriera polega na wykorzystaniu układu filtrującego, który po podaniu na wejście badanego sygnału okresowego o amplitudzie maksymalnej  $U$ , na wyjściu wybiera składową szeregu Fouriera. Z pomiaru amplitudy  $U_{k,WY}$  sygnału wyjściowego otrzymujemy szukany współczynnik Fouriera. Należy jeszcze uwzględnić w amplitudzie wyjściowej pewien wkład  $A_k$  od samego układu, co daje nam związek:

$$U_{k,WY} = A_k b_k. \quad (4.2.10)$$

Nieznaną wartość  $A_k$  wyznaczamy filtrując sygnał sinusoidalny o wybranej częstotliwości. Dla takiego sygnału otrzymujemy prosty związek:

$$A_{k,WY} = A_k A_{k,WE}, \quad (4.2.11)$$

który pozwala nam wyznaczyć  $A_k$  z pomiarów amplitudy wejściowej  $A_{k,WE}$  i wyjściowej  $A_{k,WY}$  sygnału sinusoidalnego. Urządzeniem, które realizuje wybieranie danej składowej z szeregu Fouriera, jest układ szeregowy RLC pokazany na rysunku 4.2.1



Rys. 4.2.1: Schemat układu szeregowego RLC.

W układzie tym w zależności od nastaw pojemności  $C$ , indukcyjności  $L$  i oporu  $R$  możemy dokonać transmisji wybranej składowej, inne składowe zostaną wytłumione.

Z drugiego prawa Kirchoffa dla tego układu otrzymamy równanie różniczkowe liniowe i niejednorodne postaci

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U \cos(\omega t), \quad (4.2.12)$$

gdzie na wejście układu podano sygnał sinusoidalny o amplitudzie  $U$  i częstotliwości wymuszającej  $\omega$ . Szukamy funkcji  $q(t)$  opisującej ładunek zgromadzony na kondensatorze. Prąd płynący w układzie możemy obliczyć z równania

$$I(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (4.2.13)$$

Przy rozwiązywaniu równania (4.2.12) warto mieć w pamięci mechaniczny odpowiednik naszego układu elektrycznego, jakim jest oscylator harmoniczny tłumiony poddany działaniu siły wymuszającej (opisany w rozdziale 1.3). Z matematyki wiadomo, że pełne rozwiązanie równania (4.2.12) jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (z dwoma stałymi wyznaczanymi z warunków początkowych) i rozwiązania szczególnego związanego z wyrazem niejednorodnym. Z fizyki wiadomo natomiast, że rozwiązanie ogólne jest szybko tłumione i wystarczy zajmować się tylko rozwiązaniem szczególnym, które ma postać

$$q(t) = A_q(\omega) \cos(\omega t + \delta), \quad (4.2.14)$$

$$A_q(\omega) = \frac{\frac{U}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2 \omega^2}}, \quad (4.2.15)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (4.2.16)$$

Jest to periodyczne rozwiązanie opisujące drgania z częstotliwością napięcia wymuszającego i z amplitudą zależną od tej częstotliwości. Warto dla porządku podać również zależność od czasu dla prądu płynącego w układzie

$$I(t) = A_I(\omega) \sin(\omega t + \delta), \quad (4.2.17)$$

$$A_I(\omega) = -\omega A_q(\omega). \quad (4.2.18)$$

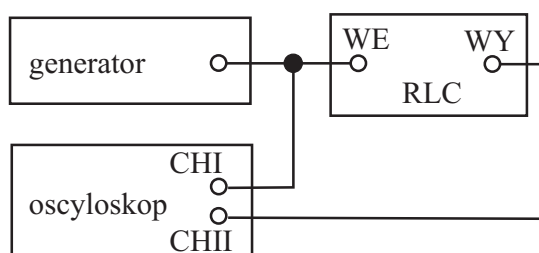
Ważne jest ustalenie częstotliwości wymuszającej  $\omega_r$ , która odpowiada maksymalnej amplitudzie danej wielkości fizycznej. Jest to częstotliwość dla której zachodzi rezonans. Rezonans dla ładunku występuje przy  $\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L}\right)^2$ , natomiast dla prądu przy  $\omega_r = \omega_0$ .

Ze względu (m.in.) na prostą relację będziemy korzystać z własności prądu w układzie. W praktyce obserwujemy spadek napięcia na oporze  $R$ .

## 4.2.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: generator sygnałów sinusoidalnych, prostokątnych i trójkątnych; oscyloskop dwukanałowy do obserwacji sygnału wejściowego i wyjściowego oraz do pomiaru amplitud; dekadowy opór, pojemność i indukcyjność; kable połączeniowe. Schemat wykorzystywanego układu pomiarowego przedstawiono na rysunku 4.2.2.



Rys. 4.2.2: Schemat układu pomiarowego.

### Badanie tłumienia układu

Zestawić układ pomiarowy według schematu. Ustalić indukcyjność  $L = 0.1 H$ , opór  $R = 100 \Omega$  i pojemność  $C_t = 253.3 nF$ . Wielkości te teoretycznie odpowiadają dostrojeniu układu RLC do częstotliwości rezonansowej  $f_1 = 1 kHz$ . Z generatora doprowadzić sygnał sinusoidalny o częstotliwości  $f = 1 kHz$ . Faktyczne dostrojenie układu RLC może być inne głównie ze względu na dodatkowe pojemności połączeń. Sprawdzić faktyczne dostrojenie układu RLC zmieniając  $f$  w otoczeniu  $f_1$ . W razie potrzeby znaleźć pojemność  $C_d$ , która daje potrzebne dostrojenie do  $f_1$ . W tym celu należy ustalić  $f = f_1$  i zmieniać pojemność tak, aby uzyskać maksymalną amplitudę. W punkcie rezonansu zmierzyć amplitudę wejściową  $A_{1,WE}$  i wyjściową  $A_{1,WY}$  sygnału sinusoidalnego. Powtórzyć powyższą procedurę dla częstotliwości  $f_k = 3, 5, 7, 9, 11 kHz$ , dostrajając układ jedynie poprzez zmianę pojemności. W ten sposób otrzymać pojemności  $C_d$  oraz amplitudy  $A_{k,WE}$  i  $A_{k,WY}$  dla  $k = 3, 5, 7, 9, 11$ .

### Analiza sygnałów prostokątnego i trójkątnego

Z generatora doprowadzić sygnał prostokątny o częstotliwości  $f = 1 kHz$ . Dostroić układ RLC do częstotliwości  $f_1 = 1 kHz$ . Zmierzyć amplitudę wejściową  $U_{1,WE}$  i wyjściową  $U_{1,WY}$ . Powtórzyć powyższą procedurę dostrajając układ RLC do częstotliwości  $f_k = 3, 5, 7, 9, 11 kHz$  nie zmieniając parametrów wejściowego sygnału prostokątnego.

Z generatora doprowadzić sygnał trójkątny o częstotliwości  $f = 1 kHz$ . Wykonać pomiary tak jak w przypadku sygnału prostokątnego.



### Badanie krzywych rezonansowych

Dostroić układ RLC do częstotliwości  $f_3 = 3 \text{ kHz}$ . Na wejście układu podać sygnał sinusoidalny, który należy zmieniać w przedziale od 1 do 10 kHz i mierzyć jego amplitudę wyjściową. Analogiczne pomiary wykonać przy dostrojeniu układu RLC do częstotliwości  $f_5 = 5 \text{ kHz}$  i  $f_7 = 7 \text{ kHz}$ .

Aby zbadać wpływ oporu na kształt krzywej rezonansowej wykonać ponownie pomiary amplitudy wyjściowej sygnału sinusoidalnego przy dostrojeniu układu RLC do  $f_5$ , ale tym razem zmienić wartość oporu na  $R = 200 \Omega$  i  $R = 500 \Omega$ .

### 4.2.3 Opracowanie wyników

Obliczyć teoretyczne wartości współczynników Fouriera i porównać je z uzyskanymi doświadczalnie. Oszacować niepewności wyznaczonych współczynników.

Zrekonstruować sygnały prostokątny i trójkątny na podstawie teoretycznych i wyznaczonych doświadczalnie współczynników Fouriera (do jedenastego wyrazu włącznie).

Narysować krzywe rezonansowe (zależność amplitudy sygnału wyjściowego od częstotliwości napięcia wymuszającego) na podstawie punktów doświadczalnych oraz przy wykorzystaniu zależności teoretycznej  $f(\omega) = RA_I(\omega)$ . Do danych doświadczalnych dofitować funkcję postaci

$$f(\omega) = \frac{\omega P_1}{\sqrt{(P_2 - \omega^2)^2 + P_3 \omega^2}}, \quad (4.2.19)$$

gdzie  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  to parametry fitowania. Wykorzystać trzy parametry fitowania do obliczenia czterech wartości  $U$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , przy czym ze względu na pewną swobodę ustalamy wartości  $L$  lub  $C$  zgodnie z danymi z eksperymentu. Można również fitować parametry  $P_1$  i  $P_3$  przy ustalonym ustalonym  $P_2 = \omega_0^2$ . Przedyskutować wpływ oporu  $R$  na kształt krzywej.

## 4.3 Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu metodą fali biegnącej

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku w powietrzu metodą fali biegnącej.

Zagadnienia do przygotowania:

- fale w ośrodkach sprężystych (rodzaje fal); fale dźwiękowe;
- prędkość fali (prędkość fazowa i grupowa);
- metody wyznaczania prędkości fal dźwiękowych w gazach;
- pomiar prędkości dźwięku metodą fali biegnącej;
- drgania harmoniczne, składanie drgań - krzywe Lissajous;

- zasada działania i obsługa oscyloskopu;
- wykonanie w postaci pisemnej zadania z podrozdziału 4.3.1.

Literatura podstawowa: [25] §16.1, 16.2, 17.1-17.5, 17.8, 17.9, 18.1-18.5; literatura dodatkowa [2], [22].

### 4.3.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Fale biegnące w ośrodku sprężystym

W wyniku zmiany parametrów jakiegoś elementu objętości ośrodka sprężystego następują jego drgania (np. harmoniczne) wokół jego położenia równowagi. Dzięki sprężystym właściwościom ośrodka drgania te są przekazywane do dalszych jego części. W dwóch wymiarach dowolną falę rozchodzącą się w kierunku osi  $x$  można opisać równaniem falowym:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (4.3.1)$$

Jest to równanie różniczkowe, którego rozwiązaniem jest fala o stałym kształcie opisanym przez funkcje harmoniczne:

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right]. \quad (4.3.2)$$

przy czym:  $u = \lambda f$  i  $f = T^{-1}$ , gdzie  $u$  – jest prędkością rozchodzenia się fali w danym ośrodku,  $\lambda$  – jest długością fali,  $f$  – częstotliwością,  $T$  – okresem,  $\omega = 2\pi f$  jest tzw. częstością kołową. Często używa się również wielkości nazywanej liczbą falową –  $k = 2\pi/\lambda$ . Równanie fali (4.3.2) przyjmuje wtedy prostszą postać:

$$y = A \cos(\omega t - kx). \quad (4.3.3)$$

Falę opisaną tym równaniem nazywamy falą biegnącą. Warto zwrócić uwagę, że fala jest jednoznacznie zadana przez podanie jej częstotliwości  $f$ , gdyż równanie fali wiąże ze sobą długość fali o częstotliwości  $f$  z jej prędkością w danym ośrodku. Częstotliwość fali  $f$  zadawana jest przez źródło wytwarzające falę, a prędkość fali  $u$  determinują własności ośrodka, w którym fala się rozchodzi. Fale mechaniczne przenoszą energię dzięki propagacji zaburzenia w materii, nie powodując jednakże jej ruchu postępowego.

#### Dyspersja fal, prędkość fazowa i grupowa fali

Prędkość fazowa fali to prędkość, z jaką przemieszcza się określona faza fali biegnącej. Fazą nazywamy argument funkcji  $y = F(\omega t - kx)$ . W związku z tym prędkość fazowa wynosi:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}. \quad (4.3.4)$$

Jeżeli prędkość fali  $u$  zależy od jej długości  $\lambda$ , to fala wykazuje dyspersję. Miarą dyspersji jest pochodna  $du/d\lambda$ . Gdy pochodna ta jest dodatnia, mamy do czynienia z dyspersją normalną - prędkość fali rośnie z jej długością; w przeciwnym przypadku dyspersja jest anomalna. Jeżeli rozważymy nakładanie się dwóch ciągów fal o zbliżonych długościach fal i zbliżonych prędkościach, to maksimum wychylenia będzie przesuwało się z prędkością grupową  $u_g$

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \quad (4.3.5)$$

W przypadku braku dyspersji ( $du/d\lambda = 0$ ) prędkość grupowa jest równa prędkości fazowej.

### Fale poprzeczne i podłużne

Rodzaj fal rozchodzących się w danym ośrodku zależy od jego właściwości sprężystych, gdyż rozchodzą się tylko te drgania, które wywołują sprężyste odkształcenia ośrodka. Gdy cząstki ośrodka wykonują drgania w kierunku zgodnym z kierunkiem rozchodzenia się fali mówimy, że w ośrodku rozchodzi się fala podłużna, a gdy cząstki ośrodka wykonują drgania w kierunkach prostopadłych do kierunku rozchodzenia się fali mówimy o fali poprzecznej. W ośrodkach wykazujących jedynie sprężystość objętości (gazy i większość cieczy), mogą rozchodzić się tylko fale podłużne. Natomiast w ośrodkach ulegających zarówno odkształceniu objętościowemu, jak i odkształceniu postaci, a takie właściwości mają ciała stałe, mogą rozchodzić się zarówno fale podłużne, jak i poprzeczne.

### Fala dźwiękowa i ultradźwięki

Fala dźwiękowa jest podłużną falą mechaniczną o częstotliwości z zakresu słyszalnego dla człowieka tj. od około 20 Hz do około 20 kHz. Fale o częstotliwości wyższej od górnej granicy nazywamy ultradźwiękami, a o częstotliwości niższej od dolnej granicy – infradźwiękami.

### Prędkość rozchodzenia się fal mechanicznych w gazie

Prędkość fali mechanicznej rozchodzącej się w gazie doskonałym opisuje zależność:

$$u = \sqrt{\kappa p / \rho}, \quad (4.3.6)$$

gdzie:  $p$  – ciśnienie,  $\kappa = C_p/C_V$ ,  $\rho$  – gęstość gazu. Dla gazów rzeczywistych prędkość rozchodzenia się fali dźwiękowej wykazuje słabą liniową zależność od temperatury. W gazach wieloatomowych występuje zjawisko dyspersji, czyli zależność prędkości od częstotliwości dźwięku. Dla fal dźwiękowych w powietrzu dyspersja jest bardzo mała i zależy głównie od zawartości dwutlenku węgla i pary wodnej.

*Zadanie 1. W jakim zakresie częstotliwości  $f$  można prowadzić pomiar prędkości dźwięku metodą fali biegnącej, jeżeli mikrofon przesuwany jest na tle skali o długości 1 m?*

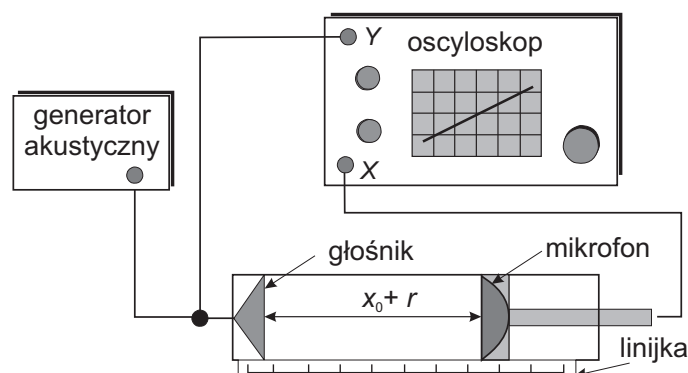
### 4.3.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego wchodzi: dekadowy generator akustyczny, głośnik i mikrofon umieszczone wewnątrz szklanej rury na tle skali milimetrowej, którą jest linijka o długości 1 m; oscyloskop.

#### Metoda pomiarowa

W warunkach laboratoryjnych pomiaru prędkości rozchodzenia się fali akustycznej w płynie (gazie lub cieczy) dokonać można metodą fali biegnącej lub metodą fali stojącej. Schemat układu do pomiaru prędkości dźwięku metodą fali biegnącej przedstawiony jest na rysunku 4.3.1. Sygnał z generatora akustycznego podawany jest na płytki odchylenia pionowego oscyloskopu oraz na głośnik. Emitowaną przez głośnik falę dźwiękową mikrofon przetwarza na sygnał elektryczny, który po wzmacnieniu podawany jest na płytki odchylenia poziomego oscyloskopu. Odległość mikrofon-głośnik można zmieniać przesuwając mikrofon na tle skali o długości 1 m.



Rys. 4.3.1: Schemat układu do pomiaru prędkości dźwięku w powietrzu metodą fali biegnącej.

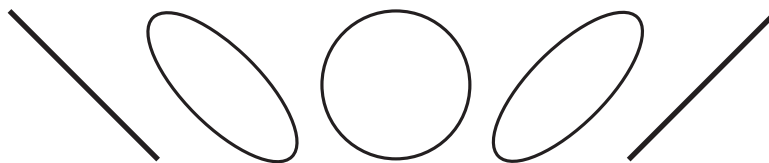
Jeżeli przyjmiemy, że sygnał z generatora akustycznego podawany na oscyloskop odpowiada fali dźwiękowej w punkcie  $x_0$ , w którym znajduje się głośnik, to sygnał podawany na płytki odchylenia pionowego oscyloskopu zapisać można równaniem:

$$y_G = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_0}{\lambda} \right) + \delta \right]. \quad (4.3.7)$$

Sygnal podawany na płytce odchylenia poziomego oscyloskopu jest wzmocnionym sygnałem odbieranym przez mikrofon znajdujący się w odległości  $r$  od głośnika (generatora). Można go więc zapisać w postaci:

$$y_M = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x_0 + r}{\lambda} \right) + \delta \right]. \quad (4.3.8)$$

Zmieniając położenie mikrofonu możemy zmieniać różnicę faz tych sygnałów:  $\Delta = 2\pi r/\lambda$ . Na ekranie oscyloskopu obserwować będziemy zmianę kształtu krzywej Lissajous, która powstała w wyniku złożenia powyżej opisanych sygnałów (rysunek 4.3.2).



Rys. 4.3.2: Krzywe Lissajous obserwowane na ekranie oscyloskopu w zależności od odległości głośnik-mikrofon.

Przy przesuwaniu mikrofonu o jedną długość fali elipsa dwukrotnie degeneruje się do odcinka (różnica faz sygnałów składowych wynosi wtedy  $\pi$  lub  $0$ , co odpowiada różnicy długości fali  $\lambda/2$  lub  $\lambda$ ). Pozwala to na wyznaczenie długości badanej fali dźwiękowej.

### Przebieg doświadczenia

Dla wybranej częstotliwości fali dźwiękowej (np.  $1 \text{ kHz}$ ) podawanej z generatora akustycznego wyznaczyć okres  $T$  używając oscyloskopu oraz wykonując odpowiednie obliczenia. Ustalić czy lepiej dokonywać pomiaru okresu  $T$  przy pomocy oscyloskopu czy raczej bazować na odczycie częstotliwości  $f$  z generatora. Zdecydować jak będzie wykonywany pomiar i odpowiednio skorygować plan pracy.

Przełączyć oscyloskop w tryb  $X - Y$ . Zmieniając odległość mikrofonu od głośnika obserwować zmiany kształtu krzywej Lissajous i dokonać pomiaru położenia mikrofonu, które pozwolą na wyznaczenie długości badanej fali dźwiękowej. Wykonać analogiczne pomiary dla częstotliwości poniżej  $1 \text{ kHz}$  (np.  $500 \text{ Hz}$ ). Czy do wyznaczenia prędkości dźwięku w powietrzu warto używać częstotliwości niższych niż  $1 \text{ kHz}$ ?

Dla kilku wybranych częstotliwości z zakresu  $1 - 5 \text{ kHz}$  wykonać pomiary pozwalające na wyznaczenie długości fali oraz okresu  $T$ .

### 4.3.3 Opracowanie wyników

Każdemu pomiarowi odczytanego położenia mikrofonu  $z$  przyporządkować kolejny numer pomiaru  $n$ . Dla każdej badanej częstotliwości wykonać wykres zależności od-

czytanych położeń mikrofonu  $z$  od przyporządkowanego numeru pomiaru  $n$ . Zależność ta opisana jest równaniem

$$z = \frac{\lambda}{2}n + b. \quad (4.3.9)$$

Dzięki temu metodą regresji liniowej można wyznaczyć wartość długości fali (oraz jej niepewność) odpowiadającą każdej z badanych częstotliwości. Oszacować niepewność pomiarową wyznaczenia okresu badanych fal dźwiękowych (metodą różniczki zupełnej). Wykonać wykres zależności długości fali  $\lambda$  od okresu  $T$  i metodą regresji liniowej wyznaczyć wartość prędkości dźwięku w powietrzu oraz jej niepewność. Porównać uzyskany wynik z dostępnymi danymi literaturowymi.

## 4.4 Wyznaczanie prędkości dźwięku w cieczach metodą fali biegnącej

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku w wodzie i roztworach wodnych NaCl oraz zastosowanie metody akustycznej do wyznaczenia nieznanego stężenia roztworu wodnego NaCl.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- fale w ośrodkach sprężystych (rodzaje fal);
- fale dźwiękowe, ultradźwięki - wytwarzanie;
- prędkość fali (prędkość fazowa i grupowa);
- metody wyznaczania prędkości fal dźwiękowych w płynach;
- pomiar prędkości dźwięku metodą fali biegnącej;
- drgania harmoniczne, składanie drgań harmonicznnych - krzywe Lissajous;
- zasada działania i obsługa oscyloskopu.

Literatura podstawowa: [25] §16.1, 16.2, 17.1-17.5, 17.8, 17.9, 18.1-18.5; literatura dodatkowa: [1], [2], [11], [22].

### 4.4.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Większość informacji podana została w rozdziale 4.3, tutaj przedstawione są specyficzne pojęcia potrzebne przy pomiarze prędkości dźwięku w cieczy.

#### Prędkość rozchodzenia się fal mechanicznych w cieczach

Prędkość rozchodzenia się fal mechanicznych w cieczach zależy od ciśnienia, temperatury i gęstości ośrodka. Dla większości cieczy czystych zależność prędkości rozchodzenia się w nich ultradźwięków od temperatury i ciśnienia jest z dobrym przybliżeniem liniowa. W przypadku roztworów i mieszanin, prędkość rozchodzenia się w nich fali ultradźwiękowej jest zależna od stężenia. Dla małych stężeń soli (do około 25%) zależność ta jest liniowa. W przypadku wodnych roztworów kwasów zakres liniowości jest ograniczony do znacznie niższych stężeń [22].

### Przetworniki ultradźwiękowe

W doświadczeniu wykorzystywane są fale ultradźwiękowe, czyli fale akustyczne o częstotliwości powyżej  $20\text{ kHz}$ . Do generacji i detekcji fal ultradźwiękowych służą przetworniki, które przetwarzają energię elektryczną, świetlną lub mechaniczną na energię fali ultradźwiękowej (głowice ultradźwiękowe nadawcze) lub odwrotnie (detektory – głowice ultradźwiękowe odbiorcze). Stosowane są przetworniki piezoelektryczne, magnetostrykcyjne. Najwygodniejsze w użyciu i najbardziej efektywne są ultradźwiękowe przetworniki piezoelektryczne (najbardziej znanym kryształem piezoelektrycznym jest kwarc). Wykorzystywane jest w nich zjawisko piezoelektryczne polegające na tym, że pewne kryształy umieszczone w polu elektrycznym doznają odkształceń mechanicznych zależnych od wartości przyłożonego pola. W ten sposób, przykładając szybko zmienne pole elektryczne (z generatora), otrzymujemy drgania kryształu. W ośrodku, w którym znajduje się kryształ, generowane są fale akustyczne o częstotliwości zadanej przez generator. Detektory ultradźwięków wykorzystują zjawisko piezoelektryczne odwrotne. Polega ono na wytworzeniu różnicy potencjałów na kryształach piezoelektrycznym pod wpływem odkształceń mechanicznych wywołanych padającą falą ultradźwiękową.

#### 4.4.2 Przebieg pomiarów

##### Układ pomiarowy

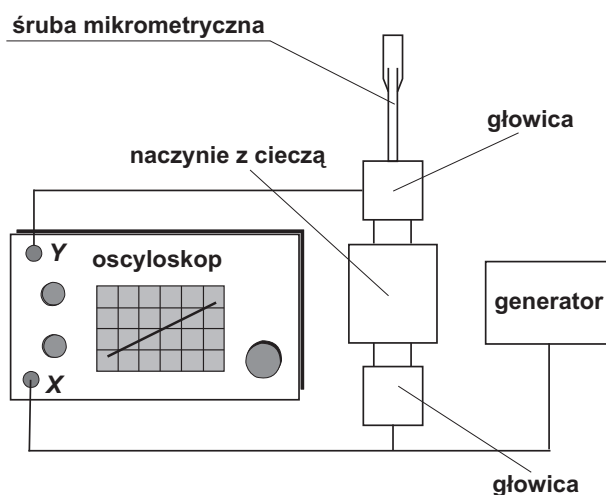
W skład układu doświadczalnego wchodzi: generator wysokiej częstotliwości, przetworniki ultradźwiękowe, śruba mikrometryczna, naczynko pomiarowe, oscyloskop. Do dyspozycji jest również elektroniczna waga laboratoryjna, menzurki, zlewki, mieszadełka, sól kuchenna ( $\text{NaCl}$ ) i woda destylowana.

Schemat układu do pomiaru prędkości dźwięku metodą fali biegnącej przedstawiony jest na rysunku 4.4.1. Idea pomiaru jest taka sama jak przy wyznaczaniu prędkości dźwięku w powietrzu (rozdział 4.3). Rolę głośnika i mikrofonu pełnią przetworniki ultradźwiękowe: głowica nadawcza i odbiorcza. Głowica nadawcza i odbiorcza zanurzone są w badanej cieczy znajdującej się w naczynku pomiarowym umieszczonym nad nieruchomą głowicą nadawczą. Precyzyjne przesuwanie głowicy odbiorczej umożliwia śruba mikrometryczna.

##### Przebieg doświadczenia

Zapoznać się z zestawem eksperymentalnym i parametrami poszczególnych przyrządów, połączyć obwód eksperymentalny. Zbiorniczek nad przetwornikiem napełnić wodą destylowaną. Częstotliwość generatora ultradźwięków wybierać z zakresu  $1.0 - 2.5\text{ MHz}$ .

Przy pomocy śruby mikrometrycznej przesuwać górną głowicę tak, aby uzyskane na ekranie oscyloskopu krzywe Lissajous były odcinkami. Odczytać i zapisać te położenia śruby mikrometrycznej. Pomiary powtórzyć kilkakrotnie dla kilku różnych częstotliwości.



Rys. 4.4.1: Schemat układu do pomiaru prędkości dźwięku w cieczach metodą fali biegnącej.

Sporządzić roztwory NaCl w wodzie destylowanej o różnych stężeniach np. 25%, 20%, 15%, 10% i 5%. Dla każdego roztworu przeprowadzić pomiary w analogiczny sposób jak dla wody destylowanej.

Stosując tę samą metodę wykonać pomiary dla wodnego roztworu NaCl o nieznanym stężeniu (np. sporządzonego przez kolegę lub dostarczonego przez asystenta opiekującego się ćwiczeniem).

### 4.4.3 Opracowanie wyników

Każdemu pomiarowi odczytanego położenia głowicy odbiorczej z przyporządkować kolejny numer pomiaru  $n$ . Dla każdej badanej częstości wykonać wykres zależności odczytanych położań mikrofonu  $z$  od przyporządkowanego numeru pomiaru  $n$ . Zależność ta opisana jest równaniem

$$z = \frac{\lambda}{2}n + b. \quad (4.4.1)$$

Dzięki temu metodą regresji liniowej można wyznaczyć wartość długości fali (oraz jej niepewność) odpowiadającą każdej z badanych częstości. Oszacować niepewność pomiarową wyznaczenia okresu badanych fal dźwiękowych (metodą różniczki zupełnej). Wykonać wykresy zależności długości fali  $\lambda$  od okresu  $T$  i metodą regresji liniowej wyznaczyć wartość prędkości ultradźwięków w wodzie destylowanej i w badanych roztworach wodnych NaCl. Sporządzić wykres zależności prędkości ultradźwięków od stężenia roztworu NaCl. Pamiętać o naniesieniu prostokątów niepewności pomiarowych. Korzystając z tej zależności wyznaczyć stężenie nieznanego roztworu wodnego NaCl wraz z niepewnością pomiarową. Przeprowadzić dyskusję zgodności uzyskanych wyników z wartościami, które można znaleźć w tablicach.



## 4.5 Zjawisko Dopplera w powietrzu

Celem ćwiczenia jest obserwacja zjawiska Dopplera dla fal dźwiękowych w powietrzu oraz wyznaczenie względnej prędkości nadajnika i odbiornika dźwięku.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- zjawisko Dopplera;
- interferencja fal harmoniczných, dudnienia;
- dyspersja fal, prędkość fazowa i grupowa.

Literatura podstawowa: [5], [23], [24].

### 4.5.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Część zagadnień została przedstawiona w rozdziale 4.3, tutaj omówione jest tylko zjawisko Dopplera wykorzystywane w pomiarze.

#### Zjawisko Dopplera

Zjawiskiem Dopplera w akustyce nazywamy rozbieżność między częstotliwością dźwięku wysyłanego przez nadajnik a częstotliwością tego dźwięku odbieranego przez odbiornik w przypadku, gdy obiekty te poruszają się względem siebie. Rozważmy najprostszą sytuację, gdy nadajnik i odbiornik poruszają się po tej samej linii prostej z prędkościami mniejszymi od prędkości dźwięku. Nadajnik emituje falę dźwiękową o częstotliwości  $f_n$  i długości fali  $\lambda_n$ . Jeżeli prędkość dźwięku wynosi  $u$  to częstotliwość i długość fali powiązane są ze sobą poprzez:

$$u = f_n \lambda_n. \quad (4.5.1)$$

Jeżeli obserwator porusza się w kierunku źródła dźwięku z prędkością  $v_o$  to fale dochodzą do obserwatora z prędkością równą sumie prędkości dźwięku i prędkości obserwatora. Więc czas  $T_o$ , w jakim kolejne maksimum fali dochodzi do obserwatora wynosi:

$$T_o = \frac{\lambda_n}{u + v_o}. \quad (4.5.2)$$

Czas ten jest równy odwrotności częstotliwości fali  $f_o$  mierzonej przez obserwatora, którą można wyrazić przez częstotliwość fali wysyłanej przez nadajnik.

$$f_o = \frac{u + v_o}{\lambda_n} = \frac{u + v_o}{u} f_n. \quad (4.5.3)$$

Jeżeli obserwator oddala się od nadajnika to obserwowana przez niego częstotliwość fali wynosi:

$$f_o = \frac{u - v_o}{u} f_n. \quad (4.5.4)$$

Rozważmy teraz przypadek, gdy obserwator spoczywa a nadajnik zbliża się do niego z prędkością  $v_n$ . W odstępie czasu  $T_n = 1/f_n$  nadajnik emituje dwa kolejne maksima fali. W tym czasie nadajnik zbliża się do obserwatora o odległość  $v_n T_n$ . Dlatego odległość kolejnych wierzchołków fali jaką widzi obserwator wynosi  $(u - v_n)T_n$ . Czyli długość fali rejestrowana przez obserwatora wynosi:

$$\lambda_o = \lambda_n - v_n T_n. \quad (4.5.5)$$

Dzięki temu obserwator zmierzy częstotliwość fali wynoszącą:

$$f_o = \frac{u}{u - v_n} f_n. \quad (4.5.6)$$

Jeżeli nadajnik oddala się od obserwatora to mierzona przez niego częstotliwość fali wynosi:

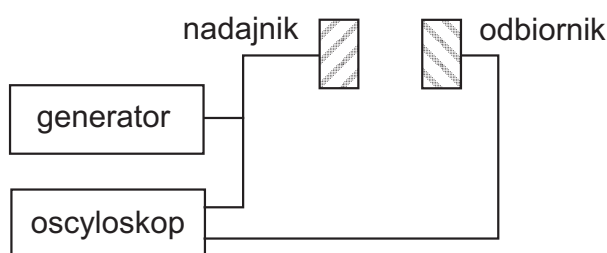
$$f_o = \frac{u}{u + v_n} f_n. \quad (4.5.7)$$

## 4.5.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: oscyloskop cyfrowy z pamięcią, generator, dwie głowice ultradźwiękowe, mechanizm przesuwu odbiornika, stoper, przymiar.

Źródłem dźwięku jest głowica ultradźwiękowa zasilana z generatora. Odbiornikiem jest druga głowica ultradźwiękowa. Sygnały nadawany i odbierany są doprowadzone odpowiednio do wejścia  $A$  i  $B$  oscyloskopu cyfrowego. Po dodaniu obu sygnałów powstają dudnienia (o ile źródło lub odbiornik się porusza), których obraz można zatrzymać dzięki pamięci oscyloskopu. Schemat układu używany w doświadczeniu pokazany jest na rysunku 4.5.1.



Rys. 4.5.1: Schemat blokowy układu pomiarowego.

### Przebieg doświadczenia

Zestawić układ według schematu. Głowica nadawcza jest umocowana na ścianie, głowica odbiorcza może się poruszać. Dobrać częstotliwość sygnału z generatora tak, aby sygnał odbierany był najmocniejszy. Wybrać punkt na trasie odbiornika i do tego miejsca przesunąć głowicę. Następnie ustawić wzmocnienia sygnałów tak, aby ich amplitudy były identyczne. W tym punkcie na trasie odbiornika należy uzyskiwać obrazy dudnień. Przeprowadzić po około 50 pomiarów częstotliwości dudnień niezależnie dla zbliżającego i oddalającego się odbiornika.

Zmierzyć odległość pomiędzy dwoma punktami na drodze przebywanej przez odbiornik. Następnie wielokrotnie zmierzyć czas przelotu odbiornika na tej ustalonej drodze.

### 4.5.3 Opracowanie wyników

Wyznaczyć średnią częstotliwość dudnień. Wykonać histogramy ilości przypadków w funkcji otrzymanych częstotliwości dudnień. W tym celu należy ustalić najmniejszą i największą wartość częstotliwości występującą w pomiarach. Następnie ten przedział należy podzielić na równe mniejsze podprzedziały i zliczyć ile pomiarów zawiera się w każdym z podprzedziałów. Dla  $N$  pomiarów histogram powinien mieć około  $\sqrt{N}$  podprzedziałów.

Korzystając z opisanej teorii zjawiska Dopplera obliczyć prędkość odbiornika i jej niepewność. Prędkość dźwięku w powietrzu odczytać z tablic. Prędkość odbiornika należy obliczyć również bezpośrednio z pomiaru drogi i czasu przelotu. Porównać prędkości odbiornika otrzymane tymi dwiema metodami.

## 4.6 Pomiar prędkości dźwięku w cieczy w oparciu o zjawisko Dopplera

Celem ćwiczenia jest obserwacja zjawiska Dopplera w cieczy oraz wyznaczenie prędkości dźwięku w badanej cieczy.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- zjawisko Dopplera;
- interferencja fal harmoniczych, dudnienia;
- dyspersja fal, prędkość fazowa i grupowa.

Literatura podstawowa: [5], [24].

### 4.6.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Wszystkie potrzebne zagadnienia omówione są w rozdziałach 4.3 i 4.5.

## 4.6.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Przyrządy: oscyloskop cyfrowy z pamięcią, generator sygnału z wbudowanym częstotliwościomierzem, nadajnik i odbiornik ultradźwięków w cieczy (dwie głowice ultradźwiękowe), mechanizm przesuwu odbiornika ze sterownikiem i elektronicznym pomiarem czasu jednego obrotu wykonywanego przez wał napędowy, badana ciecz.

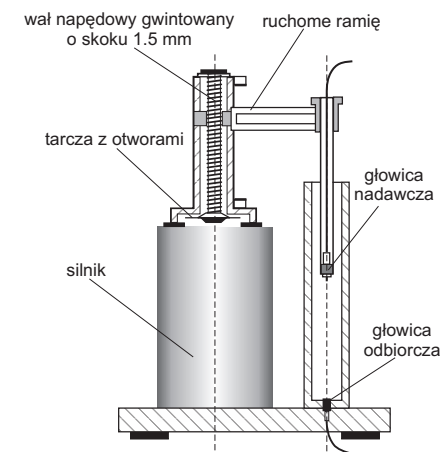
Schmat blokowy układu pomiarowego jest taki sam jak na rysunku 4.5.1, bardziej szczegółowy schemat części używanego układu przedstawiony jest na rysunku 4.6.1. Dwie umieszczone współosiowo identyczne głowice ultradźwiękowe stanowią odpowiednio nadajnik i odbiornik fali akustycznej rozchodzącej się w cieczy. Jedna z głowic może poruszać się z kontrolowaną prędkością  $v$ . Sumując odpowiednio wzmocnione sygnały nadawczy i odbiorczy otrzymujemy dudnienie o częstotliwości  $f_d = 1/T_d$  proporcjonalnej do względnej prędkości ruchu głowicy. Częstotliwość sygnału nadawanego  $f_n$  wynosi około  $12\text{ MHz}$ , prędkość głowicy  $v$  wynosi około  $10\text{ cm/s}$ , natomiast prędkość

dźwięku w cieczy  $u$  jest rzędu  $\text{km/s}$ . Korzystając ze wzorów (4.5.3), (4.5.4), (4.5.6) oraz (4.5.7) można łatwo pokazać, że z dobrym przybliżeniem częstotliwość dudnień wynosi

$$f_d = f_n \frac{v}{u} \quad (4.6.1)$$

niezależnie od tego czy porusza się nadajnik czy też odbiornik. Prędkość głowicy wynosi  $v = d/T_s$ , gdzie  $T_s$  to czas wykonania przez wał napędowy jednego obrotu, a  $d$  to skok gwintu silnika równy  $1.5\text{ mm}$ . Po przekształceniu wzoru (4.6.1) dostajemy zależność liniową pomiędzy okresem dudnień i okresem obrotu wału napędowego:

$$T_d = \frac{u}{df_n} T_s. \quad (4.6.2)$$



Rys. 4.6.1: Schemat części układu pomiarowego.

W praktyce można się spodziewać pewnych odstępstw od podanego związku, ponieważ ruch głowicy powoduje ruch graniczącej z nią cieczy, a to z kolei zaburza propagację fali akustycznej.

### Przebieg doświadczenia

Zestawić układ pomiarowy, zalać głowice cieczą. Zmierzyć częstotliwość sygnału z generatora  $f_n$ . Wykonać serie pomiarów zależności okresu dudnień  $T_d$  od okresu obrotu wału napędowego  $T_s$ .

### 4.6.3 Opracowanie wyników

Zrobić wykres zależności okresu dudnień od okresu obrotu wału napędowego. Korzystając z regresji liniowej dopasować linię prostą. Korzystając z otrzymanych współczynników regresji obliczyć prędkość dźwięku w cieczy wraz z jej niepewnością pomiarową i porównać z wartościami tablicowymi. Przeprowadzić dyskusję otrzymanych wyników.

## 4.7 Pomiar prędkości dźwięku w metalach metodą echa ultradźwiękowego

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości dźwięku w wybranych metalach na podstawie pomiarów metodą echa ultradźwiękowego.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- rozchodzenie się fal sprężystych w różnych ośrodkach;
- fale dźwiękowe (ultradźwięki), rodzaje fal ultradźwiękowych;
- metoda echa ultradźwiękowego;
- wyznaczanie prędkości dźwięku w metalach;
- współczynniki sprężystości ośrodka (moduł Younga).

Literatura podstawowa: [5], [22].

### 4.7.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Podstawowe pojęcia i definicje dotyczące rozchodzenia się fal w ośrodku sprężystym opisane są w rozdziale 4.3.1.

#### **Prędkość rozchodzenia się fali mechanicznej w ciele stałym**

Rodzaj fal mechanicznych mogących się rozchodzić w danym ośrodku zależy od właściwości sprężystych tego ośrodka. Ciało stałe jest ośrodkiem, który ulega zarówno odkształceniu objętościowemu (ściśliwość), jak i odkształceniu postaci (sztywność). Mogą się więc w nim rozchodzić zarówno fale podłużne, jak i poprzeczne.

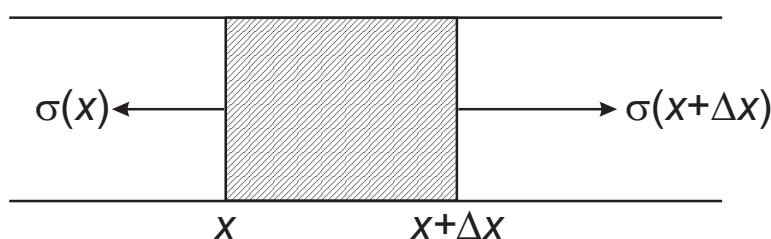
Założmy, że fala rozchodzi się w kierunku  $x$ , a drgania zachodzą w kierunku  $y$ . Falę taką opisuje falowe równanie różniczkowe (4.3.1), którego rozwiązaniem może być np. równanie fali:

$$y = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right], \quad (4.7.1)$$

gdzie  $u = \lambda T^{-1} = \lambda f$  jest prędkością rozchodzenia się fali w danym ośrodku. Równanie (4.3.1) stosuje się do wszystkich rodzajów drgań sprężystych, zarówno poprzecznych jak i podłużnych.

Rozważmy pręt metalowy ułożony wzdłuż osi  $x$ , o gęstości  $\rho$  i przekroju poprzecznym  $S$ . Pręt poddano odkształceniu, wywierając nacisk w kierunku osi  $x$ . Odkształcenie to jest przekazywane dzięki naprężeniom  $\sigma$  powstającym w pręcie i przemieszcza się ono wzdłuż pręta z prędkością  $u$  (rysunek 4.7.1). Jeżeli wybierzemy element masy pręta pomiędzy płaszczyznami w punktach  $x$  i  $x + \Delta x$ , to środek masy tego elementu ulegnie przemieszczeniu  $\xi(x, t)$ , czyli w pręcie rozchodzi się fala podłużna. Można napisać równanie ruchu dla tego elementu pręta:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x), \quad (4.7.2)$$



Rys. 4.7.1: Naprężenie w odkształconym pręcie.

stąd:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}, \quad (4.7.3)$$

a dla  $\Delta x \rightarrow 0$  lewą stronę równania możemy zastąpić przez pochodną:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (4.7.4)$$

Ale według prawa Hooke'a

$$\sigma = E \epsilon, \quad (4.7.5)$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga, a  $\epsilon$  - odkształcenie względne:

$$\epsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (4.7.6)$$

Zatem ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4.7.7)$$

Ostatnie równanie jest różniczkowym równaniem falowym dla podłużnej fali sprężystej, rozchodzącej się w metalowym pręcie. Porównując je z równaniem (4.3.1) można znaleźć prędkość rozchodzenia się fali podłużnej:

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.7.8)$$

W podobny sposób można wyprowadzić różniczkowe równanie falowe dla fal poprzecznych w pręcie. Odpowiedni wzór wyrażający prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej ma postać:

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4.7.9)$$

gdzie  $G$  oznacza moduł sztywności. Moduł sztywności wiąże ze sobą naprężenie ścinające  $\tau$  (siłę podzieloną przez wielkość powierzchni stycznej do kierunku działającej siły) z odkształceniem ścinania wyrażonym przez kąt skręcenia  $\theta$ :

$$\tau = G\theta. \quad (4.7.10)$$

Wydłużeniu ciała pod działaniem naprężenia towarzyszy zmniejszenie wymiarów w kierunku poprzecznym. Względna zmiana wymiaru poprzecznego jest proporcjonalna do względnego wydłużenia w kierunku działającego naprężenia. Współczynnikiem proporcjonalności jest współczynnik Poissona  $\nu$ . Dla ciał izotropowych moduł Younga  $E$ , moduł sztywności  $G$  oraz współczynnik Poissona  $\nu$  powiązane są ze sobą przez relację:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.7.11)$$

Można więc prędkość fal poprzecznych wyrazić jako:

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}. \quad (4.7.12)$$

Prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w ośrodku o dużych rozmiarach poprzecznych jest inna niż w cienkim pręcie. Rozmiary poprzeczne uznaje się jako duże, jeżeli są one większe od długości fali dźwiękowej. W ośrodku takim każdy element objętości ulega odkształceniom tylko w kierunku podłużnym. Prędkość rozchodzenia się fal podłużnych wynosi wtedy:

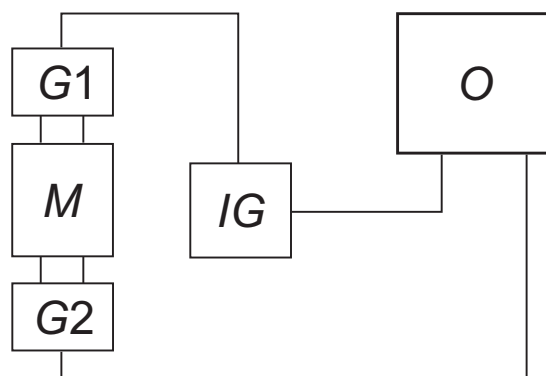
$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E(1 - \nu)}{\rho(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}, \quad (4.7.13)$$

natomiast prędkość rozchodzenia się fal poprzecznych jest wyrażana nadal równaniem (4.7.9).

## 4.7.2 Przebieg pomiarów

### Układ pomiarowy

Do wykonania ćwiczenia służy układ doświadczalny, w którego skład wchodzi: dwie głowice ultradźwiękowe  $G1$  i  $G2$ , impulsowy generator wysokiej częstotliwości  $IG$ , oscyloskop  $O$ , zestaw próbek z aluminium, miedzi i stali  $M$ . Ten układ doświadczalny, którego schemat przedstawiono na rysunku 4.7.2 pozwala na wyznaczenie prędkości dźwięku w metalach metodą echa ultradźwiękowego.



Rys. 4.7.2: Schemat blokowy układu doświadczalnego do wyznaczenia prędkości dźwięku w ciele stałym.

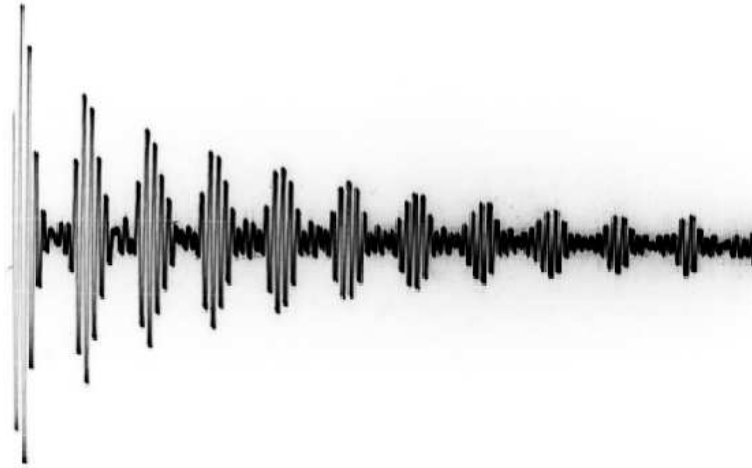
### Metoda pomiarowa

Główną część aparatury stanowią dwie głowice ultradźwiękowe  $G1$  i  $G2$  zamontowane w statywie, który umożliwia umieszczenie między nimi próbek badanych metali. Dolna głowica zamocowana jest w ten sposób, aby mogła dopasowywać się do ewentualnych nierównoległości podstaw mierzonych próbek. Na dolnej głowicy umieszcza się badaną próbkę i do jej górnej powierzchni dociska górną głowicę. Dla lepszego przylegania, podstawy próbek smarowane są lekko olejem. Na jedną z głowic ultradźwiękowych jest podawany prostokątny impuls z generatora  $IG$ , a druga głowica stanowi głowicę odbiorczą. Obydwa sygnały podawane są na wejście oscyloskopu  $O$ . Przy włączonej podstawie czasu, na ekranie oscyloskopu otrzymuje się szereg równoodległych impulsów, których amplitudy maleją eksponencjalnie (patrz rysunek 4.7.3). Pierwszy sygnał odpowiada sytuacji, kiedy impuls z generatora przeszedł przez całą długość próbki i został zarejestrowany przez głowicę odbiorczą. Drugi i wszystkie następne sygnały stanowią tzw. echo. Są to impulsy, które po przejściu przez próbkę zostały odbite od zewnętrznej powierzchni próbki w pobliżu głowicy odbiorczej, przeszły powtórnie całą próbkę i ponownie odbite od zewnętrznej powierzchni stykającej się do głowicy nadawczej dotarły do głowicy odbiorczej. Im więcej kolejnych odbić od zewnętrznych powierzchni próbki, tym mniejsza amplituda sygnału. Pierwsze echo daje impuls, który przebiegł



## Pomiar prędkości dźwięku w metalach metodą echa ultradźwiękowego 185

dotatkowo dwa razy długość próbki w porównaniu z pierwszym, obserwowanym na ekranie oscyloskopu. Drugie echo odpowiada dodatkowemu czterokrotnemu przejściu generowanego impulsu przez próbkę itd. Ogólnie – dodatkowa droga przebyta przez impuls w badanym materiale jest równa  $2nl$ , gdzie  $l$  jest grubością próbki,  $n$  jest kolejnym numerem echa.



*Rys. 4.7.3: Prawidłowy obraz ciągu sygnałów echa ultradźwiękowego obserwowany na ekranie oscyloskopu dla próbki stalowej.*

Prędkość dźwięku w metalach można wyznaczyć znając drogę i czas potrzebny na jej przebycie w badanym materiale. Z obrazu obserwowanego na ekranie oscyloskopu, gdzie widoczne są kolejne echa (rysunek 4.7.3) określa się czasy przelotu generowanego impulsu przez próbkę. Natomiast, do określenia drogi sygnału w materiale wystarczy znajomość grubości próbki.

Układ doświadczalny umożliwi również zobrazowanie zasady działania defektoskopu ultradźwiękowego. W próbkach o większych rozmiarach występują defekty struktury wewnętrznej, które powodują dodatkowe odbicia impulsów ultradźwiękowych. To z kolei prowadzi do powstawania na ekranie oscyloskopu dodatkowych obrazów echa, jednakże wartości amplitud i ich odległości od innych sygnałów nie spełniają omawianych wcześniej zależności.

### **Przebieg doświadczenia**

Zapoznać się z układem doświadczalnym i zmontować go według schematu przedstawionego na rysunku 4.7.2. Zmierzyć grubości i średnice wszystkich badanych próbek oraz wyznaczyć ich masy.

Zamontować próbkę pomiędzy głowicami ultradźwiękowymi. Zaobserwować obraz echa na ekranie oscyloskopu. Ustawić prawidłowy obraz tak, aby impulsy były równo odległe a ich amplitudy zanikały eksponencjalnie.

Zmierzyć za pomocą oscyloskopu czas przelotu impulsu ultradźwiękowego przez próbkę dla dróg  $s = 2nl$  ( $l$  – grubość próbki,  $n$  – numer echa), co sprowadza się do pomiaru odległości pomiędzy pierwszym sygnałem, a kolejnymi echem dla znanego zakresu podstawy czasu. Pomiary powtórzyć dla 3 próbek z każdego rodzaju materiału (stal, mosiądz, aluminium).

### 4.7.3 Opracowanie wyników

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów czasów przelotu  $t$  impulsów i długości dróg  $s$  przez nie przebytych w materiale jednego rodzaju, wykonać wykresy zależności  $s(t)$  (dla każdego badanego materiału osobno). Dopasować proste ( $s = at + b$ ) metodą regresji liniowej. Na podstawie otrzymanych współczynników regresji znaleźć prędkości dźwięku w każdym badanym materiale. Porównać z wartościami z tabeli 4.7.1.

Tabela 4.7.1: Dane akustyczne dla ciał stałych w temperaturze 20°C

Ośrodek	Gęstość $\rho$ $\cdot 10^3 [kg m^{-3}]$	Moduł Younga $E$ $\cdot 10^{10} [N m^{-2}]$	Prędkość podłużnych fal ultradźwiękowych $u [m s^{-1}]$
Aluminium	2.7	6.2-7.3	6320
Mosiądz	8.1	10.3	3830
Stal	7.8	21.5	5900-6000

Korzystając ze zmierzonych rozmiarów próbek oraz ich mas wyznaczyć gęstości badanych materiałów. Obliczyć wartości modułu Younga dla badanych materiałów korzystając z wyznaczonych gęstości i prędkości. Oszacować niepewności pomiarowe wyznaczanych wielkości. Otrzymane wyniki porównać z wartościami tablicowymi.

## 4.8 Wyznaczanie ogniskowych soczewek i badanie wad soczewek

Celem ćwiczenia jest pomiar ogniskowych soczewek skupiających i rozpraszających oraz badanie wad soczewek: aberracji sferycznej, aberracji chromatycznej i astygmatyzmu.

Zagadnienia do przygotowania:

- podstawowe wiadomości dotyczące rozchodzenia się światła: załamanie i odbicie światła, dyspersja i zależność współczynnika załamania światła od długości fali;
- soczewki: rodzaje i zastosowanie soczewek, powstawanie obrazu w soczewce skupiającej i rozpraszającej, równanie soczewki;

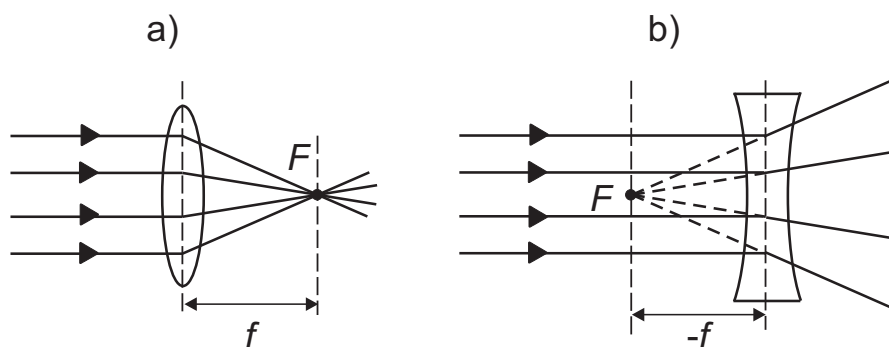
- metody wyznaczania ogniskowych soczewek: w oparciu o równanie soczewki, metoda Bessela, ogniskowa układu dwóch cienkich soczewek;
- wady soczewek: aberracja sferyczna, aberracja chromatyczna, astygmatyzm.

Literatura podstawowa: [1], [2], [14].

#### 4.8.1 Podstawowe pojęcia i definicje

##### Soczewki

Soczewka jest zbudowana z przezroczystego materiału ograniczonego z dwóch stron powierzchniami sferycznymi. Środki ograniczających powierzchni sferycznych znajdują się na osi optycznej soczewki. Promienie świetlne przechodzące przez soczewkę ulegają dwukrotnemu załamaniu na granicy ośrodków, np. powietrze – szkło, a następnie szkło – powietrze. Równoległe promienie, padające na soczewkę skupiającą prostopadłe do jej płaszczyzny po przejściu przez soczewkę przecinają się w jednym punkcie  $F$  zwanym ogniskiem głównym soczewki (rysunek 4.8.1a). Odległość ogniska soczewki  $F$  od płaszczyzny środkowej soczewki jest równa jej ogniskowej  $f$ . Soczewka rozpraszająca posiada ognisko pozorne, w którym przecinają się przedłużenia promieni załamanych (rysunek 4.8.1b).



Rys. 4.8.1: Ogniska soczewki skupiającej i rozpraszającej.

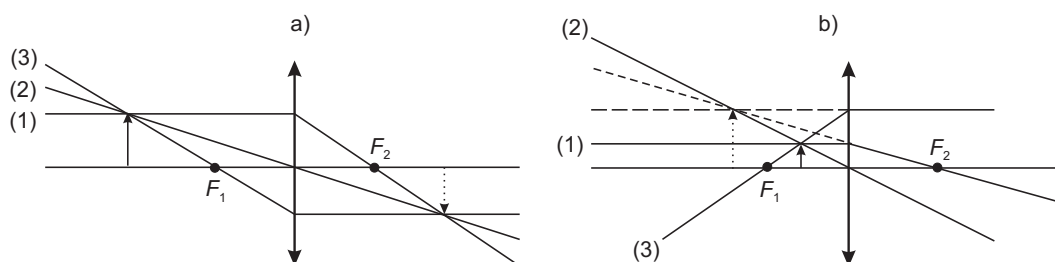
Dla soczewek cienkich, tzn. takich, których grubość jest mała w porównaniu z jej promieniami krzywizny  $R_1$ ,  $R_2$ , zachodzi:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.8.1)$$

gdzie  $n$  jest współczynnikiem załamania materiału, z którego jest wykonana soczewka względem, otaczającego ją środowiska.

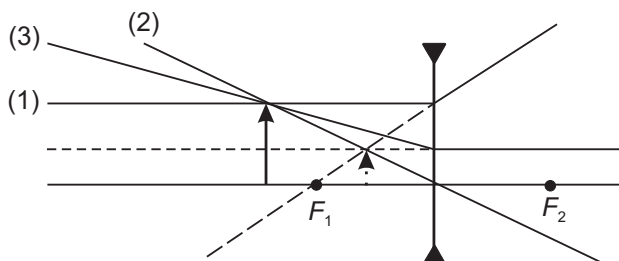
W celu konstrukcji obrazu w soczewce skupiającej wykorzystuje się bieg charakterystycznych promieni: (1) biegnącego równoległe do osi optycznej soczewki, (2) przechodzącego przez środek optyczny soczewki oraz (3) przechodzącego przez ognisko soczewki  $F_1$ . Promień (1) po załamaniu przechodzi przez ognisko  $F_2$ , promień (2) nie

zmienia swojego kierunku, a promień (3) po załamaniu biegnie równoległe do osi soczewki (rysunek 4.8.2). Jeśli odległość przedmiotu od soczewki skupiającej jest większa od jej ogniskowej (rysunek 4.8.2a), to powstaje obraz rzeczywisty. Obraz ten jest wyznaczony przez przecięcie promieni załamanych. Natomiast, gdy odległość przedmiotu od soczewki jest mniejsza od jej ogniskowej, to powstaje obraz pozorny na przedłużeniu rozbieżnej wiązki promieni załamanych (rysunek 4.8.2b).



Rys. 4.8.2: Konstrukcja obrazu w soczewce skupiającej.

Soczewka rozpraszająca daje obraz pozorny. Do jego konstrukcji wykorzystuje się bieg charakterystycznych promieni: (1) biegnącego równoległe do osi optycznej soczewki, (2) przechodzącego przez środek optyczny soczewki oraz (3) biegnącego w kierunku ogniska  $F_2$ . Promień (1) ulega załamaniu w taki sposób, że jego przedłużenie przechodzi przez ognisko  $F_1$ . Promień (2) nie zmienia swojego biegu, a promień (3) po przejściu przez soczewkę jest równoległy do jej osi optycznej (rysunek 4.8.3).



Rys. 4.8.3: Konstrukcja obrazu w soczewce rozpraszającej.

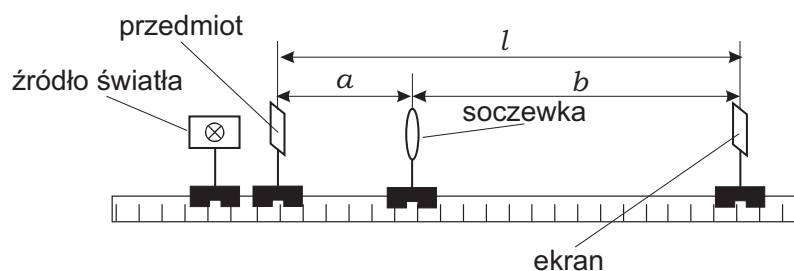
### Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej w oparciu o równanie soczewki

Równanie soczewki wiąże ze sobą odległość przedmiotu od soczewki  $a$  oraz odległość obrazu od soczewki  $b$  z jej ogniskową  $f$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad (4.8.2)$$

Przesuwając soczewkę skupiającą wzdłuż ławy optycznej (rysunek 4.8.4), można znaleźć takie położenie soczewki, w którym obserwuje się ostry powiększony obraz przedmiotu. Mierząc odległości  $a$  i  $b$  można wyznaczyć ogniskową soczewki korzystając z przekształconego wzoru (4.8.2)

$$f = \frac{ab}{a+b}. \quad (4.8.3)$$



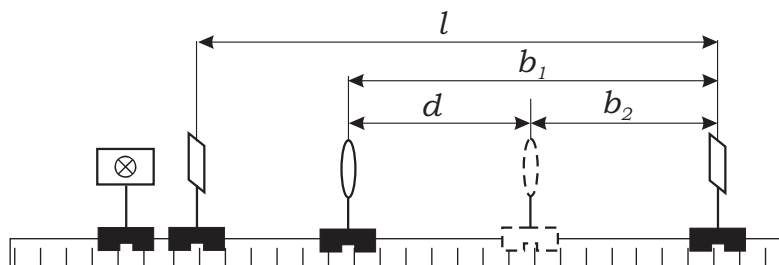
Rys. 4.8.4: Ława optyczna do wyznaczania ogniskowych soczewek.

### Wyznaczanie ogniskowej soczewki skupiającej metodą Bessela

Przesuwając soczewkę wzdłuż ławy optycznej, można znaleźć dwie odległości soczewki od ekranu  $b_1$  i  $b_2$  (rysunek 4.8.5), w których obserwowany jest ostry obraz. W jednym położeniu obraz ten jest powiększony ( $b_1$ ), a w drugim pomniejszony ( $b_2$ ). Odległości pomiędzy ekranem a soczewką, przy których jest obserwowany ostry obraz, można wyznaczyć z równania soczewki

$$\frac{1}{l-b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (4.8.4)$$

gdzie  $l$  jest ustaloną odległością między przedmiotem a ekranem (rysunek 4.8.5). Równanie (4.8.4) jest równaniem kwadratowym ze względu na  $b$  posiadającym dwa rozwiązania:



Rys. 4.8.5: Metoda Bessela wyznaczania ogniskowych soczewek.

$$b_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad b_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad (4.8.5)$$

pod warunkiem iż  $l > 4f$ . Odległość  $d$  między położeniami soczewki, w których widoczny jest ostry obraz wynosi:

$$d = b_1 - b_2 = \sqrt{l^2 - 4lf}. \quad (4.8.6)$$

Mierząc odległość między położeniami soczewki, w których jest obserwowany ostry obraz przedmiotu, można wyznaczyć ogniskową soczewki

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l} = \frac{(l + d)(l - d)}{4l}. \quad (4.8.7)$$

### Ogniskowa układu soczewek

Ogniskowa  $f$  układu soczewek zbudowanego z dwóch cienkich soczewek o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$  znajdujących się blisko siebie spełnia zależność:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \quad (4.8.8)$$

która jest konsekwencją równania soczewki (4.8.2). W przypadku gdy odległość między soczewkami wynosi  $\delta$ , ogniskowa układu soczewek wynosi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{\delta}{f_1 f_2}. \quad (4.8.9)$$

### Aberracja sferyczna

Równanie soczewki (4.8.2) jest wyprowadzone przy założeniu, że soczewka jest cienka, a wiązka padających na nią promieni jest niezbyt odległa od głównej osi optycznej soczewki. W przypadku gdy wiązka światła padającego na soczewkę jest szeroka, podczas przejścia przez soczewkę promienie przyosiowe (bliskie osi głównej soczewki) załamują się inaczej niż brzegowe (dalekie od osi głównej). Promienie brzegowe załamują się silniej, a promienie przyosiowe słabiej. Dlatego równoległa wiązka po przejściu przez soczewkę nie skupi się w jednym punkcie. Ognisko dla promieni przyosiowych znajdzie się dalej od soczewki, a dla promieni peryferyjnych bliżej soczewki. Odległość między ogniskami dla promieni przyosiowych i brzegowych jest miarą podłużnej aberracji sferycznej.

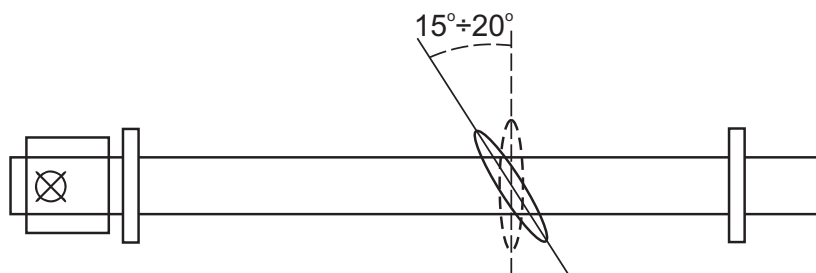
### Aberracja chromatyczna

Aberracja chromatyczna związana jest ze zjawiskiem dyspersji. Ze względu na zależność współczynnika załamania światła od długości fali, różne składowe światła białego przechodzące przez to samo miejsce w soczewce zostaną różnie załamane. W związku

z tym soczewka będzie miała różne ogniska dla różnych długości fali – patrz równanie (4.8.1). Spowodowane jest to tym, że soczewka zachowuje się jak pryzmat rozszczepiający przechodzące przez nią światło białe. Promienie czerwone po przejściu przez soczewkę załamują się słabiej od promieni fioletowych, dlatego ognisko soczewki dla promieni czerwonych znajduje się dalej od soczewki niż ognisko dla promieni fioletowych.

### Astygmatyzm

Równoległa wiązka promieni świetlnych padających na soczewkę pod dużymi kątami względem głównej osi optycznej po przejściu przez soczewkę (rysunek 4.8.6) nie przecina się w jednym punkcie, ale daje rozmytą plamę świetlną. Spowodowane jest to tym, że różne części wiązki ulegają załamaniu na innych fragmentach soczewki różniących się warunkami geometrycznymi. Dlatego obraz przedmiotu nie znajdującego się na osi optycznej soczewki jest zdeformowany.



Rys. 4.8.6: Ława optyczna do badania astygmatyzmu soczewek (widok z góry).

Efekt ten można zbadać używając jako przedmiotu matówki z narysowanymi prostopadłymi liniami. Przesuwając soczewkę można znaleźć dwa charakterystyczne położenia. W jednym z nich widoczne są tylko linie pionowe (soczewka znajduje się dalej od ekranu), a w drugim tylko poziome (soczewka znajduje się bliżej ekranu). Odległość między wspomnianymi punktami zależy od kąta padania wiązki na soczewkę i jest miarą pełnego astygmatyzmu.

### 4.8.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego wchodzi następujące przyrządy: ława optyczna z naniesioną podziałką, źródło światła, soczewki skupiające i rozpraszające, przedmiot (litera na matówce), ekran, gruba soczewka do badania wad soczewek, przysłony do badania aberracji sferycznej (przepuszczające promienie przyosiowe, pośrednie i brzegowe), filtry do badania aberracji chromatycznej (niebieski, czerwony i zielony), matówka z naniesioną siatką prostopadłych linii, latarka.

### Metoda pomiarowa

Ogniskowe soczewek wyznacza się przy użyciu ławy optycznej. Zasadniczą częścią pomiarów jest znajdowanie położenia soczewki, przy którym obserwowany jest ostry obraz przedmiotu. Dla ułatwienia pomiarów należy wykonywać je w ciemności, oświetlając ławę optyczną latarką. Określenie położenia soczewki, w którym obserwuje się ostry obraz jest subiektywne, dlatego położenie soczewki dla ustalonej odległości przedmiot – ekran należy znajdować kilkakrotnie.

W celu uzyskania możliwie najlepszych warunków eksperymentalnych należy układ pomiarowy zestawić w taki sposób, aby wszystkie elementy wchodzące w jego skład znajdowały się na takiej samej wysokości. Płaszczyzny przedmiotu, ekranu i soczewek winny być prostopadłe do wiązki światła, zaś przedmiot powinien znajdować się możliwie najbliżej źródła światła.

Metoda Bessela jest dokładniejszą od metody wyznaczania ogniskowej soczewki w oparciu o jej równanie. Dlatego do wyznaczenia ogniskowej soczewki rozpraszającej oraz do badania wad soczewek należy użyć tej metody. Kolejną zaletą metody Bessela jest to, że wykorzystuje się odległości między położeniami soczewki, w których obserwowany jest ostry obraz. Ponieważ jest to pomiar względny, metoda ta nie wymaga znajomości dokładnego położenia płaszczyzn głównych soczewki. Dlatego między innymi metoda Bessela może być stosowana do wyznaczania ogniskowych soczewek grubych.

### Przebieg doświadczenia

Dla wybranej soczewki skupiającej wyznaczyć jej ogniskową metodą wykorzystującą równanie soczewki. W tym celu ustalić i zmierzyć odległość pomiędzy przedmiotem a ekranem. Odczytać wielokrotnie położenie soczewki, dla którego obserwuje się ostry powiększony obraz. Powtórzyć pomiar obracając soczewkę o  $180^\circ$ . W ten sposób uwzględnia się fakt, iż położenie soczewki może być przesunięte względem wskaźnika używanego do odczytu jej położenia. Wykonać analogiczne pomiary dla innych odległości pomiędzy przedmiotem a ekranem.

Dla wcześniej badanej soczewki skupiającej wyznaczyć jej ogniskową korzystając z metody Bessela. W tym celu ustalić i zmierzyć odległość pomiędzy przedmiotem a ekranem. Odczytać wielokrotnie położenia soczewki, dla których obserwuje się ostre obrazy (powiększony i pomniejszony). Pomiary powtórzyć dla innych odległości pomiędzy przedmiotem a ekranem.

Ogniskową soczewki rozpraszającej wyznacza się mierząc ogniskową układu soczewek składającego się z soczewki rozpraszającej i soczewki skupiającej o znanej ogniskowej. Badany układ soczewek powinien być skupiający (tzn. powinien dawać obraz rzeczywisty przedmiotu). Umocować blisko siebie badaną wcześniej soczewkę skupiającą i wybraną soczewkę rozpraszającą. Zmierzyć ogniskową układu soczewek korzystając z metody Bessela.



Do badania aberracji sferycznej wykorzystać soczewkę grubą. Montując na soczewce kolejne przysłony wyznaczyć (korzystając z metody Bessela) ogniskową dla promieni przyosiowych, pośrednich i brzegowych.

W celu zbadania aberracji chromatycznej soczewki wyznaczyć jej ogniskową (korzystając z metody Bessela) dla światła czerwonego, zielonego i niebieskiego. W tym celu umieścić odpowiedni filtr pomiędzy źródłem światła a przedmiotem. Wyznaczanie ogniskowej dla światła czerwonego, niebieskiego i zielonego ze względu na właściwości ludzkiego oka jest mniej precyzyjne.

Badając astygmatyzm soczewki jako przedmiotu należy użyć matówki z naniesioną siatką prostopadłych linii. Soczewkę umieścić na statywie zaopatrzonym w podziałkę kątową (rysunek 4.8.6). W pierwszej kolejności należy odnaleźć takie położenie soczewki, w którym jej płaszczyzna główna jest prostopadła do wiązki światła, a na ekranie jest obserwowany ostry powiększony obraz przedmiotu. Następnie obrócić soczewkę o około  $15^{\circ}$ – $20^{\circ}$  i znaleźć dwa charakterystyczne położenia, dla których w obrazie przedmiotu są widoczne jedynie linie poziome lub pionowe. Wielokrotnie odczytać położenia soczewki dla dwóch wymienionych przypadków. Odległość między tymi położeniami zależy od kąta, jaki płaszczyzna soczewki tworzy z wiązką światła.

Badane wady soczewek występują równocześnie. Podczas badania jednej z wybranych wad, może się okazać, że wpływ innej wady w sposób istotny zakłóca pomiary. Dlatego przy badaniu aberracji chromatycznej i astygmatyzmu, celowym może okazać się zminimalizowanie wpływu aberracji sferycznej poprzez zastosowanie odpowiednich przysłon (wybrać tylko promienie przyosiowe).

### 4.8.3 Opracowanie wyników

#### Ogniskowa soczewki skupiającej

Obliczyć ogniskową soczewki skupiającej używając metody wykorzystującej bezpośrednio równanie soczewki oraz metody Bessela. Obliczając niepewność pomiarową wyznaczenia ogniskowej należy pamiętać, że pewne wielkości są obarczone niepewnością statystyczną, a pewne niepewnością systematyczną. Porównać ogniskowe soczewki wyznaczone dwiema metodami.

#### Ogniskowa soczewki rozpraszającej

Obliczyć ogniskową układu soczewek skupiającej i rozpraszającej oraz jej niepewność pomiarową. Ogniskową soczewki rozpraszającej wyznaczyć korzystając z równania (4.8.8) i wyznaczonej wcześniej ogniskowej soczewki skupiającej. Określić niepewność pomiarową wyznaczonej ogniskowej.

### Aberracja sferyczna i chromatyczna

Obliczyć ogniskową grubej soczewki dla kolejnych stosowanych przysłon. Jako miarę aberracji sferycznej podać różnicę ogniskowych dla promieni przyosiowych i brzegowych. Wyznaczyć niepewność pomiarową wielkości aberracji sferycznej.

Obliczyć ogniskową soczewki dla kolejnych stosowanych filtrów. Jako miarę aberracji chromatycznej podać różnicę ogniskowych dla światła czerwonego i niebieskiego. Określić niepewność pomiarową wielkości aberracji chromatycznej.

### Astygmatyzm

Obliczyć różnicę położenia soczewki, przy których widoczne są tylko linie pionowe lub tylko linie poziome. Określić niepewność pomiarową obliczonej różnicy. Wyznaczona wielkość jest miarą pełnego astygmatyzmu.

## 4.9 Badanie stanu polaryzacji światła

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z różnymi rodzajami polaryzacji światła, sposobami uzyskania danego typu polaryzacji oraz doświadczalnego sprawdzenia stanu polaryzacji światła.

*Zagadnienia do przygotowania:*

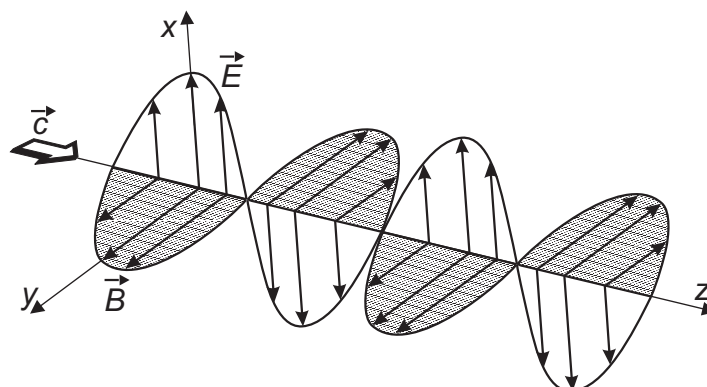
- światło jako fala elektromagnetyczna;
- zjawisko polaryzacji światła: polaryzacja liniowa, polaryzacja kołowa, polaryzacja eliptyczna;
- metody polaryzacji światła: podwójne załamanie w kryształach, dichroizm kryształów, odbicie światła; polaryzatory;
- prawo Malusa;
- płytka ćwierćfalowa (ćwierćfalówka) i jej działanie, półfalówka i jej działanie.

Literatura podstawowa: [2], [35].

### 4.9.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Światło jest falą elektromagnetyczną o długości z zakresu 300 do 700 nm (w próżni). Granice te zostały przyjęte umownie i zawierają promieniowanie elektromagnetyczne z obszaru widzialnego (fiolet – czerwień). Światło, jako fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. Oznacza to, że płaszczyzna drgań wektora pola elektrycznego  $\vec{E}$  oraz płaszczyzna drgań wektora pola magnetycznego  $\vec{B}$  są prostopadłe do kierunku wektora falowego, tzn. do kierunku propagacji światła (w ośrodkach izotropowych). Jednocześnie wektory  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  są prostopadłe do siebie nawzajem. Zjawisko polaryzacji występuje tylko dla fal poprzecznych. W przypadku światła za kierunek polaryzacji przyjmujemy wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$ , który nazywany jest „wektorem świetlnym”.

Zwykła wiązka światła emitowana jest przez wiele niezależnych atomów lub molekuł źródła. Każdy atom emituje falę z jej własną orientacją wektora  $\vec{E}$  (rysunek 4.9.1). Przy



Rys. 4.9.1: Fala elektromagnetyczna rozchodząca się w kierunku z.

dużej liczbie atomów źródła wszystkie kierunki wektora  $\vec{E}$  są równie prawdopodobne i wypadkowa fala, będąca superpozycją fal emitowanych przez poszczególne atomy, jest światłem niespolaryzowanym (rysunek 4.9.2a). Jeżeli drgania wektora natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  zachodzą tylko w jednym, określonym kierunku to światło jest spolaryzowane liniowo (rysunek 4.9.2b).

Fala monochromatyczna o długości  $\lambda$  rozchodząca się wzdłuż osi z i spolaryzowana w płaszczyźnie  $xz$  opisana jest wzorem:

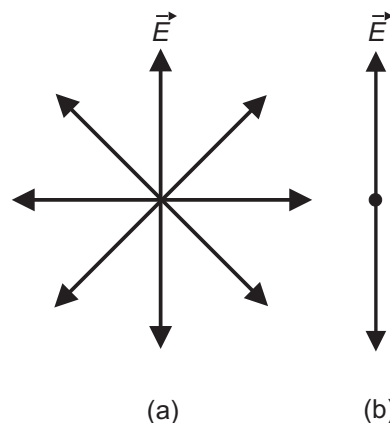
$$E_x = E_{0x} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right), \quad (4.9.1)$$

gdzie:  $E_{0x}$  – amplituda drgań wektora  $\vec{E}$ ,  $T$  – okres drgań.

Polaryzacja liniowa jest najprostszym, ale nie jedynym rodzajem polaryzacji. Rozważmy wiązkę światła poruszającą się w kierunku z i posiadającą wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  będący superpozycją dwu fal o wektorach pola elektrycznego skierowanych wzdłuż osi x i y:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) \\ E_y &= E_{0y} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \varphi \right) \end{aligned} \quad (4.9.2)$$

W zależności od amplitud  $E_{0x}$  i  $E_{0y}$  oraz względnego przesunięcia fazowego  $\varphi$  mamy do czynienia z różną polaryzacją. Jeżeli przesunięcie fazowe  $\varphi = n\pi$  ( $n$  – liczba natu-



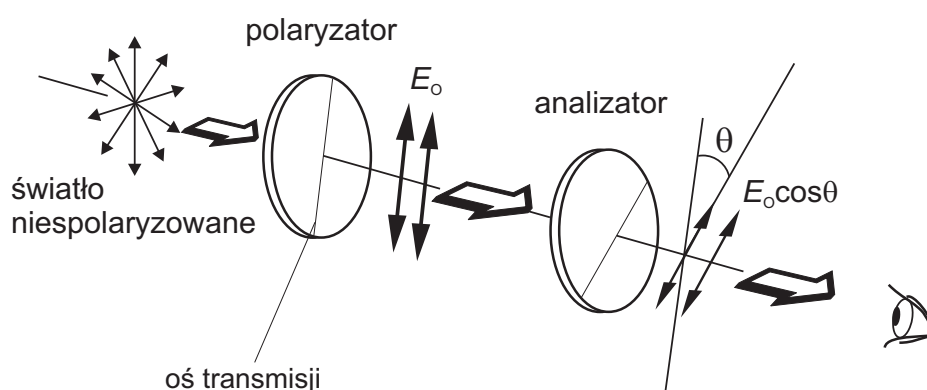
Rys. 4.9.2: a) Światło niespolaryzowane b) Światło spolaryzowane liniowo. Kierunek rozchodzenia się fali jest prostopadły do płaszczyzny rysunku.

ralna) to fala jest spolaryzowana liniowo. Jeżeli  $E_{0x} = E_{0y}$  oraz  $\varphi = (2n + 1)\pi/2$  to fala spolaryzowana jest kołowo – łatwo zobaczyć, że w dowolnym, ustalonym punkcie przestrzeni pole zmienia się w czasie tak, że koniec wektora  $\vec{E}$  zatacza pełny okrąg. Polaryzację eliptyczną otrzymamy w pozostałych przypadkach – wtedy koniec wektora  $\vec{E}$  zakreśla w danym punkcie elipsę.

Istnieją proste sposoby otrzymania światła spolaryzowanego liniowo poprzez usunięcie z wiązki światła niespolaryzowanego wszystkich fal oprócz tych, których wektor pola elektrycznego oscyluje w jednej płaszczyźnie. Poniżej omówione są trzy podstawowe metody otrzymywania światła spolaryzowanego liniowo.

### Selektywna absorpcja

Światło pada na specjalny rodzaj materiału, posiadający właściwość przepuszczania fal, których wektor elektryczny oscyluje w płaszczyźnie równoległej do pewnego kierunku (oś transmisji), a pochłaniania fal o polaryzacji prostopadłej do tej osi. Takie zjawisko znane jest pod nazwą dichroizmu. W 1938 roku E.H. Land odkrył materiał, który nazwano polaroidem, a który polaryzuje światło poprzez selektywną absorpcję wywołaną przez zorientowane molekuly. Materiał ten jest wytwarzany w postaci cienkich arkuszy, zawierających długie łańcuchy wodorowo-węglowe polialkoholu winylowego domieszkowanego jodkiem potasu. Łańcuchy polimerowe można orientować liniowo poprzez mechaniczne rozciąganie ogrzanych arkuszy polimeru. Jodek potasu łączy się z łańcuchami polialkoholu poprzez wiązania wodorowe powodując powstanie przewodnictwa jonowego wzdłuż łańcuchów. W rezultacie molekuly absorbują fale świetlne, których wektor elektryczny jest równoległy do ich osi, a przepuszczają fale, których wektor elektryczny jest do niej prostopadły. Zwyczajowo, kierunek prostopadły do łańcuchów molekularnych nazywany jest osią transmisji. W idealnym polaryzatorze, przepuszczane są wszystkie fale, których wektor elektryczny jest równoległy do osi transmisji, a wszystkie z wektorem prostopadłym są absorbowane.



Rys. 4.9.3: Polaryzacja światła przy przejściu przez dwie płytki polaryzujące.

$$I = I_0 \cos^2 \theta, \quad (4.9.3)$$

Rysunek 4.9.3 przedstawia przejście światła niespolaryzowanego przez dwie płytki polaryzujące, których osie transmisji tworzą kąt  $\theta$ . Pierwsza z nich, zwana polaryzatorem, powoduje liniową polaryzację światła w kierunku zgodnym z jej osią transmisji. Po przejściu przez polaryzator, fala świetlna jest reprezentowana przez wektor elektryczny  $\vec{E}_0$ . Druga płytka, zwana analizatorem, przepuszcza tylko składową równoległą do jej osi transmisji, czyli  $E_0 \cos \theta$ . Natężenie światła jest wprost proporcjonalne do kwadratu amplitudy pola elektrycznego, a więc natężenie światła, transmitowanego przez analizator wynosi:

gdzie  $I_0$  to natężenie światła spolaryzowanego liniowo, padającego na analizator. Równanie (4.9.3) znane jest jako prawo Malusa. Z jego analizy wynika, że maksimum natężenia występuje, gdy osie transmisji obu płytek są równoległe ( $\theta = 0$  lub  $180^\circ$ ), natomiast w przypadku osi prostopadłych natężenie światła wynosi zero.

### Odbicie

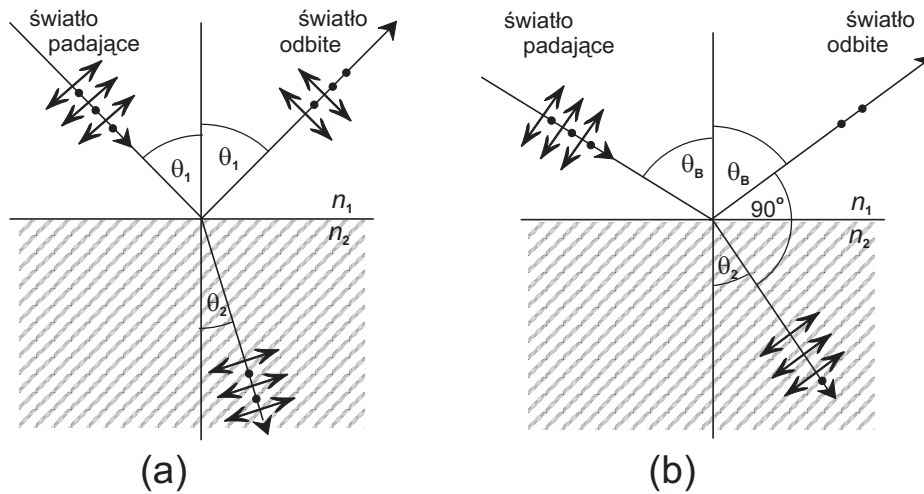
Przy odbiciu niespolaryzowanej wiązki światła od powierzchni można otrzymać światło całkowicie lub częściowo spolaryzowane, w zależności od kąta padania na powierzchnię odbijającą.

Rysunek 4.9.4a przedstawia przypadek, gdy wiązka niespolaryzowanego światła pada na powierzchnię pod kątem  $0^\circ < \theta_1 < 90^\circ$ . Pole elektryczne tej fali można przedstawić za pomocą dwóch składowych wzajemnie prostopadłych. Jedna ze składowych (kropki) jest prostopadła do płaszczyzny padania wyznaczonej przez promień padający i normalną do powierzchni granicznej ośrodków, natomiast druga składowa (strzałki) leży w płaszczyźnie padania. Składowa prostopadła ulega odbiciu w większym stopniu niż równoległa, co powoduje, że zarówno wiązka odbita jak i załamana są częściowo spolaryzowane. W przypadku, gdy kąt padania  $\theta_1$  spełnia warunek, że promień odbity i załamany są wzajemnie prostopadłe, to wiązka światła odbitego jest całkowicie spolaryzowana i wektor jej pola elektrycznego jest prostopadły do płaszczyzny padania, natomiast wiązka załamana jest częściowo spolaryzowana (rysunek 4.9.4b). Z geometrii wynika, że  $\theta_B + 90^\circ + \theta_2 = 180^\circ$  więc  $\theta_2 = 90^\circ - \theta_B$ . Stosując prawo załamania można znaleźć związek pomiędzy współczynnikiem załamania powierzchni odbijającej i kątem padania  $\theta_B$ , przy którym następuje całkowita polaryzacja światła:

$$n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_2} = \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} = \operatorname{tg} \theta_B, \quad (4.9.4)$$

bo  $\sin \theta_2 = \sin (90^\circ - \theta_B) = \cos \theta_B$ . Równanie  $n = \operatorname{tg} \theta_B$  nosi nazwę prawa Brewstera, a kąt padania  $\theta_B$  – kąta Brewstera.

Fakt częściowej polaryzacji światła w wyniku odbicia jest wykorzystywany w pewnego typu okularach przeciwsłonecznych. Światło słoneczne odbite od wody, szkła oraz metalicznych powierzchni jest częściowo spolaryzowane i wystarczy zastosować soczewki z materiału, którego oś transmisji jest prostopadła do silniejszej składowej światła

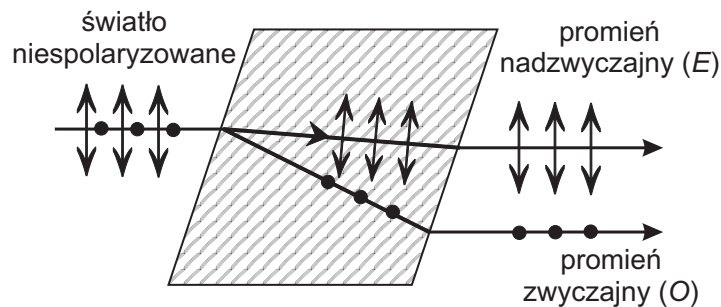


Rys. 4.9.4: Polaryzacja światła przez odbicie. a) częściowa polaryzacja wiązki załamanej i odbitej b) całkowita polaryzacja wiązki odbitej dla kąta padania równego kątowi Brewstera.

spolaryzowanego, by ją wygasić. Z uwagi na to, że większość powierzchni odbijających światło w życiu codziennym jest pozioma w okularach tych stosuje się pionową oś transmisji.

### Podwójne załamanie

Fala świetlna rozchodząca się w ośrodkach jednorodnych takich, jak szkło porusza się we wszystkich kierunkach z tą samą prędkością. Istnieją jednak materiały krystaliczne np. kalcyt lub kwarc, dla których prędkość światła ma różną wartość w zależności od kierunku rozchodzenia i polaryzacji. Takie materiały posiadają dwa (a nawet więcej, jak będzie przedyskutowane poniżej) różne współczynniki załamania. Zjawisko nosi nazwę podwójnego załamania, a kryształy nazywane są dwójłomnymi. Rysunek 4.9.5 przedstawia bieg promieni w kryształach dwójłomnym.



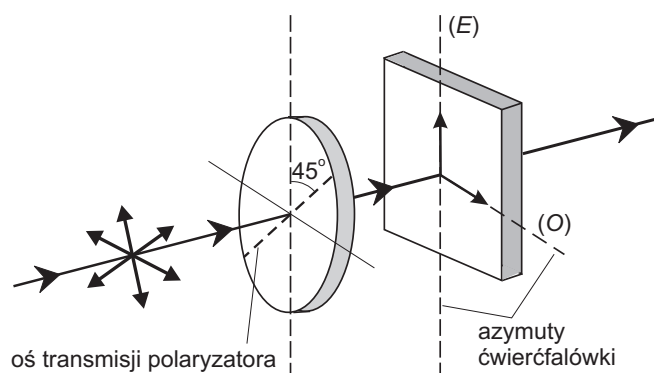
Rys. 4.9.5: Bieg promieni światła w kryształach dwójłomnym.

Wiązka światła niespolaryzowanego padająca na kryształ dwójłomny ulega rozszczepieniu na dwa promienie spolaryzowane liniowo, poruszające się z różnymi prędkościami odpowiadającymi dwóm różnym kątom załamania. Obydwa promienie są spolaryzowane liniowo w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach (kropki i strzałki na rysunku). Jeden z nich, nazywany promieniem zwyczajnym ( $O$ ), charakteryzuje się współczynnikiem załamania  $n_O$ , który jest taki sam we wszystkich kierunkach (promień ten podlega prawu załamania), natomiast drugi, nadzwyczajny ( $E$ ) porusza się z różnymi prędkościami w zależności od kierunku i dlatego ma współczynnik załamania  $n_E$ , który zmienia się także w zależności od kierunku rozchodzenia się fali. W kryształach dwójłomnych istnieje jeden kierunek, tzw. oś optyczna, wzdłuż którego promienie zwyczajny i nadzwyczajny mają tę samą prędkość, czyli  $n_O = n_E$ . Natomiast, w kierunku prostopadłym do osi optycznej różnica pomiędzy wartościami współczynników załamania jest największa. Powyższe rozważania prowadzą do prostego wniosku, że w celu otrzymania światła spolaryzowanego liniowo, wystarczy zastosować kryształ dwójłomny i wygasić jeden z promieni.

### Polaryzacja kołowa i eliptyczna

W celu otrzymania światła spolaryzowanego kołowo lub eliptycznie należy zastosować polaryzator liniowy i płytkę ćwierćfalową. Jak już wspomniano wcześniej, światłem spolaryzowanym kołowo jest światło, w którym koniec wektora świetlnego porusza się jednostajnie po okręgu. Reprezentujemy to jako wynik superpozycji dwóch drgań do siebie prostopadłych, spolaryzowanych liniowo, posiadających tę samą amplitudę i częstość, ale różniących się w fazie o  $\pi/2$ . Taka sytuacja ma miejsce, gdy światło spolaryzowane liniowo (po przejściu przez polaryzator) pada pod odpowiednim kątem na płytkę ćwierćfalową tzw. „ćwierćfalówkę”. Ćwierćfalówka jest to cienka płytka z kryształu dwójłomnego, wycięta tak by oś optyczna kryształu była równoległa do powierzchni płytki. Grubość płytki  $d$  jest tak dobrana by przy kącie padania światła  $0^\circ$  różnica faz  $\varphi$  pomiędzy promieniem zwyczajnym ( $O$ ) i nadzwyczajnym ( $E$ ) wynosiła nieparzystą wielokrotność  $\pi/2$  dla danej długości fali  $\lambda$ , czyli  $\varphi = (2\pi d/\lambda) |n_O - n_E|$ . Kąt padania  $0^\circ$  wybrany jest tak by promienie te nie rozdzielały się przestrzennie przy przejściu przez płytkę. Na ćwierćfalówce zaznaczone są dwa wzajemnie prostopadłe kierunki, tzw. azymuty. Są to kierunki drgań promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego. Należy ustawić ćwierćfalówkę w taki sposób, aby płaszczyzna drgań światła spolaryzowanego liniowo tworzyła kąty  $45^\circ$  z azymutami. Takie ustawienie zapewnia równość amplitud promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego. Za ćwierćfalówką światło jest spolaryzowane kołowo (rysunek 4.9.6). Przy innym ustawieniu ćwierćfalówki (kąt  $\theta \neq 45^\circ$ ) otrzymuje się światło spolaryzowane eliptycznie.

Płytkę z tego samego materiału o grubości  $2d$  zmienia fazę względną promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego o wielokrotność  $\pi$ , taką płytkę nazywamy półfalówką, jak widać można ją złożyć z dwu odpowiednio ustawionych ćwierćfalówek. Przemyśl jak zmienia ona polaryzację światła przez nią przechodzącego i jak należy złożyć te dwie ćwierćfalówki by dostać półfalówkę.



Rys. 4.9.6: Otrzymywanie światła spolaryzowanego kołowo za pomocą polaryzatora liniowego i ćwierćfalówki.

## 4.9.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Do wykonania ćwiczenia służy układ doświadczalny (pokazany na rysunku 4.9.7), w skład którego wchodzi: źródło światła – wysokociśnieniowa lampa rtęciowa z zasilaczem, filtrem interferencyjnym dla żółtej linii rtęci (długość fali  $578 \text{ nm}$ ) i diafragmą; dwa polaryzatory liniowe; dwie płytki ćwierćfalowe  $\lambda/4$ ; soczewka; detektor promieniowania – element światłoczuły wraz ze wzmacniaczem i miernikiem uniwersalnym.



Rys. 4.9.7: Widok układu doświadczalnego.

Wszystkie elementy układu doświadczalnego umieszczone są w uchwytach, co umożliwia łatwą zmianę ich położenia na ławie optycznej. Uchwyty polaryzatora i płytek



ćwierćfalowych umożliwiając ich obrót wokół wiązki światła, a skala kątowna pozwala odczytać położenie.

Po sprawdzeniu czy zestaw jest kompletny i pobraniu miernika uniwersalnego, a przed wykonaniem właściwych pomiarów, należy sprawdzić czy wszystkie elementy optyczne znajdują się na jednakowej wysokości nad ławą optyczną. Następnie usuwając obie ćwierćfalówki i analizator ustawić pozostałe elementy układu (lampę, filtr, przesłonę, polaryzator, soczewkę i detektor) tak by uzyskać dobre oświetlenie detektora. W razie potrzeby do precyzyjnej regulacji położenia wiązki światła można użyć pokręteł znajdujących się na tylnej części obudowy lampy.

### Przebieg doświadczenia

W celu sprawdzenia stanu polaryzacji światła wychodzącego z polaryzatora liniowego ustawiamy go w pozycji  $0^\circ$ , a do układu opisanego powyżej dokładamy analizator (drugi polaryzator liniowy). Obracając analizator od położenia  $-90^\circ$  do  $90^\circ$  co  $5^\circ$  zapisywać wskazania woltomierza, w okolicy minimum i maksimum pomiary należy zageścić (dokonywać przy mniejszych zmianach kąta) by znaleźć te położenia jak najdokładniej. Przy pomiarach w okolicy minimum pamiętać o zmniejszeniu zakresu miernika tak by zwiększyć dokładność pomiaru. Sprawdzić także jakie są wskazania miernika przy wiązce światła zasłoniętej np. kartką papieru (tło, prąd ciemny miernika). Na podstawie tych pomiarów ustalić czy światło jest spolaryzowane liniowo i w jakim kierunku.

Ustawivszy skrzyżowane polaryzator i analizator wstawić pomiędzy nie pierwszą ćwierćfalówkę i ustalić jej osie główne (azymuty). Wcześniej zastanowić się dlaczego są one dane przez położenia minimów natężenia światła transmitowanego przez układ przy obracaniu ćwierćfalówki. Podobnie jak wcześniej ustalić położenia tych minimów jak najdokładniej. W ten sam sposób ustalić położenia azymutów drugiej ćwierćfalówki.

Dla położenia, które według dotychczasowych pomiarów odpowiada kątowi  $45^\circ$  między azymutami, a kierunkiem polaryzacji światła padającego sprawdzić czy stan polaryzacji odpowiada polaryzacji kołowej – w wyniku obrotu analizatora powinno się dostać niezmiennie wartości natężenia światła. Zastanowić się dlaczego tak powinno być. Jeśli zależność nie jest płaska spróbować poprawić ustawienie ćwierćfalówki tak by dostać jak najbardziej stałe wartości.

Wstawiwszy odpowiednio zorientowaną drugą ćwierćfalówkę (to jak ma być zorientowana przemyśleć wcześniej na podstawie fragmentu o półfalówce), zmieniając położenie analizatora sprawdzić jak wyżej czy udaje się uzyskać z powrotem polaryzację liniową.

Dla jednego lub więcej dowolnego innego kąta, np.  $30^\circ$  czy  $60^\circ$ , pomiędzy azymutami ćwierćfalówki, a kierunkiem polaryzacji światła sprawdzić eliptyczność uzyskanego światła badając jak poprzednio zależność wskazań miernika od położenia analizatora. Używając drugiej ćwierćfalówki sprawdzić czy i w tym wypadku da się odzyskać polaryzację liniową światła przechodzącego przez układ.

### 4.9.3 Opracowanie wyników

Na podstawie pomiarów polaryzacji światła w pierwszej części sprawdzić prawo Malusa, tj. sprawdzić czy wyniki doświadczalne są zgodne z zależnością teoretyczną  $I = I_0 \cos^2 \theta$ . W tym celu do uzyskanych w tej części wyników dopasować krzywą postaci  $U(\theta) = a_1 \cos^2(\theta + a_2) + a_3$ . Uwzględniając istnienie zmierzonego tła (parametr  $a_3$ ) proszę przedyskutować, czy założenie o liniowej polaryzacji światła za pierwszym polaryzatorem jest poprawne. Określić stan polaryzacji światła.

Wykonać wykresy danych otrzymanych dla światła spolaryzowanego kołowo i eliptycznie oraz przedyskutować w jaki sposób wnioskujemy z tych wykresów, że światło było spolaryzowane kołowo lub eliptycznie. Podać położenia katowe osi głównych elipsy oraz wyznaczyć doświadczalną i teoretyczną wartość eliptyczności światła dla znanych ustawień kątów pomiędzy polaryzacją światła padającego, a azymutami ćwierćfalówki.

## 4.10 Skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła w cieczech

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie współczynnika skręcenia właściwego płaszczyzny polaryzacji światła dla wodnego roztworu cukru.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- światło jako fala elektromagnetyczna;
- zjawisko polaryzacji światła: polaryzacja liniowa, pryzmat Nicola, polaryzacja eliptyczna, polaryzacja kołowa;
- metody polaryzacji światła: podwójne załamanie w kryształach, dichroizm kryształów, odbicie światła;
- prawo Malusa;
- skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła (ciała optycznie czynne);
- prawo Biota (zależność kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji od stężenia roztworu);
- budowa i zasada działania polarymetru Laurenta, płytka półcieniowa;
- zasada działania noniusza.

Literatura podstawowa: [2], [14].

### 4.10.1 Podstawowe pojęcia i definicje

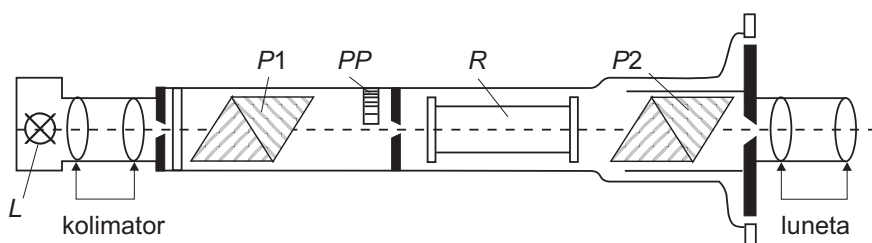
Zagadnienia związane z polaryzacją światła opisane są w rozdziale 4.9. Tutaj omówione są pozostałe zagadnienia, których znajomość jest konieczna do wykonania ćwiczenia.

Współczynnik skręcenia właściwego płaszczyzny polaryzacji światła jest wielkością charakterystyczną dla ciał optycznie czynnych. Ciała te skręcają płaszczyznę polaryzacji światła spolaryzowanego liniowo na skutek asymetrii budowy cząsteczek. W wodnym roztworze cukru za to skręcenie odpowiedzialny jest asymetryczny atom węgla w cząsteczce cukru. Wiązka światła spolaryzowanego liniowo padając na ciało optycznie czynne ulega rozdzieleniu na dwie wiązki spolaryzowane kołowo prawo- i lewoskrętnie.

Po wyjściu z kryształu wiązki dodają się, a powstała wiązka światła spolaryzowanego liniowo ma inny kierunek płaszczyzny polaryzacji niż pierwotnie. Kąt  $\alpha$  skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest wprost proporcjonalny do długości  $l$  drogi przebytej przez światło w cieczy oraz stężenia roztworu  $c$  (prawo Biota):

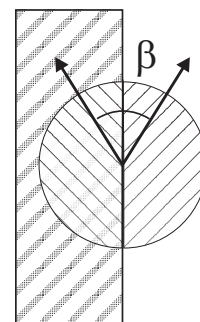
$$\alpha = \alpha_0 cl. \quad (4.10.1)$$

Współczynnik proporcjonalności  $\alpha_0$  jest współczynnikiem skręcenia właściwego płaszczyzny polaryzacji światła i zależy od właściwości substancji optycznie czynnej. We wzorze (4.10.1) stężenie  $c$  powinno być wyrażone jako stosunek masy substancji rozpuszczonej do objętości roztworu. Tylko wtedy kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji  $\alpha$  jest liniowo zależny od stężenia w całym zakresie stężeń.



Rys. 4.10.1: Schemat polarymetru Laurenta.  $L$  – wbudowana lampa sodowa;  $P1$  – pryzmat Nicol, polaryzator;  $P2$  – pryzmat Nicol, analizator;  $R$  – rurka z badaną cieczą;  $PP$  – płytka półcieniowa.

Do pomiaru kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji służy polarymetr Laurenta, którego schemat przedstawia rysunek 4.10.1. Monochromatyczne światło z lampy sodowej  $L$  pada na kolimator (patrz opis w rozdziale 4.11) formujący równoległą wiązkę światła, która po przejściu przez polaryzator  $P1$  jest spolaryzowana liniowo. Płaszczyzna polaryzacji tej wiązki, po przejściu przez ciecz optycznie czynną w rurce, ulega skręceniu. Przy pomiarze kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji wykorzystuje się fakt, że oko może z dużą dokładnością stwierdzić różnice oświetlenia poszczególnych części pola widzenia. Zastosowana w przyrządzie płytka półcieniowa  $PP$  przesłania częściowo pole widzenia. Płytka wykonana jest z kwarcu skręcającego płaszczyznę polaryzacji, co powoduje, że za płytką płaszczyzny polaryzacji poszczególnych części wiązki światła tworzą ze sobą niewielki kąt  $\beta$  (rysunek 4.10.2).



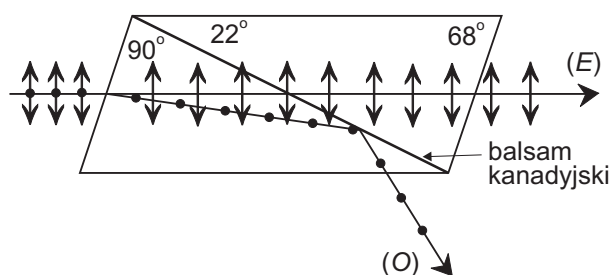
Rys. 4.10.2: Płytka półcieniowa.

W celu wyznaczenia kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji należy w nieobecności cieczy optycznie czynnej ustawić analizator w ten sposób, aby całe pole widzenia (część z płytką półcieniową i bez niej) miało jednakowe oświetlenie. Oznacza to ustawienie

analizatora w takiej pozycji, że jego oś pokrywa się z dwusieczną kąta  $\beta$ . Po wstawieniu cieczy optycznie czynnej, płaszczyzna polaryzacji ulega skręceniu o taki sam kąt w całym polu widzenia, co powoduje różnice oświetlenia poszczególnych części. Przywrócenie równego oświetlenia dokonywane jest przez obrót analizatora  $P2$  dokładnie o kąt równy kątowi skręcenia płaszczyzny polaryzacji przez badaną ciecz. Analizator zaopatrzony jest w podziałkę kątową z noniusem, co pozwala na dokładny odczyt położenia kąтового.

### Pryzmat Nicola (nikol)

Ten rodzaj polaryzatora liniowego zbudowany jest z dwóch kawałków kryształu dwójłomnego (szpatu islandzkiego) połączonego warstwą balsamu kanadyjskiego. Kryształ dwójłomny powoduje rozszczepienie wiązki światła na dwie: zwyczajną i nadzwyczajną, obie spolaryzowane liniowo w kierunkach wzajemnie prostopadłych. Obecność balsamu kanadyjskiego, o współczynniku załamania mniejszym od szpatu islandzkiego, umożliwia eliminację jednej z wiązek poprzez całkowite wewnętrzne odbicie (kąt padania jest większy od kąta granicznego). Bieg promieni w pryzmacie Nicola ilustruje rysunek 4.10.3. Za pryzmatem Nicol'a światło jest spolaryzowane liniowo.



Rys. 4.10.3: Bieg promieni w pryzmacie Nicola.

## 4.10.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

Do wykonania ćwiczenia służy zestaw zawierający polarymetr Laurenta. Dostępne są też elektroniczna waga laboratoryjna, zlewki, woda destylowana, cukier.

### Przebieg doświadczenia

Zanotować dokładność odczytu położenia kąтового analizatora. Zanotować długość drogi światła w cieczy (długość rurki). Sporządzić kilka roztworów wodnych cukru (sacharozy  $C_{12}H_{22}O_{11}$ ) o stężeniach  $c_i$  mniejszych niż 15%. Wyznaczyć „zero” polarymetru, czyli położenie kątowe analizatora, przy którym występuje jednakowe oświetlenie całego pola widzenia. Pomiar ten należy wykonać z rurką nie zawierającą cieczy.

Wstawić rurkę z wodą destylowaną i dziesięciokrotnie zmierzyć położenie kątowe analizatora, przy którym występuje jednakowe oświetlenie całego pola widzenia. Czysta woda nie skręca płaszczyzny polaryzacji, więc otrzymana wartość położenia kąтового powinna być bliska zeru. Odczyt ten powinien pokrywać się z wyznaczonym „zerem” polarymetru.

Dla sporządzonych uprzednio roztworów wodnych cukru wykonać pomiary położenia kąтового analizatora w pozycji jednakowego oświetlenia całego pola widzenia (każdy pomiar wykonać dziesięć razy). Na końcu wykonać pomiary dla wodnego roztworu cukru o nieznanym stężeniu  $c_x$ .

#### 4.10.3 Opracowanie wyników

Przeliczyć stężenia przygotowanych roztworów ze stężeń procentowych na potrzebne stężenia  $c_i$  w jednostkach  $kg/m^3$ . Gęstości wodnych roztworów cukru znajdują się w tabeli 4.10.1.

Tabela 4.10.1: Gęstość wodnego roztworu cukru (sacharozy  $C_{12}H_{22}O_{11}$ ) w temperaturze  $20^\circ C$  w zależności od jego stężenia procentowego  $m_{cukru}/m_{roztworu} \cdot 100\%$

Stężenie [%]	Gęstość [ $kg/m^3$ ]	Stężenie [%]	Gęstość [ $kg/m^3$ ]	Stężenie [%]	Gęstość [ $kg/m^3$ ]	Stężenie [%]	Gęstość [ $kg/m^3$ ]
0	998.2	4	1013.8	8	1029.9	12	1046.5
1	1002.1	5	1017.8	9	1034.0	13	1050.7
2	1006.0	6	1021.8	10	1038.1	14	1054.9
3	1009.9	7	1025.9	11	1042.3	15	1059.2

Dla każdego stężenia  $c_i$  obliczyć średni kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła  $\alpha_{i(\text{średnie})}$  (różnica pomiędzy położeniem kątowym analizatora dla danego roztworu i dla wody destylowanej). Wykonać wykres zależności  $\alpha_{i(\text{średnie})}(c_i)$ . Metodą regresji liniowej dopasować prostą  $\alpha_{i(\text{średnie})} = Ac_i + B$  i z wartości  $A$  wyznaczyć współczynnik  $\alpha_0$  wraz z niepewnością pomiarową. Porównać otrzymaną wartość z danymi tablicowymi. Skręcalność właściwa wodnego roztworu cukru w temperaturze  $20^\circ C$  dla światła o długości fali  $589 \text{ nm}$  (żółta linia widmowa sodu) wynosi:

$$\alpha_0 = 0.66588 \pm 0.00002 \text{ deg} \cdot m^2/kg$$

Należy pamiętać, że współczynniki dopasowania prostej oraz  $\alpha_0$  są wielkościami wymiarowymi. Korzystając z otrzymanych wyników wyznaczyć stężenie roztworu  $c_x$ .

## 4.11 Badanie widm emisyjnych za pomocą spektroskopu pryzmatycznego

Celem ćwiczenia jest poznanie zasady działania spektroskopu pryzmatycznego, układów optycznych (kolimator, luneta), obserwacja widm emisyjnych liniowych, sporządzenie krzywej dyspersji spektroskopu i na jej podstawie określenie długości fal badanego pierwiastka.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- budowa atomu, powstawanie widm atomowych, poziomy energetyczne atomu, związek pomiędzy energią przejścia a częstotliwością i długością fali;
- bieg wiązki światła w pryzmacie;
- kąt odchylenia i kąt najmniejszego odchylenia światła w pryzmacie;
- dyspersja normalna i anomalna;
- budowa, zasada działania i justowanie spektroskopu pryzmatycznego.

Literatura podstawowa: [1], [14], [15], [44].

### 4.11.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Model atomu

Atom zbudowany jest z niewielkiego ciężkiego jądra i elektronów. Ładunek dodatni zgromadzony jest w jądrze, ujemnie naładowane elektrony znajdują się w dużej odległości od jądra. Ruch elektronów opisują orbitale, czyli funkcje falowe będące rozwiązaniem równania Schrödingera. Kwadrat modułu funkcji falowej określa prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w danym punkcie. Z każdym orbitalem związana jest pewna charakterystyczna energia, którą posiada elektron w atomie. Energia ta nie przyjmuje dowolnych wartości, ale jest skwantowana, czyli przyjmuje wartości dyskretne. Przejście elektronu z orbitalu o niższej energii na orbital o wyższej energii związane jest z dostarczeniem energii (wzbudzenie atomu, absorpcja). Natomiast przejście elektronu z orbitalu o wyższej energii na orbital o niższej energii powoduje emisję energii  $E_{em}$  o wartości równej różnicy energii pomiędzy energiami orbitalu początkowego  $E_p$  i końcowego  $E_k$ :

$$E_{em} = E_p - E_k = h\nu, \quad (4.11.1)$$

gdzie:  $h$  – stała Plancka,  $\nu$  – częstotliwość emitowanej fali elektromagnetycznej. Z częstotliwością fali związana jest jej długość  $\lambda = c/\nu$ ,  $c$  – prędkość światła w próżni.

Atomy wszystkich pierwiastków zbudowane są w ten sam sposób, jednakże ze względu na różną liczbę atomową i liczbę elektronów, atom każdego pierwiastka posiada charakterystyczne poziomy energetyczne. W związku z tym, emituje charakterystyczne dla siebie częstotliwości (długości fal) promieniowania elektromagnetycznego. Dzięki temu, poprzez analizę widm emisyjnych można zidentyfikować skład substancji świecącej. Taka procedura nazywa się spektralną analizą widmową. Możliwa jest ona do

przeprowadzenia w przypadku widm wysyłanych przez atomy. Takie widma złożone są z wyraźnie oddzielonych linii nazywanych liniami widmowymi.

Wiele substancji, w zależności od ich budowy mikroskopowej lub warunków w jakich się znajdują, ma bardziej skomplikowane widma. Widma pasmowe wysyłane są przez cząsteczki. Widma te składają się z bardzo blisko siebie leżących linii, które układają się w barwne pasma. Widma ciągle emitowane są przez rozżarzone ciała stałe, ciecze oraz gazy pod dużym ciśnieniem. Charakter widm emisyjnych zależy od struktury poziomów energetycznych atomów i cząsteczek.

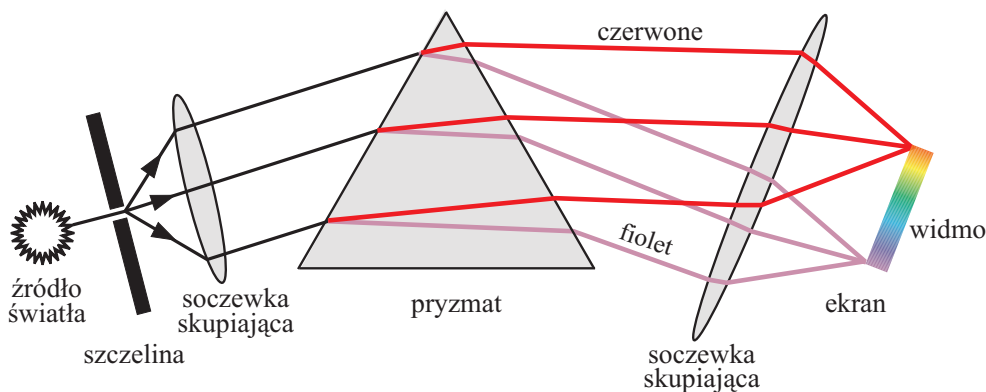
Widma absorpcyjne powstają w wyniku przejścia światła o widmie ciągłym przez ośrodek absorbujący, którym może być ciecz, warstwa gazu lub ciała stałego. Wtedy na tle widma ciągłego widoczne są ciemne linie absorpcyjne. Okazuje się, że linie absorpcyjne występują dla takich samych długości fali, dla których występowałyby linie emisyjne substancji absorbującej.

Aby dowiedzieć się jakie długości fali (lub częstotliwości) wysyła źródło światła trzeba przeprowadzić jego analizę. W tym celu wykorzystuje się zjawisko dyspersji, tzn. zależności współczynnika załamania od długości fali. Jeżeli w badanym zakresie długości fali nie leży obszar pochłaniania, dyspersja jest normalna. Zależność współczynnika załamania  $n$  od długości fali można przedstawić przez:

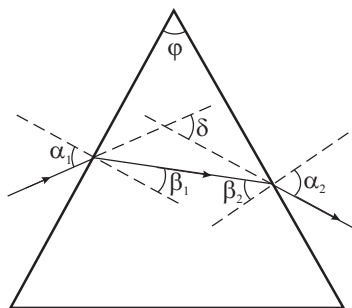
$$n = A + B/\lambda^2, \quad (4.11.2)$$

gdzie  $A$  i  $B$  – stałe charakterystyczne dla ośrodka. W obszarze pochłaniania (w miejscu linii absorpcyjnej), współczynnik załamania nie wykazuje ciągłej zależności od długości fali. Jest to obszar dyspersji anomalnej.

Elementem dyspersyjnym używanym w tym eksperymencie jest pryzmat szklany – podstawowy element spektroskopu. Bieg wiązki światła w pryzmacie przedstawia rysunek 4.11.1.



Rys. 4.11.1: Bieg wiązki światła w przyzmacie.



Rys. 4.11.2: Zależności kątowe przy załamaniu światła monochromatycznego w pryzmacie.

Na pierwszej ścianie pryzmatu, padająca wiązka światła ulega załamaniu i rozszczepieniu na barwy składowe. Wychodząc z pryzmatu następuje kolejne załamanie wcześniej rozszczepionych promieni, w związku z czym „odległości” między nimi powiększają się. Używając odpowiedniego układu optycznego możliwa jest obserwacja analizowanego widma. Parametrem opisującym odchylenie wiązki światła w pryzmacie jest kąt odchylenia  $\delta$ . Jest to kąt zawarty między kierunkiem wiązki wchodzącej do pryzmatu a kierunkiem wiązki wychodzącej z niego. Dla przedstawionych na rysunku 4.11.2 zależności można znaleźć relację pomiędzy kątami padania  $\alpha_1$  i  $\beta_2$ , kątami załamania

$\beta_1$  i  $\alpha_2$  i współczynnikiem załamania pryzmatu.

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2}. \quad (4.11.3)$$

Korzystając z rysunku można łatwo znaleźć związki pomiędzy kątami

$$\begin{aligned} \delta &= (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \\ \varphi &= \beta_1 + \beta_2 \\ \delta &= \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \varphi + \beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi \end{aligned} \quad (4.11.4)$$

Podstawiając te związki do równania (4.11.3) otrzymujemy

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin(\delta + \varphi - \alpha_1)}{\sin(\varphi - \alpha_1)} = \frac{\sin \delta \cos(\varphi - \alpha_1) + \cos \delta \sin(\varphi - \alpha_1)}{\sin(\varphi - \alpha_1)} \quad (4.11.5)$$

Kąt odchylenia  $\delta$  dla zadanej długości fali można wyrazić przez kąt najmniejszego odchylenia  $\delta_m$  oraz pewien kąt  $\gamma$

$$\delta = \delta_m + \gamma. \quad (4.11.6)$$

Jeżeli kąt  $\gamma$  jest mały to można dokonać rozwinięcia w szereg

$$\begin{aligned} \sin(\delta_m + \gamma) &= \sin \delta_m + \gamma \cos \delta_m \\ \cos(\delta_m + \gamma) &= \cos \delta_m - \gamma \sin \delta_m \end{aligned} \quad (4.11.7)$$

Korzystając z tych wyrażeń równanie (4.11.5) można przepisać w postaci



$$n = a_1 + b_1\gamma \quad (4.11.8)$$

wiążąc współczynnik załamania z kątem odchylenia  $\gamma$  mierzonym względem kąta najmniejszego odchylenia.

W przybliżeniu małych kątów położenie prążka na skali spektrometru  $x$  jest proporcjonalne do kąta  $\gamma$ . Ostatecznie otrzymujemy, iż współczynnik załamania jest liniową funkcją położenia linii odczytywaną na skali spektrometru.

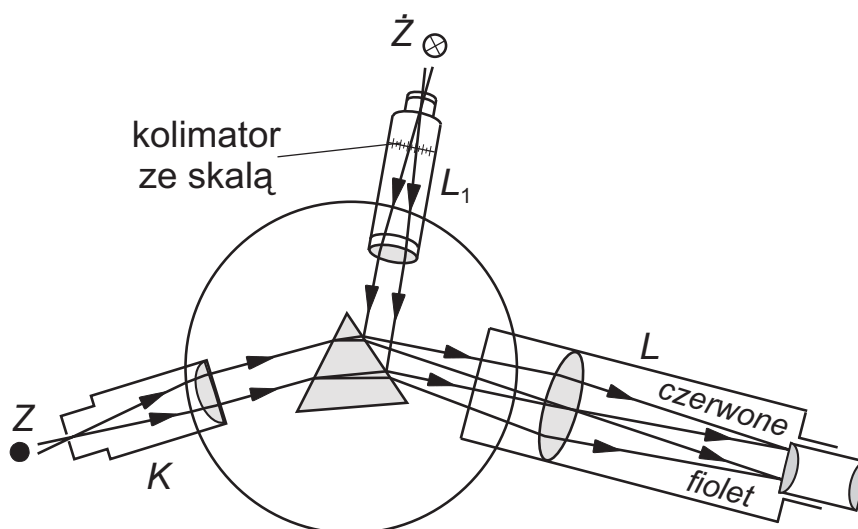
$$n = a_2 + b_2x. \quad (4.11.9)$$

Łącząc równania (4.11.2) i (4.11.9) otrzymujemy zależność odwrotności kwadratu długości fali od odpowiadającego jej położenia linii

$$\frac{1}{\lambda^2} = a + bx. \quad (4.11.10)$$

### Spektroskop

Spektroskop składa się z kolimatora, pryzmatu i lunety (rysunek 4.11.3). Aby zoptymalizować działanie pryzmatu, należy uformować wiązkę światła padającą na pryzmat tak, aby była równoległa. Wtedy wszystkie promienie padają na pryzmat pod tym samym kątem. Do tego służy kolimator  $K$  – układ optyczny zaopatrzony na wejściu w szczelinę o regulowanej szerokości, umieszczonej w ognisku soczewki znajdującej się na wyjściu kolimatora. Po wyjściu z pryzmatu, analizowana wiązka światła wpada do lunety  $L$ , w której dzięki układowi soczewek możemy oglądać obraz szczeliny w tylu kolorach, ile długości fali znajduje się w świetle padającym na szczelinę.



Rys. 4.11.3: Schemat spektroskopu.

Taka konstrukcja spektroskopu umożliwia obserwację widm optycznych. Aby zamienić spektroskop na spektrometr, zaopatrzone to urządzenie w układ optyczny  $L_1$  zawierający podziałkę liniową niemianowaną. Wiązka światła białego, skierowana do takiego układu niesie obraz skali, który zostaje odbity od ściany pryzmatu i trafia do lunety razem z widmem analizowanego światła. Można więc określić położenie na skali każdej widocznej linii widmowej.

Jeżeli oświetlimy szczelinę światłem lamp spektralnych, których długości fal są znane, to w wyniku przyporządkowania każdej z nich położenia na skali liniowej można wykreślić tzw. krzywą dyspersji pryzmatu umieszczonego w spektroskopie, tzn. zależność długości fali od jej położenia na skali. Stosując kolejno kilka lamp spektralnych, otrzymamy dostatecznie dużo punktów, aby wykreślić gładką krzywą. Krzywa dyspersji daje możliwość określenia długości fali dowolnej obserwowanej linii widmowej, jeżeli znamy jej położenie na skali spektroskopu. Jest więc krzywą kalibracyjną używanego przyrządu.

#### 4.11.2 Przebieg pomiarów

Przyrządy: spektroskop pryzmatyczny, lampy spektralne (Na, Cd, Zn, Hg) oraz rurki Geisslera (He, Ne).

##### Justowanie spektroskopu

Zdjąć osłonę i wyjąć pryzmat. Ustawić lunetę „na nieskończoność”. Wykonuje się to patrząc bezpośrednio przez lunetę na odległy przedmiot. Należy ustawić ostry obraz przedmiotu regulując ustawienie obiektywu lunety. Jaki jest wtedy bieg promieni przed wejściem do lunety i gdzie powstaje obraz „odległego przedmiotu”?

Ustawić ostry obraz krzyża z nici pajęczych (za pomocą okularu lunety). Sprawdzić, czy nie występuje paralaksa, tzn. czy krzyż nie przesuwa się względem osi lunety przy niewielkim ruchu oka w prawo lub w lewo.

Ustawić kolimator i lunetę wspólnie. Szczelinę kolimatora oświetlić lampą sodową. Ustawić taką odległość szczeliny od soczewki kolimatora, aby obraz szczeliny obserwowany przez lunetę był ostry. Obraz szczeliny ma być pionowy, znajdować się w środku pola widzenia i na przecięciu krzyża z nici pajęczych. Szerokość szczeliny kolimatora należy wyregulować tak, aby obraz był wąski ale wyraźny. Od tego momentu nie wolno wykonywać żadnych regulacji lunety, a w kolimatorze można zmieniać tylko szerokość szczeliny.

##### Ustawienie pryzmatu na kąt najmniejszego odchylenia

Pryzmat zamocować na stoliku spektroskopu w sprężynującym uchwycie. Odnaleźć obraz szczeliny utworzony przez promienie odchylone przez pryzmat. Obracać pryzmat wokół osi równoległej do jego podstawy (matowa ścianka), przechodzącej przez punkt przyłożenia sprężynującego uchwytu – wtedy obraz szczeliny zmienia położenie, przesuując się względem środka pola widzenia w prawo lub w lewo. Przy przesuwaniu

się w lewo istnieje „punkt zwrotny”, w którym obraz szczeliny zaczyna przesuwac się w przeciwną stronę, pomimo obrotu pryzmatu wciąż w tym samym kierunku. To położenie pryzmatu odpowiada kątowi najmniejszego odchylenia. Proszę zastanowić się dlaczego?

### Ustawienie dodatkowego kolimatora ze skalą

Oświetlić kolimator ze skalą specjalną lampą uważając, aby lampa i kolimator były ustawione współosiowo. Regulując ustawienie kolimatora ze skalą ustawić ostry obraz skali na środku pola widzenia tak, aby obraz szczeliny znalazł się około czwartej działki skali.

### Wykonanie pomiarów

Odczytać i zanotować położenie na skali żółtej linii sodu. Przed szczeliną umieszczać kolejno świecące lampy spektralne (rtęciową, kadmową, cynkową) oraz rurkę Geisslera z helem. Dla każdego źródła światła notować położenia linii widmowych na skali, jej barwę oraz informację o jasności. Widma obserwowane dla każdej używanej lampy przedstawione są w uzupełnieniu A.4.

#### 4.11.3 Opracowanie wyników

Przypisać długości fali obserwowanym liniom widmowym pochodzącym z trzech wybranych źródeł światła, korzystając z dostępnych tabeli lub tablic linii widmowych [27]. W ten sposób każda linia spektralna będzie opisana parą liczb – położenie na skali oraz długość fali. Położenie linii na skali jest obarczone błędem odczytu, związanym m. in. z szerokością szczeliny i błędem paralaksy – należy oszacować te błędy w czasie wykonywania ćwiczenia i uwzględnić rysując krzywą dyspersji. Narysować krzywą dyspersji, czyli zależność długości fali od jej położenia na skali.

Sporządzić także wykres zależności odwrotności kwadratu długości fali od odpowiadającego jej położenia linii. Korzystając z regresji liniowej do punktów pomiarowych dopasować prostą zgodnie z równaniem (4.11.10). Na podstawie otrzymanych współczynników regresji obliczyć długości fali oraz niepewności pomiarowe dla przejść elektromagnetycznych czwartego źródła światła (nieużywanego do wykreślenia krzywej dyspersji). Otrzymane wyniki należy porównać z wartościami tablicowymi i skomentować.

## 4.12 Badanie zjawiska dyfrakcji i interferencji światła laserowego

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie szerokości szczeliny, a w przypadku większej liczby szczelin także odległości między szczelinami, na podstawie analizy rozkładu natężenia światła w obrazach dyfrakcyjnych.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- zjawisko dyfrakcji i interferencji światła;
- obrazy dyfrakcyjne pojedynczej szczeliny: zasada powstawania obrazu; wpływ szerokości szczeliny na obraz dyfrakcyjny (widmo); rozkład natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym;
- obrazy dyfrakcyjne dwóch i większej liczby szczelin o skończonej szerokości;
- laser jako źródło światła spójnego (opis działania lasera znajduje się w uzupełnieniu A.4).

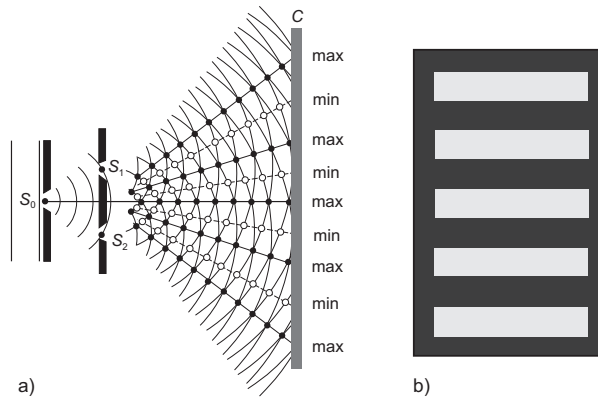
Literatura podstawowa: [25], [14].

#### 4.12.1 Podstawowe pojęcia i definicje

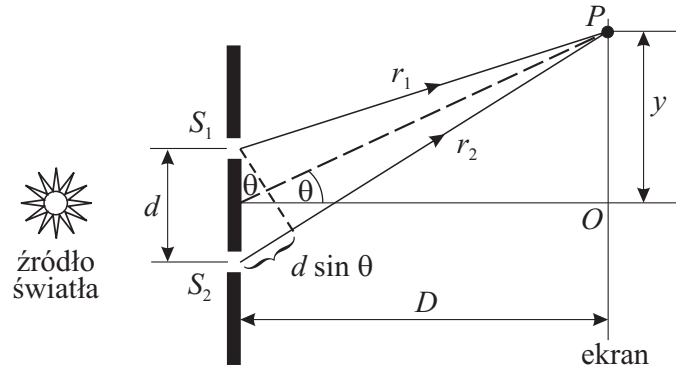
Interferencja i dyfrakcja światła są zjawiskami, które mogą być wytłumaczone tylko na gruncie falowej natury światła. Interferencja fal polega na nakładaniu się (dodawaniu) dwóch lub więcej fal, które prowadzi do stałego w czasie przestrzennego rozkładu fali wypadkowej. Gdy amplituda fali wypadkowej jest większa niż każdej z fal składowych (występują wtedy maksima natężenia – prążki jasne) to mamy do czynienia z interferencją konstruktywną. O interferencji destruktywnej mówimy, gdy amplituda fali wypadkowej jest mniejsza od każdej z fal składowych (widać wtedy minima natężenia, czyli prążki ciemne). Efekty interferencji światła mogą być obserwowane tylko wtedy, gdy fale świetlne są monochromatyczne i spójne. Fale świetlne są monochromatyczne jeżeli mają jednakową długość fali  $\lambda$ . Spójność fal świetlnych oznacza, że jest zachowana stała w czasie różnica faz pomiędzy nakładającymi się falami. Naturalne źródła światła nie spełniają tego warunku, ponieważ poszczególne atomy emitują ciągi fal w sposób zupełnie chaotyczny. Różnica faz zmienia się więc również przypadkowo. Źródłami światła spójnego są natomiast lasery.

Po raz pierwszy zjawisko interferencji światła z dwóch źródeł zostało zaobserwowane w 1801 roku przez Thomasa Younga (rysunek 4.12.1). Spójność światła została zapewniona przez odpowiednio dobrane warunki doświadczalne. Wąska szczelina  $S_0$  jest oświetlona światłem z konwencjonalnego źródła. Fale rozchodzące się za szczeliną  $S_0$  docierają do ekranu z dwoma wąskimi szczelinami  $S_1$  i  $S_2$ , które są już źródłami światła spójnego. Zapewnia to fakt, że fale wychodzące z obu szczelin pochodzą z czoła tej samej fali, a więc istnieje między nimi stała różnica faz. Światło z dwóch źródeł interferuje i na ekranie  $C$  pojawia się obraz interferencyjny w postaci kolejnych maksimów i minimów interferencyjnych (jasnych i ciemnych prążków o jednakowym natężeniu – rysunek 4.12.1b).

Można przedstawić ilościowy opis doświadczenia Younga. W tym celu należy rozważyć punkt  $P$  na ekranie zakładając, że powstaje tu maksimum interferencyjne (rysunek 4.12.2). Interferencja konstruktywna występuje, gdy do danego punktu ekranu docierają fale w tej samej fazie, co oznacza, że różnica dróg optycznych  $r_2 - r_1$  jest równa zero (przypadek punktu centralnego  $O$ ) lub całkowitej wielokrotności długości fali  $\lambda$  (punkt  $P$ ). Z geometrycznej konstrukcji widać, że:



Rys. 4.12.1: Schemat doświadczenia Younga (a) oraz obraz prążków interferencyjnych (b).



Rys. 4.12.2: Geometryczna konstrukcja opisująca doświadczenie Younga.

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.12.1)$$

gdzie \$m\$ jest numerem rzędu odpowiedniego maksimum (lub jasnego prążka). W centrum obrazu (\$\theta = 0\$) powstaje maksimum zerowego rzędu. Warunkiem występowania interferencji destruktywnej w punkcie \$P\$ (minimum natężenia) jest, aby różnica dróg optycznych była równa nieparzystej wielokrotności \$\frac{\lambda}{2}\$.

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.12.2)$$

Zakładając, że odległość szczelin od ekranu \$D\$ jest dużo większa od odległości między szczelinami \$d\$ (czyli \$D \gg d\$ co w praktyce jest dobrze spełnione) można użyć przybliżenia:

$$\sin \theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{D}. \quad (4.12.3)$$

Wyrażenia (4.12.1) i (4.12.3) pozwalają znaleźć odległość maksimum (jasny prążek)  $m$ -tego rzędu od środka maksimum zerowego rzędu:

$$y_{\max} = \frac{\lambda D}{d} m. \quad (4.12.4)$$

Rozkład natężenia światła w obrazie interferencyjnym pochodzącym od dwóch szczelin można obliczyć stosując metodę graficzną (wektorową). Jeżeli z dwóch szczelin rozchodzą się spójne, monochromatyczne fale, to w punkcie  $P$  na ekranie obserwujemy superpozycję tych fal. Interesuje nas tylko wektor natężenia pola elektrycznego fali elektromagnetycznej, ponieważ natężenie światła jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy tego pola. Fale monochromatyczne mają tę samą częstotliwość  $\omega$ , a ich spójność zapewnia stałą różnicę faz  $\Phi$ . Dla uproszczenia można założyć, że obie fale mają jednakowe amplitudy  $E_0$ . Różnica faz  $\Phi$  w punkcie  $P$  jest ściśle związana z różnicą dróg optycznych  $r_2 - r_1 = \delta$ . Mianowicie różnica dróg optycznych  $\delta = \lambda$  odpowiada różnicy faz  $\Phi = 2\pi$ , a więc  $\delta/\Phi = \lambda/2\pi$ . Stąd otrzymujemy:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta. \quad (4.12.5)$$

Wyrażenie (4.12.5) przedstawia zależność różnicy faz  $\Phi$  od kąta  $\theta$ . Wektor natężenia pola elektrycznego ma postać:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \Phi)}. \quad (4.12.6)$$

Geometrycznie liczbę zespoloną interpretujemy jako wektor o długości  $E_0$ , wirujący z częstotliwością  $\omega$  wokół początku układu współrzędnych. Kąt nachylenia wektora do osi odciętych jest równy fazie drgań. Interferencji światła na dwóch szczelinach odpowiada dodawanie w punkcie  $P$  wektorów pola elektrycznego reprezentujących fale składowe:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t)} \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \Phi)} \end{aligned} \quad (4.12.7)$$

Rzut wektora wypadkowego jest równy sumie rzutów wektorów składowych (rysunek 4.12.3), a więc:

$$E_w \cos \Phi_0 = E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(\omega t + \Phi) \quad (4.12.8)$$

Uwzględniając zależności geometryczne widoczne na rysunku 4.12.3 otrzymujemy:

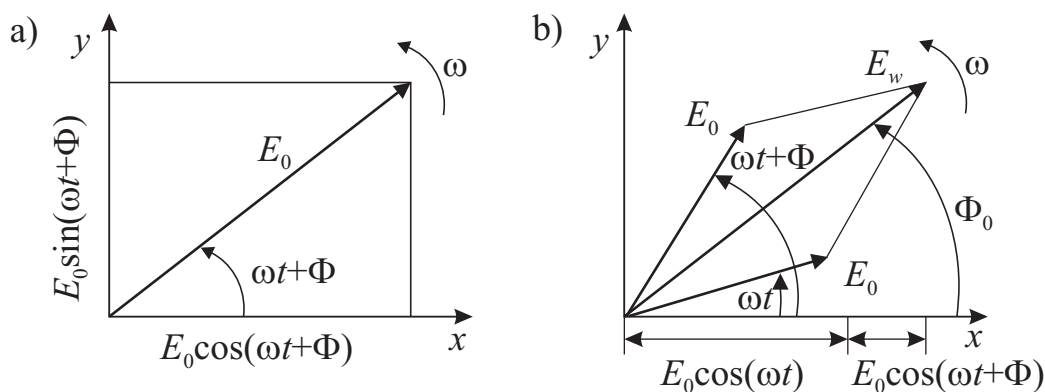
$$E_w \cos \Phi_0 = 2E_0 \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\Phi}{2}\right), \quad (4.12.9)$$

a stąd łatwo odczytać, że amplituda drgania wypadkowego wynosi  $E_w = 2E_0 \cos(\Phi/2)$ , a faza jest równa  $\Phi_0 = (\omega t + \Phi/2)$ . Zatem natężenie światła, proporcjonalne do kwa-

dratu amplitudy natężenia pola elektrycznego, obserwowane w punkcie  $P$  (rysunek 4.12.2) wynosi:

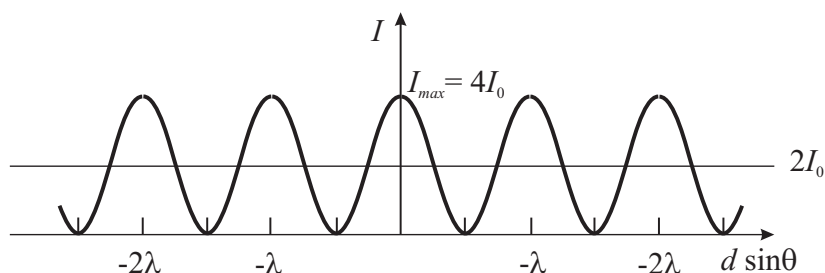
$$I_{\theta} = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\Phi}{2} \right) = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{\Phi}{2} \right) = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right). \quad (4.12.10)$$

Przez  $I_0$  oznaczono natężenie fali składowej, natomiast  $I_{\max}$  jest natężeniem dla maksimum interferencyjnego zerowego rzędu.



Rys. 4.12.3: Wektor natężenia pola elektrycznego  $\vec{E}$  przedstawiony za pomocą obracającego się wektora (a). Konstrukcja służąca do znalezienia amplitudy pola wypadkowego dla interferencji światła na 2 szczelinach (b).

Rysunek 4.12.4 przedstawia rozkład natężeń dla interferencji na dwu szczelinach opisany równaniem (4.12.10). Zaznaczono także wartość średniego natężenia, które wynosi  $2I_0$  (średnia wartość kwadratu cosinusa wynosi  $1/2$ ). Taki jednostajny rozkład natężenia występuje w przypadku, gdy fale z dwóch szczelin są niespójne i nie zachodzi interferencja. Potwierdza to fakt, że w przypadku interferencji ilość energii jest taka sama, a tylko występuje inny jej rozkład.



Rys. 4.12.4: Rozkład natężenia otrzymany w wyniku interferencji światła wychodzącego z dwóch wąskich szczelin ( $a \ll \lambda$ ).

Metodę sumowania rzutów wektorów reprezentujących natężenia pól elektrycznych interferujących fal można wykorzystać także w przypadku większej liczby szczelin. W przypadku  $N$  szczelin należy sumować wektory pól elektrycznych fal pochodzących od wszystkich szczelin i docierające do punktu  $P$ . Wypadkowy wektor natężenia pola  $\vec{E}_w$  wynosi:  $\vec{E}_w = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$ . Wektory świetlne kolejnych fal mają taką samą amplitudę, a między nimi istnieje stała różnica faz  $\Phi$ . Sumując wartości rzutów  $N$  wektorów na oś odciętych w chwili  $t = 0$  otrzymujemy:

$$E_w \cos \Phi_0 = E_0 + E_0 \cos \Phi + E_0 \cos (2\Phi) + \dots + E_0 \cos [(N-1)\Phi]. \quad (4.12.11)$$

W postaci zespolonej wyrażenie (4.12.11) tworzy szereg geometryczny, którego suma wynosi:

$$E_w e^{i\Phi_0} = E_0 \sum_{k=1}^N e^{i(k-1)\Phi} = E_0 \frac{e^{iN\Phi} - 1}{e^{i\Phi} - 1}. \quad (4.12.12)$$

Natężenie światła obserwowane w punkcie  $P$  jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy, a więc:

$$\begin{aligned} I = E_w^2 e^{i\Phi_0} e^{-i\Phi_0} &= E_0^2 \left( \frac{e^{iN\Phi} - 1}{e^{i\Phi} - 1} \right) \left( \frac{e^{-iN\Phi} - 1}{e^{-i\Phi} - 1} \right) = \\ &= E_0^2 \left[ \frac{2 - (e^{iN\Phi} + e^{-iN\Phi})}{2 - (e^{i\Phi} + e^{-i\Phi})} \right] = E_0^2 \frac{2 - 2 \cos N\Phi}{2 - 2 \cos \Phi}. \end{aligned} \quad (4.12.13)$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

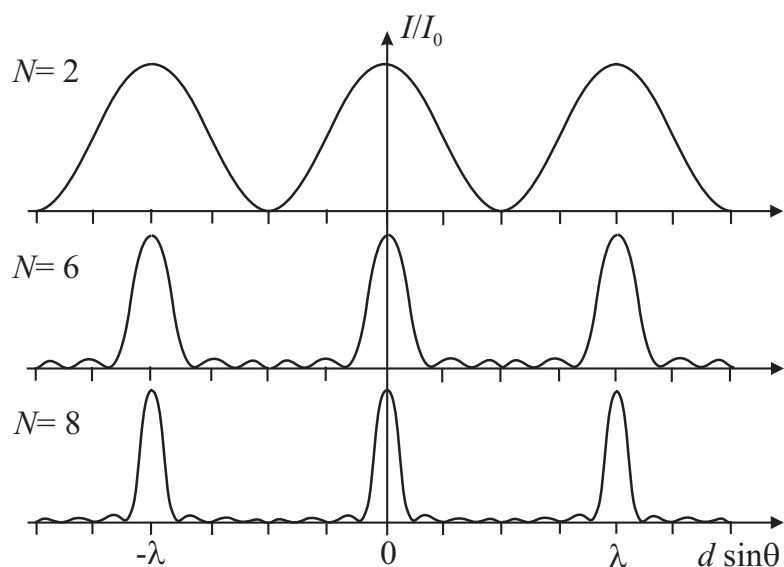
$$I = E_0^2 \frac{\sin^2 (N\Phi/2)}{\sin^2 (\Phi/2)} = I_0 \left( \frac{\sin (N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\sin (\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)} \right)^2. \quad (4.12.14)$$

Wykres funkcji opisanej równaniem (4.12.14) dla  $N = 2, 6$  i  $8$  przedstawiony jest na rysunku 4.12.5. Oczywiście dla  $N = 2$  funkcja ta przybiera postać (4.12.10).

Widać, że wraz ze wzrostem liczby szczelin, w obrazie interferencyjnym pomiędzy maksimumami głównymi pojawiają się maksima poboczne w ilości  $N - 2$ . Położenia maksimumów głównych nie zależą od liczby szczelin i są określone wyłącznie stosunkiem  $d/\lambda$ . Natomiast wzrost liczby szczelin zmienia kształt maksimumów głównych, stają się one węższe, poza tym rośnie liczba maksimumów wtórnych, a ich natężenie maleje. Dla liczby szczelin  $N > 1000$  maksima główne są bardzo ostre, a natężenie maksimumów pobocznych jest bliskie zeru.

Dotychczas omawiany był przypadek „czystej” interferencji, którą bardzo trudno zrealizować w praktyce. We wszystkich rozważaniach było założenie, że szczeliny są bardzo wąskie (szerokość szczeliny  $a \ll \lambda$ ). Tylko w tym przypadku można zaniedbać



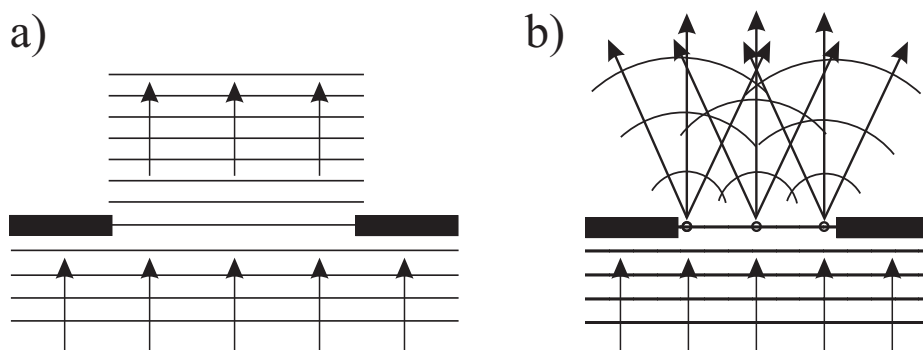


Rys. 4.12.5: Obliczony rozkład natężenia otrzymany w wyniku interferencji dla  $N = 2$ ,  $N = 6$  i  $N = 8$  wąskich szczelin (zaniedbany czynnik dyfrakcyjny).

efekty dyfrakcyjne, a co za tym idzie otrzymać maksima interferencyjne o jednakowym natężeniu.

### Na czym polega zjawisko dyfrakcji?

Rozważamy szczelinę o szerokości  $a$  dużo większej od długości fali  $\lambda$  padającego promieniowania (rysunek 4.12.6a). Dla uproszczenia zakładamy, że jest to fala płaska (czoło fali jest prostopadłe do powierzchni rysunku). Na ekranie za szczeliną otrzymamy prostokątny rozkład natężenia światła z wyraźną granicą cienia.



Rys. 4.12.6: Rozkład natężenia światła na ekranie: a) szeroka szczelina; b) szerokość szczeliny porównywalna z długością fali.

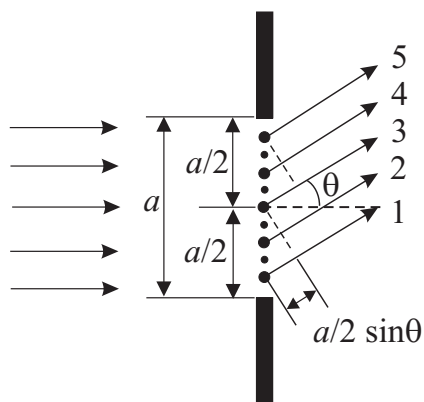
Rozkład natężenia światła zmienia się w przypadku zmniejszania szerokości szczeliny. Przy szerokości szczeliny porównywalnej z długością fali obserwujemy niezerowe natężenie światła w całym obszarze, łącznie z obszarem cienia. Następuje odstępstwo od pierwotnego kierunku rozchodzenia się światła, czyli zjawisko dyfrakcji (ugięcia). Dyfrakcja występuje dla wszystkich rodzajów fal w pobliżu szczelin lub innych przeszkód pod warunkiem, że ich rozmiary są porównywalne z długością padającej fali. W takim przypadku (rysunek 4.12.6b), zgodnie z zasadą Huygens'a, każdy punkt czoła fali w obrębie szerokości szczeliny jest źródłem nowej fali kulistej. Wszystkie elementarne fale kuliste są w fazie, zachodzi interferencja i na ekranie umieszczonym za szczeliną widoczny jest rozkład natężenia światła. Natężenie pola elektrycznego w każdym punkcie  $P$  ekranu jest sumą wektorową natężeń pól elektrycznych fal docierających do  $P$  ze wszystkich elementarnych źródeł. Tak więc „obraz dyfrakcyjny” szczeliny jest wynikiem interferencji.

Rozróżniamy dwa rodzaje dyfrakcji. Przypadek ogólny stanowi dyfrakcja Fresnela tzn. taka, gdy źródło światła i ekran, na którym obserwujemy obraz dyfrakcyjny, znajdują się w skończonej odległości od otworu, na którym zachodzi ugięcie. Czoła fal padających i ugiętych nie są płaskie i opis matematyczny jest bardzo skomplikowany. Przypadkiem granicznym jest dyfrakcja Fraunhofera, gdy źródło światła i ekran znajdują się w dużych odległościach od otworu uginającego co powoduje, że fale padające i ugięte są płaskie, a to znacznie upraszcza obliczenia. W warunkach laboratoryjnych można zrealizować przypadek dyfrakcji Fraunhofera stosując układy soczewek skupiających lub używając światła laserowego. W dalszych rozważaniach będziemy brać pod uwagę tylko dyfrakcję Fraunhofera.

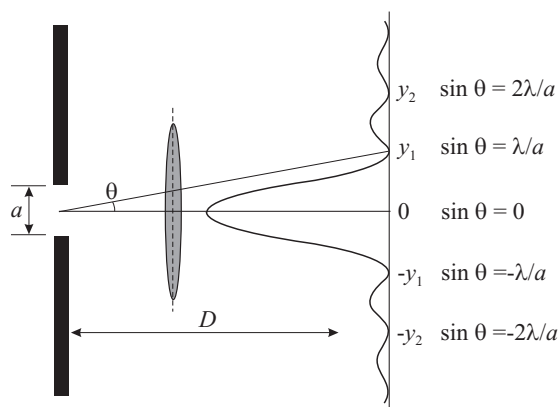
### Dyfrakcja światła na pojedynczej szczelinie

Rozważmy szczelinę o szerokości  $a$ , porównywalnej z długością fali  $\lambda$  padającego światła (rysunek 4.12.7). Zgodnie z zasadą Huygens'a każdy punkt czoła fali w obrębie szczeliny jest źródłem fali kulistej. Wszystkie, tak powstałe elementarne fale kuliste mają tę samą fazę i zachodzi interferencja. W rezultacie wypadkowe natężenie światła na ekranie zależy od kąta  $\theta$ . Dla kąta  $\theta = 0$  wszystkie fale docierające do punktu  $O$  ekranu mają różnicę faz równą zero i w punkcie centralnym powstaje maksimum (rysunek 4.12.8).

W tych rozważaniach wygodnie jest podzielić szczelinę na dwie połowy i z rysunku 4.12.7 widać, że różnice dróg optycznych dla par promieni (1,3), (2,4) oraz (3,5) są takie same i wynoszą  $\frac{a}{2} \sin \theta$ . Jeżeli jest spełniony warunek interferencji destruktywnej (4.12.2) tzn. różnice dróg optycznych są dokładnie równe  $\frac{1}{2}\lambda$ , to fale docierając do punktu  $P$  ekranu parami się wygaszają, natężenie światła jest równe zero i występuje pierwsze minimum w obrazie dyfrakcyjnym. Fale z górnej połowy szczeliny interferują destruktywnie z falami z dolnej połowy. Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla szczeliny podzielonej na kolejno 4, 6, 8, ... części otrzymując warunki dla powstawania kolejnych minimów w obrazie dyfrakcyjnym. Ogólny warunek otrzymania minimów natężenia w obrazie dyfrakcyjnym jest



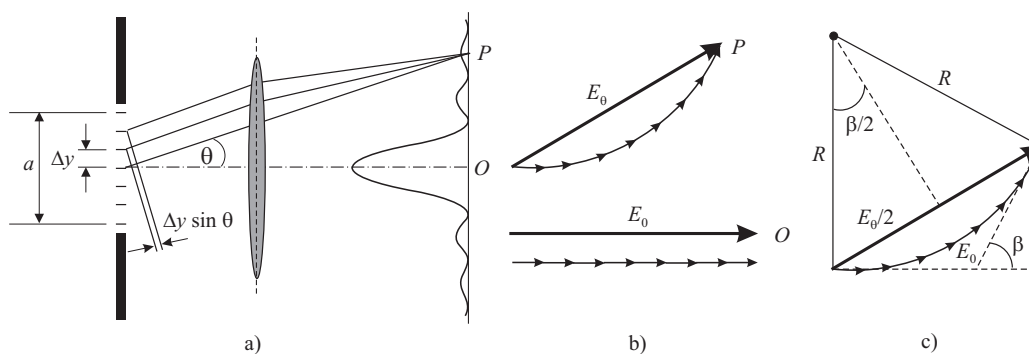
Rys. 4.12.7: Dyfrakcja światła na pojedynczej szczelinie.



Rys. 4.12.8: Dyfrakcja Fraunhofera na pojedynczej szczelinie.

$$a \sin \theta = m\lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.12.15)$$

Chcąc określić rozkład natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny można użyć podobnego rozumowania jak w przypadku interferencji: natężenie światła w danym punkcie  $P$  ekranu jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy wypadkowego wektora natężenia pola elektrycznego pochodzącego od wszystkich fal docierających do tego punktu. To rozumowanie ilustruje rysunek 4.12.9.



Rys. 4.12.9: Dyfrakcja Fraunhofera na pojedynczej szczelinie o szerokości  $a$ : a) konstrukcja obrazu dyfrakcyjnego; b) diagram wektorów natężenia pola elektrycznego w punkcie  $O$  i  $P$ ; c) konstrukcja geometryczna ilustrująca otrzymanie natężenia pola elektrycznego w punkcie  $P$ .

Szczelinę o szerokości  $a$  dzielimy na dużą liczbę przedziałów o szerokości  $\Delta y$  ( $N \rightarrow \infty$ ) i sumujemy wektory fazowe reprezentujące fale wychodzące z poszczególnych przedziałów  $\Delta y$  (rysunek 4.12.9a). W tym przypadku całkowita amplituda  $E_0$  w punkcie centralnym ekranu ( $\theta = 0$ ) jest równa  $E_0 = N\Delta E$ , gdzie  $N$  jest liczbą wektorów pola elektrycznego (rysunek 4.12.9b). Natomiast amplituda  $E_\theta$ , pokazana na rysunku

4.12.9b, jest sumą wektorową składowych różniących się w fazie o  $\Delta\beta$ , a pochodzących od kolejnych przedziałów  $\Delta y$ . Oczywiście  $E_\theta < E_0$ . Całkowita różnica faz dla fal pochodzących od przedziałów  $\Delta y$  znajdujących się na początku i końcu szczeliny wynosi:

$$\beta = N\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}N\Delta y \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta, \quad (4.12.16)$$

gdzie  $\Delta\beta$  jest obliczone zgodnie z równaniem (4.12.5). W sytuacji, gdy  $\beta = 2\pi$ , otrzymujemy warunek  $a \sin\theta = \lambda$ , co jest zgodne z wyrażeniem (4.12.15) dla pierwszego minimum i oczywiście wtedy amplituda  $E_\theta = 0$ . W przypadku gdy  $N \rightarrow \infty$  mamy  $\Delta y \rightarrow dy$  i  $E_\theta$  jest długością cięciwy, podczas gdy  $E_0$  jest długością łuku (rysunek 4.12.9c). Z tego rysunku wynika, że:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{E_\theta}{2R}. \quad (4.12.17)$$

Wstawiając do równania (4.12.17) zależność  $E_0 = R\beta$  otrzymujemy:

$$E_\theta = 2R \sin \frac{\beta}{2} = 2 \frac{E_0}{\beta} \sin \frac{\beta}{2} = E_0 \frac{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)}{\frac{\beta}{2}}, \quad (4.12.18)$$

stąd

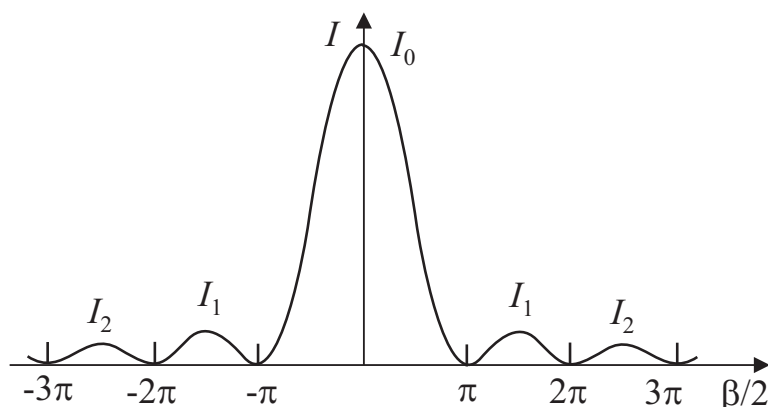
$$I_\theta = E_\theta^2 = I_0 \left[ \frac{\sin \left( \frac{\beta}{2} \right)}{\frac{\beta}{2}} \right]^2 = I_0 \left[ \frac{\sin \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}} \right]^2, \quad (4.12.19)$$

gdzie  $I_0$  jest maksymalnym natężeniem dla  $\theta = 0$ . Analizując wyrażenie (4.12.19) otrzymujemy warunek występowania minimów natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny. Jeżeli  $\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = m\pi$ , to  $a \sin \theta = m\lambda$ , co jest zgodne z (4.12.15). Rozkład natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny, opisany zależnością (4.12.19) przedstawiony jest na rysunku 4.12.10. Największe natężenie ma maksimum centralne dla  $\theta = 0$ . Maksimum centralne jest szersze niż maksima wyższych rzędów.

Dla węższej szczeliny układ maksimum jest rzadszy, tzn. odległości pomiędzy kolejnymi minimami są większe, a przy szerokości szczeliny  $a = \lambda$  występuje tylko maksimum główne – analiza wzoru (4.12.15).

### Dyfrakcja i interferencja światła na układzie większej liczby szczelin

W przypadku układu  $N$  szczelin ( $N = 2, 3, 4 \dots$ ) o skończonej szerokości oprócz zjawiska interferencji trzeba także uwzględnić zjawisko dyfrakcji. W związku z tym, rozkład natężenia światła będzie złożeniem wyniku interferencji i dyfrakcji. W przypadku gdy szerokości szczelin  $a$  są dużo mniejsze od odległości  $d$  pomiędzy szczelinami natężenie maksimum głównych w obrazie interferencyjnym jest modulowane rozkładem



Rys. 4.12.10: Rozkład natężenia światła przy dyfrakcji Fraunhofera na pojedynczej szczelinie.

natężenia powstającego w wyniku dyfrakcji dla pojedynczej szczeliny. Całkowity rozkład natężenia wyrażony jest dzięki temu przez iloczyn zależności (4.12.14) i (4.12.19):

$$I_{\theta} = I_0 \left[ \frac{\sin(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)} \right]^2 \left[ \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right]^2. \quad (4.12.20)$$

Analiza przedstawionego rozkładu natężenia światła prowadzi do wniosku, że położenia głównych maksimum interferencyjnych i minimum dyfrakcyjnych są niezależne od liczby szczelin, jeżeli tylko odległości między szczelinami i szerokości szczelin pozostają niezmiennie (rysunek 4.12.11).

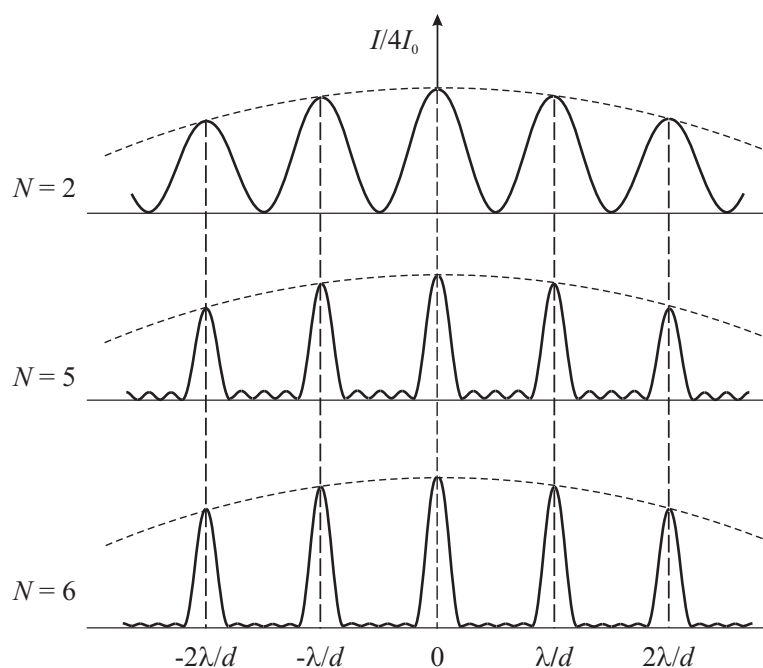
## 4.12.2 Przebieg pomiarów

### Układ doświadczalny

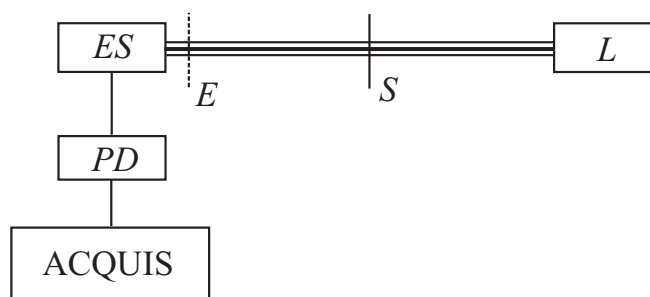
Do wykonania tego ćwiczenia służy układ doświadczalny, w którego skład wchodzi (rysunek 4.12.12): laser półprzewodnikowy  $L$  (długość emitowanej fali  $\lambda = (640 \pm 10) \text{ nm}$ ); szczelina z regulowaną szerokością  $S$  oraz zestawy szczelin; platforma z czujnikiem (element światłoczuły)  $ES$ ; przetwornik danych  $PD$  (dokonuje konwersji mierzonego natężenia światła na wielkości cyfrowe odczytywane przez program ACQUIS).

Światło z lasera  $L$  pada na szczelinę  $S$  umieszczoną w uchwycie na ławie optycznej. Należy tak dobrać szerokość szczeliny i jej odległość od lasera, aby na ekranie umieszczonym przed elementem światłoczułym  $ES$  obserwować ostry obraz dyfrakcyjny szczeliny. Następnie ekran należy usunąć.

Element światłoczuły  $ES$  może przesuwać się wzdłuż osi prostopadłej do ławy optycznej. Ruch ten zapewnia silnik krokowy sterujący platformą. Uruchomienie przesuwu  $ES$  z zadaną prędkością sterowane jest za pomocą programu ACQUIS (po uprzednim wprowadzeniu odpowiednich parametrów).



Rys. 4.12.11: Rozkład natężenia światła dla układu  $N = 2, 5, 6$  szczelin przy zachowanej szerokości  $a$  szczelin i tej samej odległości  $d$  między szczelinami.



Rys. 4.12.12: Schemat układu pomiarowego.

Podczas ruchu platformy dokonywany jest pomiar rozkładu natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym, a przetworzone dane przesyłane są do pamięci komputera, a następnie przedstawiane na ekranie w postaci wykresu zależności natężenia światła (jednostki umowne) od położenia. Pomiar może być powtórzony wielokrotnie (liczba pomiarów zadawana jest jako jeden z parametrów w programie ACQUIS) i wówczas po każdym kolejnym przebiegu, na ekranie pojawia się zależność średniego natężenia światła od położenia.

## Przebieg doświadczenia

### Rozkład natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny

Ustawić na ekranie ostry obraz dyfrakcyjny pojedynczej szczeliny. Zaobserwować wpływ zmiany szerokości szczeliny na obraz dyfrakcyjny. Wybrać dwie szerokości szczeliny, dla których wykonywany będzie pomiar. Wstępnie przygotować parametry pomiarowe dla programu ACQUIS do rejestracji dla wybranych szerokości pojedynczej szczeliny. Usunąć ekran i zmierzyć odległość szczeliny od elementu światłoczułego. Po wpisaniu kompletu przygotowanych parametrów uruchomić program ACQUIS z niewielką (np. 1-2) liczbą przebiegów i wykonać pomiar. Skorygować ustawienia układu na podstawie oceny rozkładu natężenia światła w otrzymanym widmie dyfrakcyjnym (widmo powinno być symetryczne względem osi przechodzącej przez punkt zero). Uruchomić właściwy pomiar z dostatecznie dużą liczbą przebiegów zapewniającą odpowiednią statystykę w mierzonym widmie. Zapisać dane na dysku. Powtórzyć czynności dla drugiej szerokości szczeliny.

### Rozkład natężenia światła w obrazie dyfrakcyjnym układu dwóch i większej liczby szczelin

Zamienić pojedynczą szczelinę na układ dwóch i większej (3, 4, 5) liczby szczelin znajdujących się w jednej oprawie i powtórzyć wszystkie czynności prowadzące do rejestracji widm.

## 4.12.3 Opracowanie wyników

Zarejestrowane w czasie pomiaru widma opracować używając odpowiedniego programu komputerowego. Odczytać z wykresu odległości kolejnych minimów dyfrakcyjnych od środka maksimum głównego i obliczyć szerokość szczeliny  $a$  (patrz metoda opisana poniżej). Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczenia szerokości szczeliny. Analizę wykonać dla dwóch szerokości szczeliny, dla których wykonano pomiar. Opisać i uzasadnić wyniki obserwacji obrazu dyfrakcyjnego przeprowadzonych dla różnych szerokości szczeliny.

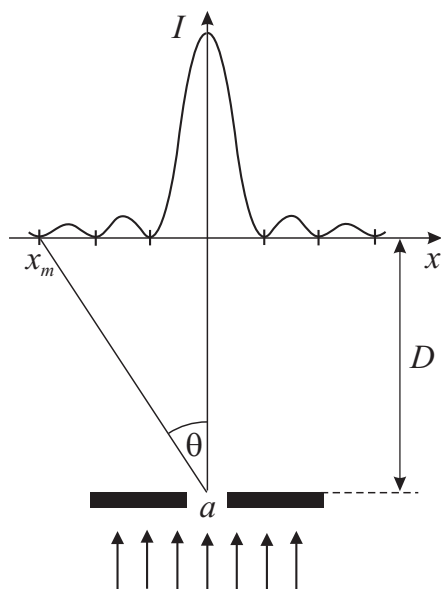
Dla układu dwóch i większej liczby szczelin, odczytać z wykresu odległość pierwszego minimum dyfrakcyjnego od środka głównego maksimum (zaznaczyć obwiednię obrazu dyfrakcyjnego) oraz odległość pomiędzy maksimumami interferencyjnymi. Na podstawie otrzymanych wyników obliczyć szerokość pojedynczej szczeliny oraz odległość pomiędzy szczelinami. Obliczyć niepewności pomiarowe wyznaczanych wielkości.

## 4.12.4 Uzupełnienia

### Metoda wyznaczania szerokości szczeliny

Z warunku (4.12.15) występowania minimów w obrazie dyfrakcyjnym pojedynczej szczeliny można obliczyć szerokość szczeliny  $a = \frac{m\lambda}{\sin\theta}$ , gdzie  $\theta$  jest kątem ugięcia, a  $\lambda = (640 \pm 10) \text{ nm}$ . Dla małych kątów można użyć przybliżenia  $\sin\theta \approx \text{tg}\theta$ . Z rysunku 4.12.13 widać, że:  $\text{tg}\theta = \frac{x}{D}$ , a więc  $a = \frac{m\lambda D}{x_m}$  gdzie  $x_m$  jest odległością  $m$ -tego minimum

od środka głównego maksimum (zerowego rzędu), a  $D$  jest odległością szczeliny od elementu światłoczułego. Odległość pomiędzy szczelinami należy obliczyć przy użyciu wzoru (4.12.4).

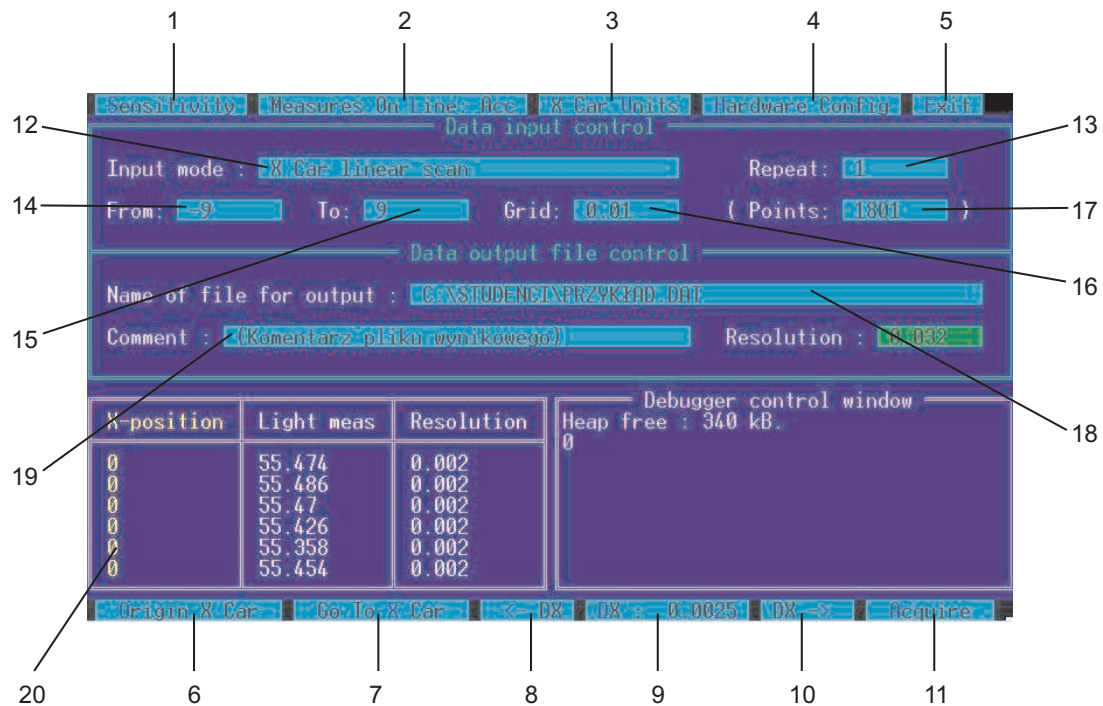


Rys. 4.12.13: Metoda wyznaczania szerokości szczeliny.

### Akwizycja danych - program ACQUIS

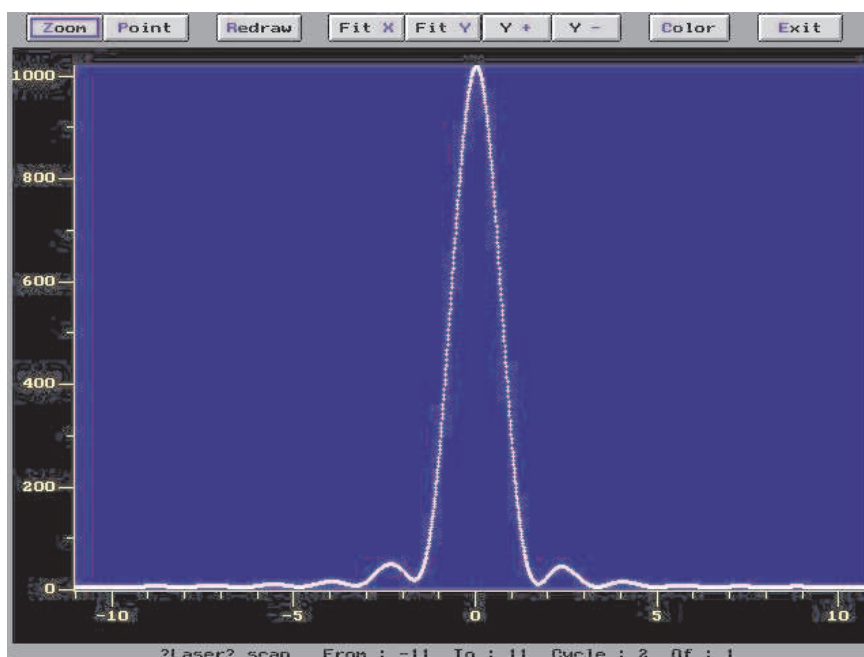
Program ten został napisany przez Olgierda Cybulskiego dla potrzeb I Pracowni Fizycznej w Instytucie Fizyki UJ. Działanie programu ACQUIS można podzielić na dwie grupy czynności, zwane trybami pracy programu. Tryb ustalania warunków eksperymentu obejmuje wszystkie działania związane z wpisywaniem lub obliczaniem parametrów planowanego eksperymentu. Tryb prowadzenia eksperymentu obejmuje sterowanie przez program zaplanowanym eksperymentem oraz zapisywanie wyników w pliku na dysku. Akwizycja danych prowadzona jest zgodnie z przygotowanym wcześniej planem eksperymentu. Na ekranie wyświetlane są bieżące informacje o etapie wykonywania eksperymentu oraz graficzna ilustracja wyników. W trakcie trwania eksperymentu nie można zmieniać jego parametrów. Prowadzenie eksperymentu polega na przesuwaniu platformy z elementem światłoczułym pomiędzy zadanymi położeniami krańcowymi i zapisywaniu, w równych odstępach drogi czujnika, kolejnych zmierzonych wartości natężenia światła. Pełne przejście danego zakresu, nazywane cyklem pomiarowym, może zostać powtórzone wielokrotnie, z zadanym parametrem REPEAT. Poprawia to statystykę w mierzonym widmie.





Rys. 4.12.14: Widok ekranu przy ustalaniu warunków pracy programu ACQUIS.

- 1 - wybór aktywnej powierzchni detektora;
- 2 - pomiar on line – wybór reżimu pracy. Ustawienie Accurate lub Coarse pozwala obserwować tabele zawierające ustawienia platformy (X-position) oraz wartości natężenia światła (light meas);
- 3, 4 - nie należy zmieniać;
- 5 - wyjście z programu;
- 6 - skalowanie osi X: dowolne położenie detektora może być przyjęte jako „zero”;
- 7 - wybór pozycji, do której powinien przesunąć się detektor;
- 8 - przesuw detektora o wybrany krok w lewo;
- 9 - wybór kroku przesuwu w prawo lub lewo (wartości w milimetrach);
- 10 - przesuw o wybrany krok w lewo;
- 11 - start akwizycji danych;
- 12 - niedostępne, zapewnia liniowy przesuw detektora;
- 13 - liczba powtórzeń pomiaru jednego widma, wynik jest średnią ze wszystkich pomiarów;
- 14, 15 - współrzędne startu i stopu platformy – przedział ( $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ) pomiaru;
- 16 - krok skanowania (w milimetrach);
- 17 - liczba kroków skanowania;
- 18 - ścieżka adresowa zapisywanego pliku np. C:/NAZWISKO STUDENTA/nazwa pliku.dat (nazwa pliku nie może zawierać więcej niż 8 znaków);
- 19 - komentarz do wykonywanego pomiaru;
- 20 - niedostępne, zdolność rozdzielcza.



Rys. 4.12.15: Widok ekranu w trybie prowadzenia eksperymentu.

Górny pasek ekranu zajmuje listwa narzędziowa umożliwiająca sterowanie sposobem wyświetlania wyników na bieżąco otrzymywanych w eksperymencie. Środkowa, największa część ekranu zawiera wykres (kolejno pojawiające się punkty). U dołu ekranu wyświetlane są informacje o postępie eksperymentu oraz bieżące wartości parametrów zmienianych automatycznie;

**Zoom** - używając myszy można zaznaczyć prostokątne fragmenty wykresu przeznaczone do powiększenia;

**Point** - używając myszy można sprawdzać współrzędne wybranych punktów;

**Redraw** - odświeżanie wykresu, rysowanie od nowa;

**Fit X** - wyświetlana jest cała dostępna oś X;

**Fit Y** - wyświetlana jest cała dostępna oś Y;

**Y+** lub **Y-** - powoduje powiększenie lub pomniejszenie fragmentu widma w kierunku osi Y;

**Exit** - wyjście z trybu prowadzenia eksperymentu i powrót do trybu ustalania warunków pracy.

### 4.13 Pomiar długości fali świetlnej z wykorzystaniem pierścieni Newtona

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie długości fali trzech linii widmowych rtęci.

Zagadnienia do przygotowania:

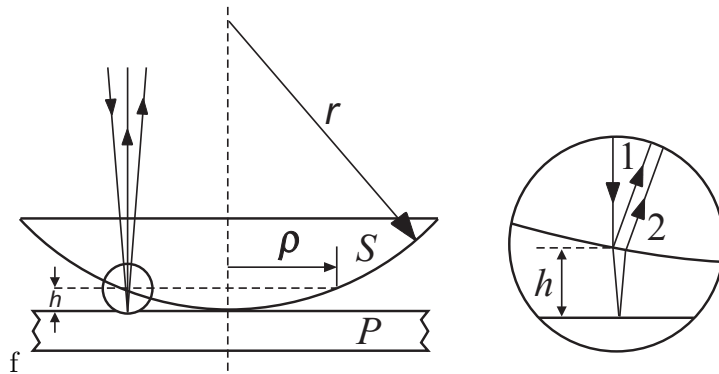
- interferencja fali świetlnej;
- spójność (koherencja) fali świetlnej;
- pierścienie Newtona jako przykład interferencji światła.

Literatura podstawowa: [1], [14], [25].

### 4.13.1 Podstawowe pojęcia i definicje

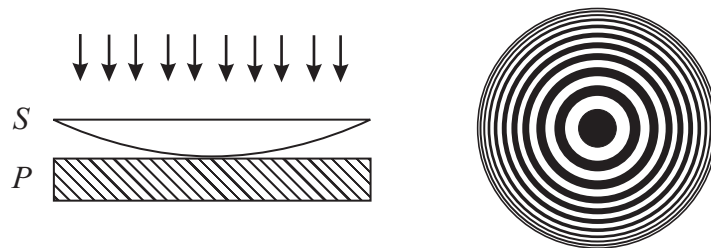
Zagadnienie interferencji światła omówione jest szczegółowo w rozdziale 4.12. Tutaj przedstawione jest specyficzne zjawisko interferencji prowadzące do powstania pierścieni Newtona.

Układ do obserwacji tego zjawiska składa się z soczewki wypukłej  $S$  o dużym promieniu krzywizny  $r$  leżącej na płytce płasko-równoległej  $P$  (rysunek 4.13.1). Między tymi płytkami szklanymi znajduje się cienka warstwa powietrza o grubości  $h$  (grubość ta wzrasta od punktu zetknięcia się płytek w stronę brzegów).



Rys. 4.13.1: Odbicie światła od układu soczewka – płytka płasko-równoległa.

Układ oświetlamy z góry światłem monochromatycznym o długości fali  $\lambda$ . Rysunek 4.13.2 pokazuje, że pojawiają się współśrodkowe pierścienie interferencyjne (pierścienie Newtona) na przemian jasne i ciemne; środek (w miejscu zetknięcia się obu płytek) jest ciemny.



Rys. 4.13.2: Pierścienie Newtona.

Światło padające na układ podlega częściowemu odbiciu na każdej powierzchni granicznej. Promienie odbite interferują ze sobą. W szczególności może interferować promień odbity od górnej powierzchni płytki  $P$  z promieniem odbitym od dolnej powierzchni soczewki  $S$ . Między tymi promieniami istnieje różnica dróg optycznych

$$d = 2h + \frac{\lambda}{2}. \quad (4.13.1)$$

Składnik  $\lambda/2$  pochodzi od zmiany fazy, ponieważ promień odbity od powierzchni  $P$  zmienia fazę drgań o  $180^\circ$  – następuje odbicie fali od środowiska optycznie gęstszego. Ta zmiana fazy odpowiada różnicy dróg równej połowie długości fali. Wzmocnienie drgań nastąpi wtedy, gdy różnica dróg wynosi

$$d_{\max}(m) = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.13.2)$$

Natomiast osłabienie zaobserwujemy, gdy różnica dróg jest równa

$$d_{\min}(k) = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.13.3)$$

Różnica dróg jest stała dla tej samej wartości  $h$  (oraz tej samej wartości promienia podstawy czaszy  $\rho$ ). Otrzymujemy więc obraz w postaci jasnych i ciemnych pierścieni występujących na przemian, których promień możemy otrzymać z prostych rozważań. Korzystając z rysunku 4.13.1 łatwo zauważyć, że zachodzi związek

$$\rho^2 = 2rh - h^2, \quad (4.13.4)$$

Promień krzywizny  $r$  jest duży, czyli  $r \gg h$  i  $2rh \gg h^2$ . Możemy więc zaniedbać wyraz  $h^2$  otrzymując

$$\rho^2 = 2rh. \quad (4.13.5)$$

Łącząc wzory (4.13.1), (4.13.2) i (4.13.5) możemy kwadrat promienia  $\rho_{\max}(m)$  prążków jasnych wyrazić następująco:

$$\rho_{\max}^2(m) = r \left( m - \frac{1}{2} \right) \lambda. \quad (4.13.6)$$

Analogicznie po połączeniu wzorów (4.13.1), (4.13.3) i (4.13.5) dla prążków ciemnych otrzymujemy ich promień równy

$$\rho_{\min}^2(k) = rk\lambda. \quad (4.13.7)$$

Wzory (4.13.6) i (4.13.7) pozwalają na wyznaczenie związku między promieniem krzywizny soczewki  $r$ , promieniami pierścieni Newtona i długością fali  $\lambda$  padającego światła. Obliczmy w tym celu różnicę kwadratów promieni pierścieni Newtona  $\rho_{\max}^2(m_1) - \rho_{\max}^2(m_2)$  dla prążków jasnych  $m_1$ -tego i  $m_2$ -tego. Korzystając z zależności (4.13.6) otrzymujemy wyrażenie na promień krzywizny soczewki

$$r = \frac{\rho_{\max}^2(m_1) - \rho_{\max}^2(m_2)}{(m_1 - m_2) \lambda}. \quad (4.13.8)$$

Podobny związek uzyskamy dla prążków ciemnych  $k_1$ -tego i  $k_2$ -tego

$$r = \frac{\rho_{\min}^2(k_1) - \rho_{\min}^2(k_2)}{(k_1 - k_2)\lambda}. \quad (4.13.9)$$

Pierścienie Newtona znajdują różne zastosowania w praktyce. Używa się ich np. do określania małych krzywizn lub do badania gładkości polerowanych powierzchni. Ponadto, jeśli układ soczewka – płytka płasko-równoległa zostanie umieszczony w cieczy, to znając promień krzywizny  $r$  i długość padającej fali  $\lambda$  przy pomocy pierścieni Newtona możemy wyznaczyć współczynnik załamania cieczy.

### 4.13.2 Przebieg pomiarów

#### Układ doświadczalny

Mikroskop, zestaw składający się z soczewki i płytki płasko-równoległej, lampa sodowa, lampa rtęciowa, trzy filtry. Schemat układu używany w doświadczeniu przedstawiony jest na rysunku 4.13.3.

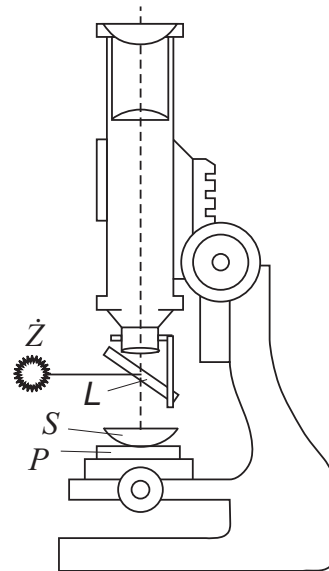
#### Przebieg doświadczenia

Na stoliku mikroskopu umieścić układ składający się z płytki  $P$  i soczewki  $S$ . Między tym układem a obiektywem wstawić przezroczystą szymbkę szklaną  $L$  nachyloną do kierunku biegu promieni pod kątem  $45^\circ$ .

Źródłem światła jest na początku lampa sodowa ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ). Należy pod mikroskopem odnaleźć pierścienie Newtona. W tym celu opuścić tubus bardzo nisko. Układ płytka-soczewka przesunąć tak, aby jego środek leżał na osi optycznej mikroskopu. Odsunąć teraz powoli tubus od płytek, aż do chwili ujrzania pierścieni. Naprowadzić krzyż z nici pajęczych na środek układu prążków oraz wyregulować ostrość.

Używając pokrętła przesunąć układ w prawo o  $m$  pierścieni (wybierać  $m$  około 10-15). Następnie przesunąć układ powoli w lewo, odczytując na mikromierzu położenia kolejnych maksimów aż do  $m$ -tego po lewej stronie od centrum. Położenia maksimów po lewej stronie oznaczamy symbolem  $s_l(m)$ , a po prawej  $s_p(m)$ .

Wymienić lampę sodową na rtęciową i odszukać pierścienie interferencyjne dla światła rtęciowego. Wstawić kolejno trzy filtry i dla każdego z nich odczytać położenia pierścieni Newtona tak jak poprzednio.



Rys. 4.13.3: Aparatura do obserwacji pierścieni Newtona.

### 4.13.3 Opracowanie wyników

#### Wyznaczenie promienia krzywizny soczewki

Obliczenia wykonać w oparciu o pomiary dla lampy sodowej (znana długość fali). Promienie kolejnych prążków interferencyjnych obliczyć ze wzoru:

$$\rho_{\max}(m) = \frac{1}{2} |s_p(m) - s_l(m)|. \quad (4.13.10)$$

Skorzystać ze wzoru (4.13.8) wiążącego kwadraty promieni pierścieni z długością fali  $\lambda$  i promieniem krzywizny soczewki  $r$ . Spośród uzyskanych wyników wybrać kilkanaście par promieni  $[\rho_{\max}(m_1), \rho_{\max}(m_2)]$  i z wzoru (4.13.8) obliczyć promień krzywizny  $r$ . Obliczyć średnią wartość  $r$  i jej niepewność pomiarową. Aby uzyskać dokładniejszy wynik, należy unikać wybierania promieni pierścieni Newtona położonych blisko siebie.

Do wyznaczenia promienia krzywizny można też wykorzystać metodę regresji liniowej, korzystając z zależności we wzorze (4.13.6). Wykreślić zależność kwadratu promienia  $\rho_{\max}^2(m)$  od liczby  $m$ . Obliczyć nachylenie prostej, a stąd promień krzywizny soczewki  $r$  wraz z jej niepewnością pomiarową.

#### Wyznaczenie długości fali trzech linii widmowych rtęci

Ponownie skorzystać ze wzoru (4.13.8) obliczając z niego długość fali. Dla kolejnych linii widmowych powtarzać obliczenia w sposób analogiczny jak poprzednio. Posługując się pierwszą metodą opisaną powyżej i wybierając kilkanaście par pomiarów dla różnych  $m_1$  i  $m_2$  otrzymuje się wiele wartości długości fali  $\lambda$ . Stąd obliczyć średnią wartość długości fali i jej niepewność pomiarową. Alternatywnie można skorzystać ze wzoru (4.13.6) i zastosować metodę regresji liniowej. Z nachylenia prostej dla zależności długości fali od kwadratu promienia pierścieni wyznaczyć długość fali i jej niepewność pomiarową.

## 4.14 Pomiar długości fali świetlnej za pomocą siatki dyfrakcyjnej

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie długości fal występujących w widmie emisyjnym rtęci, za pomocą spektrometru siatkowego.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- zjawisko dyfrakcji i interferencji światła;
- zasada działania spektrometru siatkowego;
- siatka dyfrakcyjna; dyspersja kątowa; zdolność rozdzielcza;
- zasada pomiaru kątów za pomocą kątomierza z noniusem;
- justowanie spektrometru.

Literatura podstawowa: [25], [1], [35].

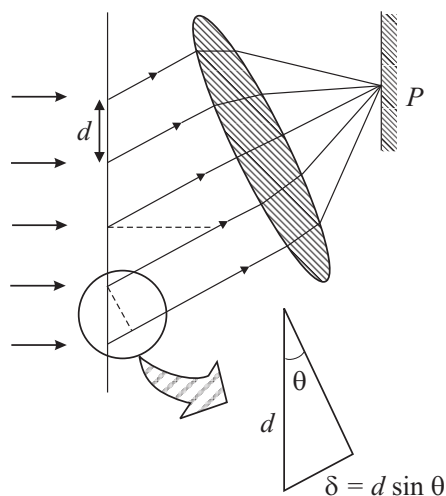
#### 4.14.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Należy zapoznać się z opisem zjawisk interferencji i dyfrakcji światła przedstawionym w rozdziale 4.12.

#### Siatka dyfrakcyjna

Siatka dyfrakcyjna jest przyrządem używanym bardzo często w analizie widmowej (patrz opis w rozdziale 4.11) różnych źródeł światła. Siatka składa się z dużej liczby wzajemnie równoległych i leżących w równych odstępach szczelin. Odległość pomiędzy szczelinami nazywana jest stałą siatki. Zazwyczaj siatkę dyfrakcyjną stanowi szereg rys na szkle, gdzie przestrzenie między rysami spełniają rolę szczelin. Światło padające na siatkę ulega ugięciu na każdej szczelinie i w płaszczyźnie ogniskowej soczewki zbierającej powstają maksima natężenia, podobnie jak w przypadku pojedynczej szczeliny. Maksima natężenia światła po ugięciu są szczególnie wyraźne gdyż wzmacniają się promienie wychodzące ze wszystkich szczelin. Następuje to w przypadku, gdy różnica dróg optycznych  $\delta$  pomiędzy promieniami wychodzącymi z dwóch sąsiednich szczelin wynosi  $m\lambda$  (rysunek 4.14.1). Występuje to dla kąta ugięcia  $\theta$  spełniającego warunek (maksimum interferencji):

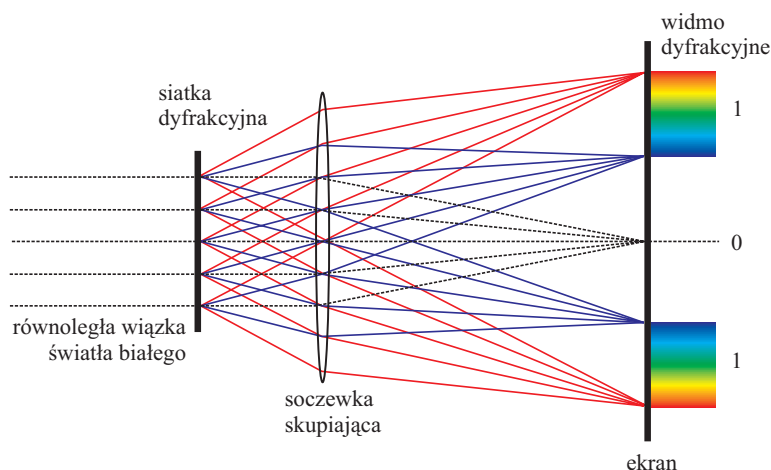
$$d \sin \theta = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.14.1)$$



Rys. 4.14.1: Ugięcie światła na siatce dyfrakcyjnej o stałej  $d$ .

Liczba naturalna  $m$  oznacza rząd widma. W przypadku światła zawierającego kilka długości fali lub wszystkie, jak w świetle białym, maksimum  $m$ -tego rzędu dla każdej długości fali występuje przy innym kącie  $\theta$ . Natomiast maksimum zerowego rzędu,  $m = 0$ , dla wszystkich długości fal występuje przy  $\theta = 0$ . Tak więc dla światła białe-

go obserwowane jest białe, nie zabarwione centralne maksimum zerowego rzędu, a po obu jego stronach występują widma dyfrakcyjne pierwszego, drugiego i dalszych rzędów. Widma mają postać tęczywch pasm (rysunek 4.14.2), których barwa przechodzi w sposób ciągły od niebieskiej (mały kąt  $\theta$ ) do czerwonej (duży kąt  $\theta$ ). Oczywiście, w przypadku światła monochromatycznego maksima dyfrakcyjne wszystkich rzędów mają tę samą barwę.



Rys. 4.14.2: Obraz dyfrakcyjny światła białego po przejściu przez siatkę dyfrakcyjną.

### Dyspersja kątowa

Dyspersja kątowa siatki dyfrakcyjnej jest miarą zdolności siatki do rozszczepiania światła polichromatycznego na wiązki monochromatyczne. Jeżeli źródło światła emituje dwie długości fali  $\lambda$  i  $\lambda + \Delta\lambda$ , to ich maksima dyfrakcyjne powstaną dla kątów ugięcia  $\theta$  i  $\theta + \Delta\theta$ , dla których spełnione są warunki:

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d} \quad \text{oraz} \quad \sin(\theta + \Delta\theta) = m \frac{\lambda + \Delta\lambda}{d}, \quad (4.14.2)$$

dla małych kątów  $\Delta\theta$  można zapisać:

$$\sin(\theta + \Delta\theta) \cong \sin \theta + \Delta\theta \cos \theta, \quad (4.14.3)$$

co po wstawieniu (4.14.3) do (4.14.2) daje:

$$m \frac{\lambda + \Delta\lambda}{d} = \frac{m\lambda}{d} + \Delta\theta \cos \theta. \quad (4.14.4)$$

A stąd

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} \quad (4.14.5)$$



Wyrażenie (4.14.5) jest definicją wielkości nazywanej dyspersją kątową siatki. Dyspersja wzrasta wraz z rzędem widma i jest odwrotnie proporcjonalna do stałej siatki.

Ogólnie zdolność rozdzielcza definiowana jest jako:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (4.14.6)$$

gdzie  $\lambda$  jest średnią długością fali dwóch ledwo rozróżnialnych linii widmowych, a  $\Delta\lambda$  jest różnicą ich długości fal. Zdolność rozdzielcza siatki jest określana przez kryterium Rayleigha, według którego dwie długości fali są rozróżnialne jeżeli mają odległość kątową  $\Delta\theta$  taką, że maksimum główne jednej linii przypada na pierwsze minimum drugiej. Stosując to kryterium można pokazać, że zdolność rozdzielcza siatki dyfrakcyjnej wynosi:

$$R = Nm, \quad (4.14.7)$$

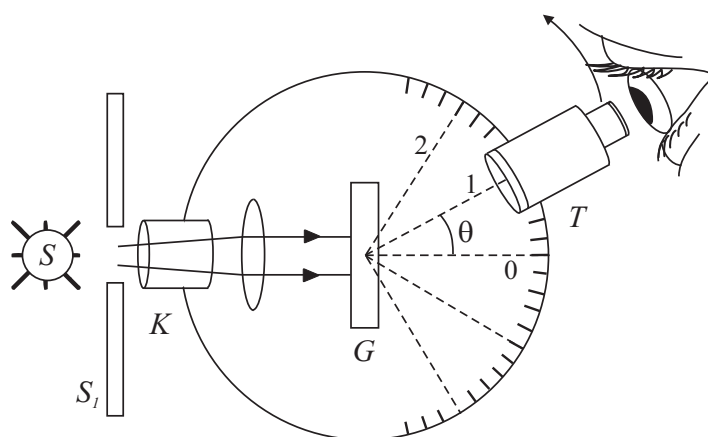
gdzie  $N$  jest ilością szczelin, a  $m$  rzędem widma. Przy analizie widmowej należy wybrać optimum pomiędzy dużym natężeniem widma (małe  $m$ ), a zdolnością rozdzielczą (duże  $m$ ).

#### 4.14.2 Przebieg pomiarów

##### Układ doświadczalny

Do wykonania tego ćwiczenia służy prosty model spektrometru siatkowego (rysunek 4.14.3), w którego skład wchodzi: siatka dyfrakcyjna  $G$  umieszczona na stoliku, lunetka  $T$ , kolimator  $K$  ze szczeliną  $S_1$  o regulowanej szerokości, lampy spektralne Na i Hg –  $S$ .

Lunetka  $T$  może poruszać się po okręgu (wokół osi przechodzącej przez środek stolika z siatką dyfrakcyjną), na którym umieszczona jest skala kątowa z dwoma noniuszami przesuniętymi względem siebie o  $180^\circ$ .



Rys. 4.14.3: Schemat spektrometru siatkowego.

## Przebieg doświadczenia

### Justowanie spektrometru

Na siatkę dyfrakcyjną powinna padać równoległa wiązka światła. Aby to osiągnąć należy ustawić lunetkę na ostrość widzenia bardzo odległych przedmiotów i zablokować położenie tubusa w tej pozycji (czynność wykonywana na korytarzu). W tym przypadku do lunety dociera z „nieskończoności” (od bardzo odległego przedmiotu) równoległa wiązka światła i ostry obraz tego przedmiotu powstaje w płaszczyźnie ogniskowej soczewki.

Przed szczeliną  $S_1$  kolimatora ustawić lampę spektralną Na i równomiernie oświetlić szczelinę. Patrząc przez lunetkę należy uzyskać ostry obraz tej szczeliny (prążek żółty) co oznacza, że wiązka światła wychodząca z kolimatora jest wiązką równoległą. Można to osiągnąć przez ustawienie oświetlonej szczeliny dokładnie w ognisku soczewki kolimatora. Odpowiednie położenie tubusa należy zablokować.

Siatka dyfrakcyjna powinna być ustawiona prostopadle do padającej wiązki światła. Aby to osiągnąć należy obserwować w lunetce ostre widzenie prążka zerowego rzędu oraz pierwszego rzędu w prawo i lewo. Dobrać odpowiednią szerokość szczeliny, aby natężenia obu prążków pierwszego rzędu były porównywalne. Odczytać na skali położenie katowe lunetki dla prążka zerowego rzędu (odczyt z dwóch noniuszy  $a_0$ ,  $b_0$ ). Ustawienie prawidłowe uzyskuje się, gdy środek prążka jest widoczny na skrzyżowaniu nici pajęczych widocznych w lunetce. W podobny sposób odczytać położenia katowe lunetki dla prążków pierwszego rzędu w prawo oraz w lewo.

Obliczyć kąty ugięcia dla prążków pierwszego rzędu w lewo  $\theta_l$  i w prawo  $\theta_p$ . Przy prawidłowym ustawieniu siatki, kąty powinny być równe. Przy dużych różnicach, powyżej jednego stopnia należy poprawić ustawienie siatki. Odczytać położenia katowe lunetki dla prążków drugiego rzędu w prawo i w lewo dla lampy Na.

Oświetlić szczelinę lampą Hg i obserwować układ linii widmowych pierwszego rzędu z prawej i lewej strony prążka zerowego. Odczytać wartości położenia katowych lunetki przy obserwacji kolejnych linii widmowych. Przy dobrym ustawieniu spektrometru widoczne jest również widmo drugiego rzędu. W tym przypadku należy odczytać odpowiednie kąty. Odczyt powinien być przeprowadzony zawsze dla dwóch noniuszy.

### 4.14.3 Opracowanie wyników

Na podstawie wyników pomiarów przeprowadzonych przy użyciu lampy Na (światło monochromatyczne o znanej długości fali), obliczyć stałą siatki dyfrakcyjnej oraz niepewność pomiarową przy jej wyznaczeniu. Należy pamiętać, że niepewność pomiarowa kąta musi być wyrażona w radianach.

Obliczyć kąty ugięcia dla wszystkich linii widmowych Hg. Znając stałą siatki, obliczyć długości fali odpowiadające liniom widmowym rtęci oraz odpowiednie niepewności pomiarowe. Porównać otrzymane wyniki z danymi tablicowymi.

## 4.15 Badanie dyfrakcji światła laserowego na kryształach koloidalnym

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie stałej sieci dwuwymiarowego kryształu koloidalnego metodą dyfrakcji światła laserowego.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- struktura krystaliczna (sieć przestrzenna, baza);
- komórka elementarna, komórka prosta;
- podstawowe rodzaje sieci dwuwymiarowych;
- sieć odwrotna;
- monokryształy i polikryształy;
- dyfrakcja promieniowania elektromagnetycznego na kryształach (prawo Bragga, równania Lauego, konstrukcja Ewalda);
- wykonanie w postaci pisemnej trzech zadań z podrozdziału 4.15.1.

Literatura podstawowa: [26] rozdział 1 i 2; literatura dodatkowa: [34], [33], [32].

### 4.15.1 Podstawowe pojęcia i definicje

#### Sieć przestrzenna

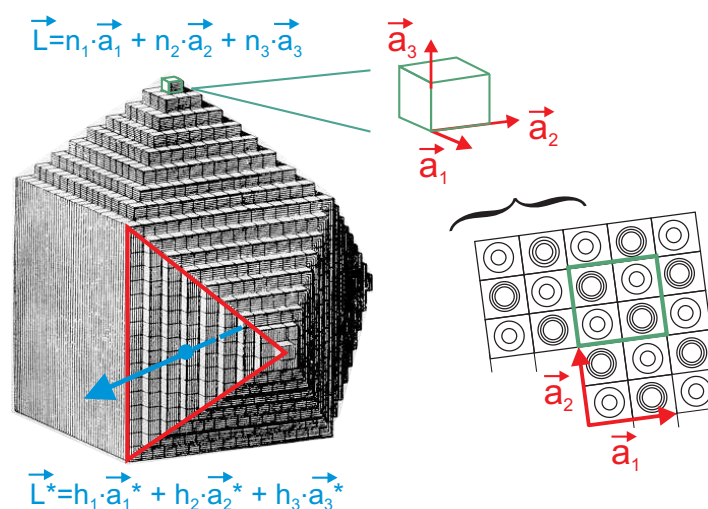
Klasyczna definicja kryształu mówi, że jest to ciało stałe, którego gęstość  $\rho(\vec{r})$  jest funkcją niezmienniczą względem przesunięcia o wektor sieci przestrzennej tj.  $\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r} + \vec{L})$ . Wektor  $\vec{L} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$  jest wektorem sieci przestrzennej (sieci rzeczywistej, sieci krystalicznej), gdzie  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  są wektorami bazowymi sieci przestrzennej (nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie), a  $n_1, n_2, n_3$  są liczbami całkowitymi (rysunek 4.15.1). Wektory bazowe sieci definiują komórkę elementarną, czyli elementarną przestrzeń kryształu, której motyw (tj. rozmieszczenie atomów) jest periodycznie powtarzany w całym kryształach. Dlatego, aby opisać strukturę kryształu, wystarczy znać:

- parametry komórki elementarnej, tj. długości wektorów bazowych oraz kąty między nimi,
- motyw komórki elementarnej tego kryształu.

W badanym koloidalnym heksagonalnym kryształach 2-wymiarowym komórka elementarna jest rombem, którego boki tworzą kąt  $120^\circ$ . Komórka elementarna tego kryształu ma tylko jeden parametr – długość boku (oznaczany jako  $a$ ), którego wyznaczenie jest celem ćwiczenia.

#### Sieć odwrotna

Płaszczyzny sieciowe, tj. płaszczyzny przechodzące przez węzły sieci przestrzennej, określają zewnętrzne ściany kryształu. Kierunki prostopadłe do tych płaszczyzn (oraz do ścian) są określone przez wektory sieci odwrotnej  $\vec{L}^* = h_1\vec{a}_1^* + h_2\vec{a}_2^* + h_3\vec{a}_3^*$  (rysunek

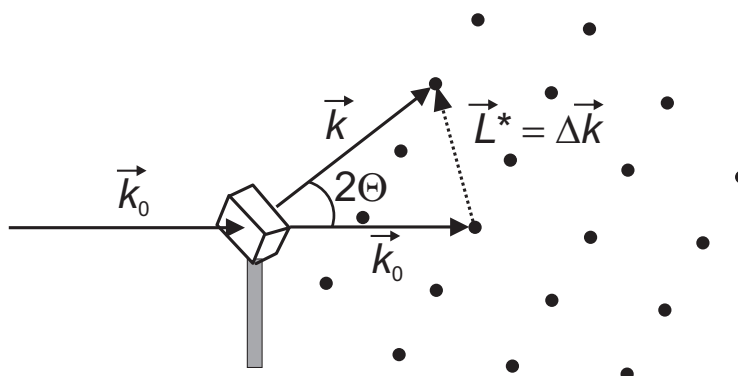


Rys. 4.15.1: Trójwymiarowa i dwuwymiarowa sieć krystaliczna.

4.15.1). Wektory sieci odwrotnej określają także kierunki promieniowania rozproszonego na badanym kryształ (promieniowania rentgenowskiego bądź elektronów czy neutronów dla kryształu lub światła laserowego w przypadku kryształu koloidalnego). Różnica  $\Delta\vec{k}$  między wektorem falowym promieniowania padającego  $\vec{k}_0$  i promieniowania rozproszonego  $\vec{k}$  jest równa dokładnie wektorowi sieci odwrotnej:

$$\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0 = \vec{L}^*. \quad (4.15.1)$$

Ten tzw. warunek Lauego (rysunek 4.15.2) określa warunki dyfrakcji. Jest on równoważny warunkowi Bragga oraz tzw. konstrukcji Ewalda.



Rys. 4.15.2: Dyfrakcja na kryształach – warunek Lauego.

## Relacja między siecią przestrzenną i siecią odwrotną

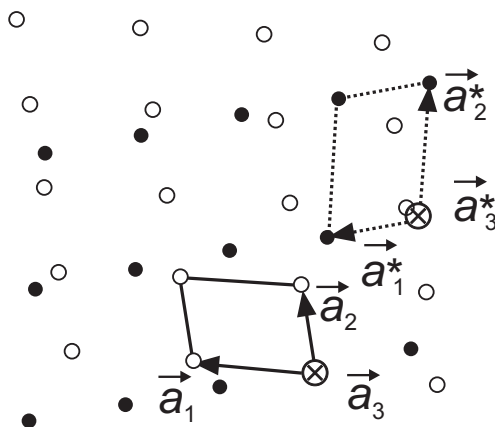
Wektory sieci przestrzennej definiują wektory sieci odwrotnej ( $V$  jest objętością komórki elementarnej):

$$\vec{a}_1^* = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3), \quad \vec{a}_2^* = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1), \quad \vec{a}_3^* = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2), \quad (4.15.2)$$

$$V = \vec{a}_1 [\vec{a}_2 \times \vec{a}_3] = \vec{a}_2 [\vec{a}_3 \times \vec{a}_1] = \vec{a}_3 [\vec{a}_1 \times \vec{a}_2].$$

Dlatego też na podstawie doświadczeń dyfrakcyjnych (określających parametry sieci odwrotnej, takich jak długości wektorów  $\vec{a}_1^*$ ,  $\vec{a}_2^*$ ,  $\vec{a}_3^*$  oraz kąty między nimi) możemy określić parametry komórki elementarnej.

Na rysunku 4.15.3 przedstawiona jest sieć ukośnokątna. Jest to najbardziej ogólny przypadek dwuwymiarowej sieci przestrzennej. Oprócz sieci ukośnokątnej wyróżniamy jeszcze cztery typy dwuwymiarowych sieci przestrzennych: sieć kwadratową ( $a_1 = a_2$ ;  $\alpha = 90^\circ$ ), sieć prostokątną i prostokątną centrowaną ( $a_1 \neq a_2$ ;  $\alpha = 90^\circ$ ) oraz sieć heksagonalną ( $a_1 = a_2$ ;  $\alpha = 120^\circ$ ).



Rys. 4.15.3: Dwuwymiarowa sieć ukośnokątna (puste kółka) i jej sieć odwrotna (pełne kółka).

Zadanie 1. Znajdź:

1. związek między wektorami bazowymi  $\vec{a}_1$  i  $\vec{a}_2$  dwuwymiarowej sieci kryształu koloidalnego a wektorami  $\vec{a}_1^*$  i  $\vec{a}_2^*$  jego sieci odwrotnej oraz oblicz kąt między wektorami  $\vec{a}_1^*$  i  $\vec{a}_2^*$ . Wskazówka: skorzystaj z relacji (4.15.2); jako  $\vec{a}_3$  przyjmij wektor jednostkowy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny sieci dwuwymiarowej. Odpowiedź: szukany kąt winien mieć  $60^\circ$ ;
2. związek między długością  $a^*$  wektora sieci odwrotnej i parametrem  $a$  komórki elementarnej kryształu koloidalnego (stałą sieci przestrzennej). Odpowiedź:  $a^* = \frac{4\pi}{a\sqrt{3}}$ ;

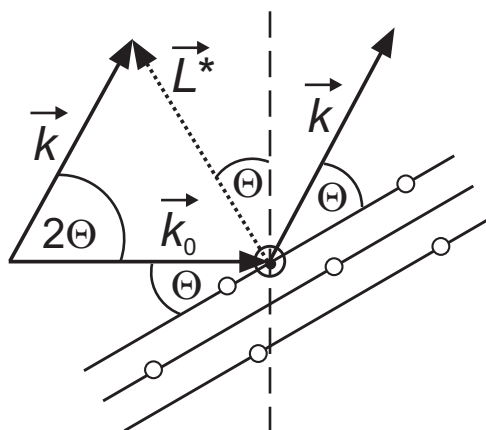
3. długość dowolnego wektora sieci odwrotnej  $|\vec{L}_{h_1 h_2}^*| = |h_1 \vec{a}_1^* + h_2 \vec{a}_2^*|$ . Odpowiedź:  
 $|\vec{L}_{h_1 h_2}^*| = a^* \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2}$ .

### Dyfrakcja na kryształach

Warunek Bragga dla dyfrakcji określa położenie  $n$ -tego maksimum dyfrakcyjnego uzyskanego dla promieniowania o długości  $\lambda$  rozpraszanego na układzie równoległych płaszczyzn sieciowych przy odległości międzypłaszczyznowej  $d_{h_1 h_2 h_3}$ :

$$2d_{h_1 h_2 h_3} \sin \Theta = n\lambda. \quad (4.15.3)$$

Maksimum to występuje dla określonej przez powyższy warunek wartości kąta  $\Theta$  (patrz rysunek 4.15.4). Jest to kąt między płaszczyznami sieciowymi a kierunkiem  $\vec{k}_0$  promieniowania padającego. Jednocześnie jest to kąt między tymi płaszczyznami a kierunkiem  $\vec{k}$  promieniowania rozproszonego. Natomiast  $2\Theta$  to kąt między  $\vec{k}_0$  i  $\vec{k}$ .



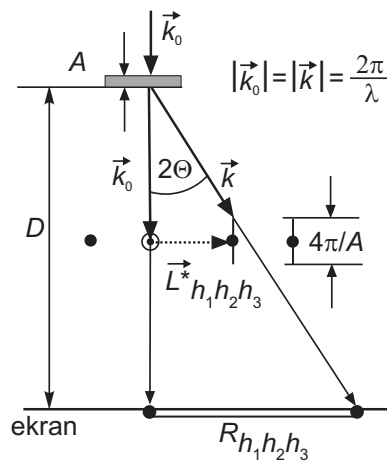
Rys. 4.15.4: Dyfrakcja na układzie równoległych płaszczyzn sieciowych.

Odległość  $d_{h_1 h_2 h_3}$  między równoległymi płaszczyznami sieciowymi można łatwo obliczyć, jeśli znamy długość wektora  $\vec{L}_{h_1 h_2 h_3}^*$  określającego orientację tych płaszczyzn (wektora prostopadłego do nich):

$$d_{h_1 h_2 h_3} = \frac{2\pi}{|\vec{L}_{h_1 h_2 h_3}^*|}. \quad (4.15.4)$$

Jeżeli  $h_1, h_2, h_3$  nie są liczbami względem siebie pierwszymi to prawą stronę równania (4.15.4) należy pomnożyć przez liczbę naturalną większą od jedności.

Doświadczalny układ dyfrakcyjny przypomina układ stosowany w dyfrakcji elektronów na kryształach mających postać warstwy o grubości  $A$  (patrz rysunek 4.15.5). Kąt  $2\Theta_{exp}$  jest określony w eksperymencie przez relację:



Rys. 4.15.5: Schemat układu do badania dyfrakcji na kryształach w postaci cienkiej warstwy.

$$2\Theta_{exp} = \arctan \frac{R_{h_1 h_2 h_3}}{D}, \tag{4.15.5}$$

gdzie  $D$  – odległość kryształu do ekranu (kliszy);  $R_{h_1 h_2 h_3}$  – odległość na ekranie (kliszy) od plamki centralnej rozpraszania do plamki odpowiadającej wektorowi sieci odwrotnej  $\vec{L}^*_{h_1 h_2 h_3}$ .

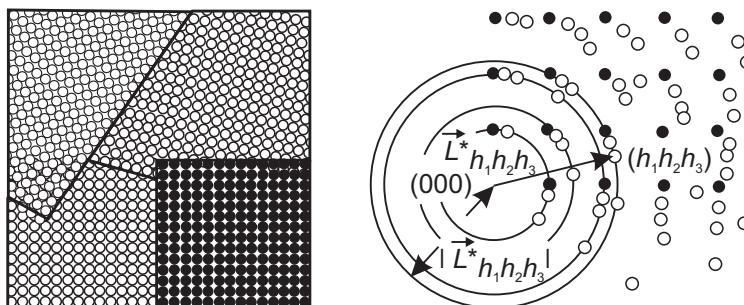
Zadanie 2. Korzystając z  $L^*_{h_1 h_2}$  obliczonego dla kryształu koloidalnego oraz równań (4.15.3) i (4.15.4) oblicz, dla  $n = 1$  (maksimum dyfrakcyjne pierwszego rzędu), teoretyczną wartość kąta  $\Theta_{th}$ , dla którego powinniśmy uzyskać maksimum dyfrakcyjne. Wyznaczone eksperymentalnie wartości kąta  $\Theta_{exp}$  porównasz z wartościami teoretycznymi, aby wyznaczyć parametr  $a$  komórki elementarnej.

### Monokryształy i polikryształy

Ciało krystaliczne, dla którego orientacja sieci przestrzennej we wszystkich jego punktach jest identyczna nazywamy monokryształem. Dyfrakcja na monokryształach daje plamki dyfrakcyjne określone przez dyskretne węzły sieci odwrotnej. W przypadku badanego kryształu koloidalnego plamki dyfrakcyjne dadzą sieć heksagonalną. W otaczającym nas świecie stosunkowo rzadko spotykane są monokryształy o rozmiarach większych od średnicy wiązki promieniowania użytego do dyfrakcji. Najczęściej badane ciała krystaliczne są konglomeratem wielu monokrystalicznych ziaren, różniących się orientacją sieci przestrzennej. Takie substancje określa się mianem polikryształów (proszków krystalicznych).

Obraz dyfrakcyjny otrzymany dla polikryształu to obraz wielu identycznych, ale różnie zorientowanych, sieci odwrotnych o wspólnym węźle  $(h_1 h_2 h_3) = (0 0 0)$  (tj. dla  $\vec{L}^* = 0\vec{a}_1^* + 0\vec{a}_2^* + 0\vec{a}_3^* = 0$ ). Węzeł ten jest określony przez plamkę centralną obrazu dy-

frakcyjnego. W wyniku nałożenia obrazów tych różnie zorientowanych sieci odwrotnych otrzymujemy obraz dyfrakcyjny w postaci współśrodkowych sfer o promieniach odpowiadających wartościom  $|\vec{L}_{h_1 h_2 h_3}^*|$  (rysunek 4.15.6). W przypadku badanego kryształu koloidalnego obraz dyfrakcyjny jego obszaru polikrystalicznego ma postać koncentrycznych pierścieni o promieniach określonych zależnością  $|\vec{L}_{h_1 h_2}^*| = a^* \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2}$ .



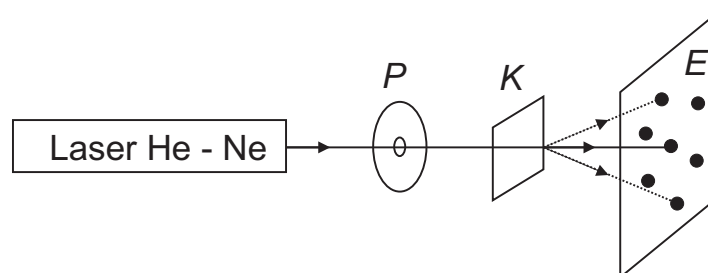
Rys. 4.15.6: Polikryształ i jego obraz dyfrakcyjny.

Zadanie 3. Oblicz promienie kolejnych pierścieni dyfrakcyjnych i przypisz im pary wskaźników  $(h_1 h_2)$ . Odpowiedź: powinieneś otrzymać następujące pary wskaźników:  $(1 0)$ ,  $(1 1)$ ,  $(2 0)$ ,  $(2 1)$ ,  $(3 0)$ , ... .

## 4.15.2 Przebieg pomiarów

### Układ pomiarowy

W skład układu doświadczalnego, przedstawionego na rysunku 4.15.7, wchodzi: laser He-Ne, przesłona, specjalnie spreparowany dwuwymiarowy kryształ koloidalny, ekran służący do obserwacji i rejestracji obrazu dyfrakcyjnego. Ponadto do dyspozycji jest papier fotograficzny, wywoływacz i utrwalacz oraz kuwety do utrwalenia obrazu dyfrakcyjnego.



Rys. 4.15.7: Schemat układu służącego do otrzymywania obrazu dyfrakcyjnego dwuwymiarowego kryształu koloidalnego ( $P$ - przesłona,  $K$ - kryształ koloidalny,  $E$ - ekran/klisza fotograficzna).



### Przebieg doświadczenia

Wykonać obserwację struktury badanego dwuwymiarowego kryształu koloidalnego pod mikroskopem - notatkę umieścić w protokole pomiarowym. Wykonać pomiary pozwalające na obliczenie stałej sieci badanego kryształu.

Wykonać obserwację obrazu dyfrakcyjnego (oddzielnie dla obszaru monokrystalicznego i polikrystalicznego próbki) na ekranie znajdującym się w odległości około 2 m od kryształu. Wykonać pomiary pozwalające na obliczenie stałej sieci badanego kryształu.

Utrwalić obraz dyfrakcyjny (oddzielnie dla obszaru monokrystalicznego i polikrystalicznego próbki) na papierze fotograficznym ustawionym jako ekran w odległości około 15 cm od kryształu.

#### 4.15.3 Opracowanie wyników

Na podstawie pomiarów wykonanych pod mikroskopem obliczyć wartość stałej sieci badanego kryształu i oszacować niepewność pomiarową (niepewność pomiarowa wielkości mierzonej bezpośrednio).

Korzystając z wyników uzyskanych w zadaniach 1–3 znaleźć wyrażenie pozwalające wyznaczyć wartość stałej sieci badanego kryształu na podstawie pomiarów wykonanych na obrazie dyfrakcyjnym.

Wyznaczyć wartość stałej sieci badanego kryształu (oddzielnie dla obszaru monokrystalicznego i polikrystalicznego próbki) na podstawie pomiarów wykonanych na obrazie dyfrakcyjnym obserwowanym na ekranie znajdującym się w dużej odległości od kryształu. Oszacować niepewności pomiarowe (metodą różniczki zupełnej lub propagacji odchylenia standardowego dla pomiarów pośrednich). Należy zwrócić uwagę, czy uzyskane wyniki są zgodne w granicach niepewności pomiarowej.

Przerysować zdjęcia obszaru monokrystalicznego i polikrystalicznego próbki na przezroczystą folię, zaznaczając tylko najmocniejsze refleksy (istotne z punktu widzenia dalszego opracowania). Ponumerować refleksy, zmierzyć i zapisać w odpowiedniej tabeli odległości refleksów pozwalające na wyznaczenie promieni  $R_{h_1h_2}$ . Wyznaczyć wartość stałej sieci badanego kryształu (oddzielnie dla obszaru monokrystalicznego i polikrystalicznego próbki) oraz oszacować niepewności pomiarowe. Czy uzyskane wyniki są zgodne w granicach niepewności pomiarowych?

Przeprowadzić dyskusję zgodności wyników uzyskanych na podstawie pomiarów wykonanych pod mikroskopem, na ekranie umieszczonym w dużej odległości od badanego kryształu oraz na kliszy fotograficznej, zarówno dla obszarów poli- jak i monokrystalicznych. Należy pamiętać, że stosowane było przybliżenie małych kątów. Które pomiary są najbardziej precyzyjne?

Sformułować wnioski końcowe i podać uzyskaną w eksperymencie wartość stałej sieci badanego dwuwymiarowego kryształu koloidalnego (wraz z niepewnością pomiarową).

## 4.16 Pomiar prędkości dźwięku w cieczy metodą optyczną

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie prędkości rozchodzenia się dźwięku w cieczy przy użyciu światła laserowego i obrazu cieniowego fali stojącej w alkoholu propylowym.

*Zagadnienia do przygotowania:*

- ultradźwięki – dźwięki o częstościach 20 kHz – 20 MHz;
- rozchodzenie się dźwięku w cieczech – fala podłużna;
- fala stojąca – złożenie dwóch sinusoidalnych fal o równych częstościach i amplitudach, biegnących w przeciwnych kierunkach;
- metody uwidaczniania fal dźwiękowych – obrazy smugowe.

Literatura podstawowa: [28], [29], [30], [31].

### 4.16.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Większość potrzebnych informacji teoretycznych podana jest w rozdziałach 4.3 i 4.4, tutaj przedstawione są dodatkowe pojęcia konieczne do wykonania i opracowania doświadczenia.

#### Fala stojąca

Rozważmy dwie identyczne fale  $y_1$  i  $y_2$  rozchodzące się w przeciwnych kierunkach. Korzystając z równania (4.3.3) fale te możemy zapisać jako:

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad (4.16.1)$$

$$y_2 = A \cos(\omega t + kx), \quad (4.16.2)$$

gdzie równanie (4.16.1) opisuje falę biegnącą w prawo, a równanie (4.16.2) opisuje falę biegnącą w lewo. Częstość fali można wyrazić przez jej częstotliwość  $\omega = 2\pi\nu$ , a liczbę falową przez długość fali  $k = 2\pi/\lambda$ . Korzystając z tego podstawienia można falę wypadkową powstającą ze złożenia fal  $y_1$  i  $y_2$  zapisać w postaci:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(2\pi\nu t). \quad (4.16.3)$$

W ten sposób otrzymujemy falę stojącą, czyli drgania zachodzące z częstotliwością  $\nu$  i o amplitudzie  $A(x)$ :

$$A(x) = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (4.16.4)$$

Dla fali stojącej możemy wyróżnić pewne charakterystyczne punkty zwane węzłami i strzałkami fali. Węzły fali stojącej powstają w punktach, które nie wykonują drgań, czyli dla takich wartości  $x_w$  dla których  $A(x) = 0$ . Odpowiada to warunkowi:

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0 \rightarrow x_w = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}. \quad (4.16.5)$$

Strzałki powstają w punktach  $x_s$ , w których amplituda  $A(x)$  fali stojącej jest maksymalna, co odpowiada warunkowi:

$$\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 1 \rightarrow x_s = n\frac{\lambda}{2}. \quad (4.16.6)$$

Jak wynika z wzorów (4.16.5) i (4.16.6) kolejne węzły (i strzałki) oddalone są od siebie o połowę długości fali.

Falę stojącą można wytworzyć w zamkniętym zbiorniku z gazem lub z cieczą. Na jednym końcu znajduje się generator wytwarzający falę, a drugi koniec zbiornika jest zamknięty. Następuje wtedy złożenie fali wytwarzanej przez generator z falą odbitą od drugiego końca zbiornika. Fala stojąca powstanie tylko wtedy gdy odległość  $L$  pomiędzy końcami zbiornika będzie całkowitą wielokrotnością połowy długości fali:

$$L = n\frac{\lambda}{2}. \quad (4.16.7)$$

Jeżeli odległość  $z$  pomiędzy końcami zbiornika będzie się zmieniała to kolejne fale stojące będą obserwowane po zmianie odległości  $\Delta z$  końców zbiornika o połowę długości fali:

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2}. \quad (4.16.8)$$

## 4.16.2 Przebieg pomiarów

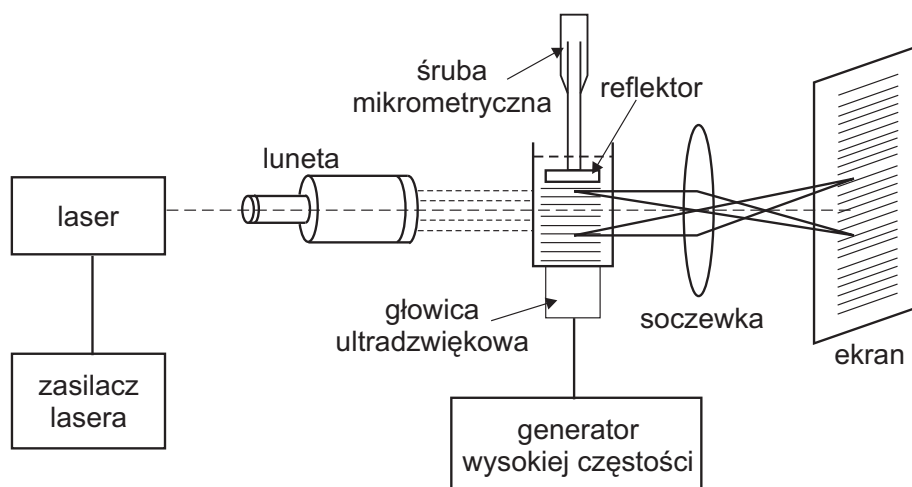
### Układ doświadczalny

Generator wysokiej częstotliwości, głowica ultradźwiękowa, przesuwany reflektor, laser, lunetka, ekran. Aparatura używana w doświadczeniu przedstawiona jest na rysunku 4.16.1.

### Metoda pomiarowa

Wiązka światła z lasera He-Ne przechodząc przez lunetę zostaje uformowana w wiązkę równoległą i oświetla naczynie, w którym znajduje się alkohol propylowy. Po przejściu przez ciecz światło pada na soczewkę skupiającą, a następnie na ekran. Laser, luneta, naczynie z propanolem, soczewka i ekran umieszczone są na ławie optycznej, dzięki czemu możliwe jest współosiowe ustawienie wszystkich elementów układu.

Naczynie z alkoholem umocowane jest na specjalnym stoliku. Dno naczynia stanowi głowica ultradźwiękowa, na którą podawany jest sygnał z generatora wysokiej częstotliwości. Od góry wprowadza się do naczynia tarczę metalową (reflektor) zamocowaną do śruby mikrometrycznej. Umożliwia to zmianę odległości pomiędzy głowicą nadawczą



Rys. 4.16.1: Schemat aparatury.

i reflektorem. Fala dźwiękowa wysyłana przez głowicę rozchodzi się w cieczy i dociera do zanurzonego w niej reflektora, od którego następuje odbicie fali i zmiana kierunku rozchodzenia się na przeciwny. Jeżeli odległość pomiędzy głowicą i reflektorem równa jest całkowitej wielokrotności połowy długości fali  $\lambda/2$ , w cieczy powstaje fala stojąca, tzn. nie zmieniają swojego położenia węzły i strzałki takiej fali. Oznacza to, że w przekroju pionowym naczynia istnieją miejsca, gdzie gęstość ośrodka jest większa (węzły fali) i mniejsza (strzałki fali). Różnice gęstości oznaczają różne wartości współczynników załamania światła co z kolei powoduje, że padające na naczynie promienie po przejściu przez ciecz o periodycznie zmiennej gęstości opuszczają naczynie pod różnymi kątami. Ze względu na spójność promieniowania laserowego, zmiany gęstości cieczy obserwuje się na ekranie w postaci poziomych, ciemnych i jasnych prążków – tzw. obraz smugowy lub cieniowy.

### Przebieg doświadczenia

Ustawić na ławie optycznej współosiowo laser, lunetę, naczynie z propanolem, soczewkę i ekran. Kuwetę napelnić propanolem. Włączyć laser i generator. Ustawić najniższą możliwą częstotliwość generatora. Za pomocą śruby mikrometrycznej umieścić reflektor w cieczy. Powoli przesuwając reflektor aż do momentu, gdy na ekranie pojawią się ciemne i jasne prążki. Wyregulować ostrość, odczekać aż obraz ustabilizuje się. Odczytać i zapisać położenie śruby mikrometrycznej. Ponownie przesunąć reflektor, znaleźć następny ostry obraz poziomych prążków. Czynność tę powtarzać, za każdym razem zapisując położenie śruby mikrometrycznej. W czasie pomiarów należy oszacować błąd ustawienia ostrego obrazu. W tym celu kilkakrotnie wyznaczyć położenia śruby dla tego samego obrazu cieniowego (dla kilku punktów pomiarowych). Pomiarów powtórzyć dla kilku innych częstotliwości sygnału z generatora.

### 4.16.3 Opracowanie wyników

Otrzymane wyniki pomiarów przedstawić na wykresie zależności położenia śruby mikrometrycznej  $z$  w zależności od numeru obserwowanego obrazu  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Wykresy wykonać oddzielnie dla każdej częstotliwości sygnału z generatora. Dopasować do otrzymanych punktów prostą o równaniu:

$$z = an + b. \quad (4.16.9)$$

Różnice kolejnych położenia śruby mikrometrycznej  $\Delta z$ , przy których obserwuje się ostry obraz poziomych prążków odpowiadają połowie długości fali dźwiękowej. Dla kolejnych obrazów  $\Delta n = 1$ , więc z wzoru (4.16.9) otrzymujemy  $\Delta z = a$  i korzystając z wzoru (4.16.8) możemy wyznaczyć długość fali  $\lambda = 2a$ . Korzystając z niepewności współczynników regresji liniowej obliczyć niepewności pomiarowe wyznaczonej długości fali.

Prędkość dźwięku  $u$  jest związana z długością fali  $\lambda$  i jej częstotliwością  $\nu$  poprzez  $u = \nu\lambda$ . Korzystając z wyznaczonych długości fali  $\lambda$  dla danej częstotliwości  $\nu$  wyznaczyć metodą regresji liniowej prędkość fali dźwiękowej korzystając z równania:

$$\nu = \frac{u}{\lambda} + c. \quad (4.16.10)$$

Częstotliwość i długość fali wyznaczone są z pewnymi niepewnościami pomiarowymi. Dlatego przy zastosowaniu regresji liniowej należy uwzględnić dodatkową stałą  $c$ . W ramach niepewności pomiarowych stała  $c$  powinna być równa zero.

Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczonej prędkości dźwięku i przedyskutować uzyskany wynik. Otrzymaną wartość liczbową prędkości rozchodzenia się dźwięku w propanolu porównać z wartościami tablicowymi.



# A Uzupełnienia

## A.1 Analiza niepewności pomiarowych

Praca w laboratorium polega na wykonywaniu pomiarów wielkości fizycznych. Pomiary te mogą być wykonane tylko z pewnym stopniem dokładności. To ograniczenie wynika z niedoskonałości przyrządów użytych podczas pomiaru oraz skończonej precyzji narządów zmysłów obserwatora. W pewnych przypadkach przybliżenia modeli stosowanych w analizie danych pomiarowych również wpływają na dokładność wyznaczania wielkości fizycznej.

Te wszystkie czynniki składają się na to, że każdy, nawet najbardziej precyzyjnie wykonany pomiar, obarczony jest niepewnością pomiarową (dawniej używany był termin: błąd pomiarowy) i stanowi przybliżenie wartości rzeczywistej. Dlatego jedynym sensownym sposobem zapisu wartości wielkości mierzonej jest:

**(wartość wielkości mierzonej  $\pm$  niepewność pomiarowa) jednostka**

Oznacza to, że wartość rzeczywista wielkości mierzonej znajduje się w przedziale równym podwojonej wartości niepewności pomiarowej, często z założonym z góry prawdopodobieństwem. Niepewności pomiarowe wyrażone są w tych samych jednostkach co wynik pomiarowy. W takim zapisie jest to całkowita niepewność pomiarowa, chociaż często przedstawia się ją jako dwa składniki: przypadkowy i systematyczny.

Poniżej omówione są w skrócie podstawowe zagadnienia związane z opracowaniem wyników pomiarów. Więcej szczegółowych informacji można znaleźć w literaturze [39], [40], [41].

### A.1.1 Rodzaje niepewności pomiarowych

Rozróżniamy dwa rodzaje niepewności:

- systematyczne - związane głównie ze skończoną dokładnością aparatury i niedoskonałością obserwatora, a niekiedy z przybliżeniami modeli teoretycznych używanych w analizie. Niepewności te przesuwają wyniki pomiarów systematycznie w jedną stronę w stosunku do prawdziwej wartości;

- przypadkowe - występuje rozrzut statystyczny wyników i w kolejnych pomiarach nie uzyskuje się identycznych wartości. Niepewności te powodują odchylenie wyników pomiarów zarówno powyżej jak i poniżej prawdziwej wartości.

### Niepewności systematyczne przyrządów

Niepewność  $\Delta_d x$  - wynika ze skończonego odstępów sąsiednich kresek podziałki na skali przyrządu np. przy skali milimetrowej  $\Delta_d x = 1 \text{ mm}$ . W przypadkach, kiedy odstęp między kolejnymi kreskami podziałki są duże, można przyjąć, że niepewność  $\Delta_d x$  jest równa połowie lub jednej trzeciej najmniejszej działki.

Niepewność  $\Delta_k x$  - dokładność wzorcowania fabrycznego przyrządu czyli klasa przyrządu zdefiniowana jako  $\Delta_k x = \frac{\text{klasa} \cdot \text{zakres}}{100}$ . Oznacza to, że np. dla amperomierza klasy  $k = 1.5$ , o zakresie do  $2 \text{ A}$ ,  $\Delta_k x = 0.03 \text{ A}$ . Ta wartość jest stała dla całego zakresu pomiarowego i stąd zalecenie takiego wyboru zakresu miernika analogowego (wskazówkowego), aby mierzona wartość była większa niż połowa zakresu (wtedy niepewność względna jest mniejsza). Ten rodzaj niepewności dotyczy mierników wskazówkowych. W przypadku mierników cyfrowych należy posługiwać się opisem danego przyrządu, ponieważ zazwyczaj pomiary na różnych zakresach obarczone są różnymi niepewnościami. W zgrubnych oszacowaniach można przyjąć niepewność odczytu z dokładnością ostatniego wyświetlanego miejsca dziesiętnego.

Maksymalna niepewność systematyczna jest równa sumie wszystkich niepewności systematycznych:

$$\Delta x_s = \Delta_d x + \Delta_k x. \quad (\text{A.1.1})$$

W każdym doświadczeniu należy wstępnie oszacować wielkość poszczególnych niepewności i te, które są małe w porównaniu z innymi można zaniedbać. Niepewności systematyczne można zmniejszyć stosując doskonalsze przyrządy i wykonując pomiary bardzo starannie, ale nie można ich całkowicie wyeliminować.

### Niepewności przypadkowe w pomiarach bezpośrednich

Przy wykonywaniu dużej liczby pomiarów tej samej wielkości fizycznej otrzymujemy różne wyniki. Niektóre z nich powtarzają się z różną częstością. Za częstość występowania wyniku o wartości  $x_i$  przyjmujemy stosunek  $n_i/n$ , gdzie  $n_i$  jest liczbą pomiarów dających wynik  $x_i$ , a  $n$  to całkowita liczba pomiarów. Zależność  $n_i/n$  od  $x_i$ , przy dużej liczbie pomiarów  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), jest określona rozkładem Gaussa, zwanym również rozkładem normalnym. Rozkład prawdopodobieństwa niepewności przypadkowej jest również rozkładem Gaussa o wartości oczekiwanej równej zero oraz o odchyleniu standardowym pomiarów  $\sigma$ , które jest miarą niepewności pojedynczego pomiaru. Rozkład prawdopodobieństwa  $\varphi(x)$  wartości mierzonej, jest także rozkładem Gaussa o wartości oczekiwanej równej wartości prawdziwej mierzonej wielkości  $x_m$  oraz o odchyleniu standardowym równym  $\sigma$ :



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_m)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{A.1.2})$$

Ponieważ w praktyce laboratoryjnej wykonujemy zawsze skończoną liczbę pomiarów, to parametry rozkładu Gaussa charakteryzującego dany pomiar można jedynie estymować. Najczęściej estymowanymi wielkościami są: wartość oczekiwana pomiaru, odchylenie standardowe pomiarów oraz odchylenie standardowe wartości oczekiwanej.

Wielkością najbardziej prawdopodobną (najbardziej zbliżoną do wartości rzeczywistej) dla skończonej liczby pomiarów jest ich średnia arytmetyczna  $\bar{x}$  (estymacja wartości oczekiwanej  $x_m$  pomiaru):

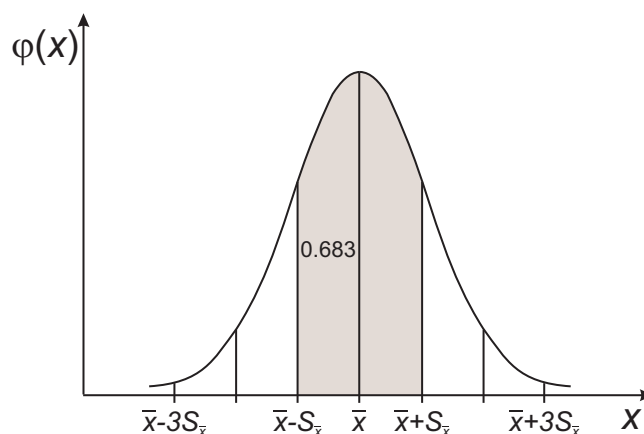
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (\text{A.1.3})$$

Miarą niepewności pojedynczego pomiaru jest odchylenie standardowe pomiarów  $\sigma$ , które estymowane jest przez wielkość zdefiniowaną wzorem:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{A.1.4})$$

Odchylenie standardowe  $S_{\bar{x}}$  średniej arytmetycznej  $\bar{x}$  jest  $\sqrt{n}$  razy mniejsze od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru, więc estymowane jest przez:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (\text{A.1.5})$$



Rys. A.1.1: Interpretacja graficzna wartości średniej i odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym (rozkładzie Gaussa).

Tak obliczone odchylenie standardowe  $S_{\bar{x}}$  interpretujemy następująco: wykonując kolejną serię  $n$  pomiarów i obliczając  $\bar{x}$ , możemy tę wartość znaleźć w przedziale  $\langle \bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}} \rangle$  z prawdopodobieństwem 0.683 (rysunek A.1.1). Interpretacja taka jest równoznaczna ze stwierdzeniem, że wartość rzeczywista mierzonej wielkości mieści się we wspomnianym przedziale właśnie z prawdopodobieństwem 0.683.

Dokładność metody pomiarowej charakteryzuje niepewność pojedynczego pomiaru  $S_x$ . Natomiast odchylenie standardowe  $S_{\bar{x}}$ , czyli niepewność średniej arytmetycznej, opisuje dokładność wyznaczenia prawdziwej wartości mierzonej wielkości. Dlatego wynik pomiaru podaje się w postaci  $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$ .

Wartość niepewności  $S_{\bar{x}}$  zależy od liczby pomiarów i maleje wraz z rosnącą ich liczbą. W laboratorium wykonuje się często serie pomiarowe składające się z około 10 pomiarów. Jednak w przypadku małej liczby pomiarów  $S_{\bar{x}}$  daje zaniżoną wartość niepewności. Chcąc otrzymać jej poprawną wartość, należy  $S_{\bar{x}}$  pomnożyć przez tzw. współczynnik rozkładu Studenta-Fishera  $t_{n,\alpha}$ . Współczynnik  $t_{n,\alpha}$  zależy od liczby pomiarów  $n$  oraz przyjętego poziomu ufności  $\alpha$ , a jego wartość można znaleźć w uzupełnieniu A.5. Poziom ufności  $\alpha$  to prawdopodobieństwo, z jakim wyznaczony przedział  $\langle \bar{x} - S_{\bar{x}}t_{n,\alpha}, \bar{x} + S_{\bar{x}}t_{n,\alpha} \rangle$  zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości. W laboratorium studenckim przyjmuje się zazwyczaj poziom ufności 0.95.

Obliczona w powyższy sposób niepewność przypadkowa stanowi niepewność bezwzględna. Często podaje się także niepewność względną, zdefiniowaną jako stosunek niepewności bezwzględnej i wartości średniej.

### Całkowita niepewność pomiarowa

Całkowita niepewność pomiarowa przy pomiarach bezpośrednich zawiera zarówno niepewności przypadkowe, jak również niepewności systematyczne. W związku z tym ostateczny wynik pomiaru przedstawia się w postaci:

$$\text{wynik pomiaru} = \bar{x} \pm S_{\bar{x}} \pm \Delta x_s. \quad (\text{A.1.6})$$

### Łączenie osobnych pomiarów – średnia ważona

Bardzo często wykonuje się kilka serii pomiarów tej samej wielkości fizycznej  $x$  i dla każdej serii obliczana jest wartość średnia i jej niepewność w postaci odchylenia standardowego średniej. Powstaje pytanie jak połączyć wyniki  $\bar{x}_A$  i  $\bar{x}_B$  z dwóch niezależnych serii pomiarów w celu otrzymania najlepszego przybliżenia mierzonej wielkości fizycznej  $x$ . Oczywiście, rozważanie tego problemu ma sens tylko wtedy, jeżeli wyniki pomiarów  $\bar{x}_A$  i  $\bar{x}_B$  są zgodne tzn., że rozbieżność  $|\bar{x}_A - \bar{x}_B|$  nie jest istotnie większa od niepewności  $S_{\bar{x}_A}$  i  $S_{\bar{x}_B}$ . W tym przypadku zakładamy, że wyniki obu pomiarów podlegają rozkładowi Gaussa i stosujemy rachunek prawdopodobieństwa [39] w celu znalezienia najlepszego przybliżenia wielkości  $x$  otrzymując w wyniku:

$$\bar{x}_w = \frac{w_A \bar{x}_A + w_B \bar{x}_B}{w_A + w_B}, \quad (\text{A.1.7})$$

gdzie  $w_A = 1/S_{\bar{x}_A}^2$  i  $w_B = 1/S_{\bar{x}_B}^2$  nazywane są wagami statystycznymi. Tak zdefiniowana wielkość  $\bar{x}_w$  nazywana jest średnią ważoną. W przypadku, jeżeli wyniki  $\bar{x}_A$  i  $\bar{x}_B$  są jednakowo dokładne ( $S_{\bar{x}_A} = S_{\bar{x}_B}$ ) wyrażenie (A.1.7) sprowadza się do zwykłej średniej arytmetycznej  $(\bar{x}_A + \bar{x}_B)/2$ . Niepewność średniej ważonej jest równa:

$$S_{\bar{x}_w} = (w_1 + w_2)^{-1/2}. \quad (\text{A.1.8})$$

Wyrażenia (A.1.7) i (A.1.8) można uogólnić na przypadek wielu pomiarów tej samej wielkości. Ostatecznie otrzymuje się wyrażenia na średnią ważoną i jej niepewność:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad S_{\bar{x}_w} = \left( \sum_{i=1}^n w_i \right)^{-1/2}. \quad (\text{A.1.9})$$

gdzie  $n$  jest liczbą pomiarów oraz  $w_i = 1/S_{\bar{x}_i}^2$ .

### Niepewności w pomiarach pośrednich

W laboratorium najczęściej wyznaczamy wielkości fizyczne, których nie można zmierzyć w sposób bezpośredni za pomocą przyrządów, ale znany jest przepis funkcyjny

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{A.1.10})$$

wiązący wielkość  $z$  (pomiar pośredni) z innymi wielkościami  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mierzonymi bezpośrednio. W tym wypadku wykonujemy pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio i stosując wyżej podane reguły oceniamy ich niepewności całkowite. Wynik końcowy – wielkość najbardziej prawdopodobną obliczamy ze wzoru:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (\text{A.1.11})$$

Natomiast miarą niepewności pomiaru pośredniego jest średnia kwadratowa niepewność zdefiniowana jako:

$$\bar{S}_z = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{S}_{x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{S}_{x_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \bar{S}_{x_n} \right)^2}, \quad (\text{A.1.12})$$

gdzie  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  oznacza pochodną cząstkową funkcji  $f$  względem zmiennej  $x_i$ .

Czasem jednak wielkości pośrednie  $x_i$  nie są mierzone wielokrotnie. W tym przypadku obliczamy niepewność maksymalną:

$$\Delta z_{\max} = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|, \quad (\text{A.1.13})$$

gdzie  $\Delta x_i$  oznacza niepewność maksymalną wielkości  $x_i$  mierzonej bezpośrednio.

W przypadku, gdy funkcja (A.1.10) ma postać iloczynu wygodnie jest obliczyć względną niepewność maksymalną po uprzednim zlogarytmowaniu funkcji. Ten sposób obliczania względnej maksymalnej niepewności pomiarowej nosi nazwę metody różniczki logarytmicznej. Wykorzystuje się tu własność różniczki funkcji logarytmicznej  $d(\ln x) = dx/x$ . Oznacza to, że przyrost funkcji jest równy względnemu przyrostowi jej argumentu, co pozwala na proste obliczenie względnej niepewności. Np. dla funkcji  $z = \alpha x_1^a x_2^b$  po zlogarytmowaniu otrzymujemy  $\ln z = \ln \alpha + a \ln x_1 + b \ln x_2$  i względna maksymalna niepewność pomiarowa wynosi:

$$\frac{\Delta z_{\max}}{\bar{z}} = \left| a \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| b \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|. \quad (\text{A.1.14})$$

### A.1.2 Zapis wyników pomiarów

W wyniku pomiaru powinna być zapisana jego wartość, niepewność pomiarowa i jednostka np. w postaci:

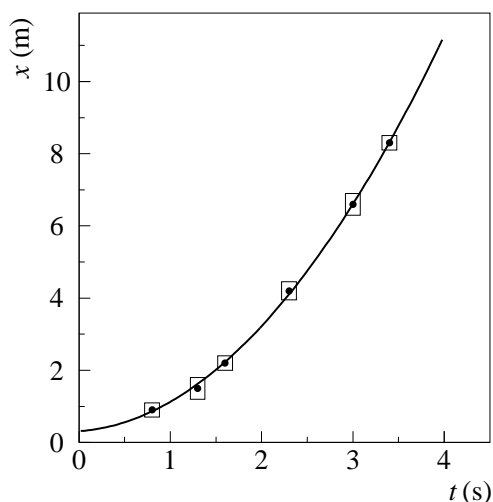
$$D = 36.43 \pm 0.25 \text{ cm} = (36.43 \pm 0.25) \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (\text{A.1.15})$$

Wyniki mogą być obliczane do dowolnego miejsca rozwinięcia dziesiętnego, ale ponieważ są one obciążone niepewnością to przy ich zapisie stosuje się konwencję Międzynarodowej Normy Oceny Niepewności Pomiaru. Niepewność pomiarową liczymy z trzema cyframi znaczącymi, następnie zaokrąglamy do dwóch miejsc znaczących. Wynik pomiaru obliczamy z dokładnością o jedno miejsce dziesiętne większą niż zaokrąglono niepewność. Następnie wartość wyniku pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca rozwinięcia dziesiętnego co niepewność.

### A.1.3 Opracowanie wyników metodą graficzną

W przypadku opracowania wyników pomiarów wielkości zależnych, gdy  $y = f(x)$ , stosujemy metodę graficzną czyli wykonujemy wykresy. Można je wykonać ręcznie na papierze milimetrowym lub za pomocą programów komputerowych, ale w obu przypadkach muszą spełniać określone reguły (przykład przedstawiony jest na rysunku A.1.2):

- osie układu powinny być opisane, tzn. muszą być podane wielkości, które odkładamy na osiach oraz ich jednostki;
- skala powinna być odpowiednio dobrana tak, by na osi znajdował się cały przedział zmienności wielkości fizycznej (oznacza to, że podziałka nie musi zaczynać się od zera) oraz aby można było łatwo odczytać współrzędne punktów;
- należy zaznaczyć punkty pomiarowe oraz niepewności pomiarowe (punkt pomiarowy znajduje się w prostokącie niepewności pomiarowych);
- punktów pomiarowych nie łączymy łamaną.
- ewentualnie wykreślamy krzywą teoretyczną lub dopasowaną zależność funkcyjną.



Rys. A.1.2: Przykład wykresu.

#### A.1.4 Analiza zależności liniowych

Bardzo często mierzone wielkości fizyczne  $x$  i  $y$  związane są zależnością liniową:

$$y = ax + b \quad (\text{A.1.16})$$

gdzie współczynniki  $a$  i  $b$  można obliczyć metodą regresji liniowej. Współczynnik  $a$  odpowiada za nachylenie prostej, a współczynnik  $b$  za punkt przecięcia z osią rzędnych. Zazwyczaj współczynniki  $a$  i  $b$  mają interpretację fizyczną (są wyrażone w odpowiednich jednostkach) i ich znajomość pozwala wyznaczyć niektóre wielkości fizyczne.

O tym, w jakim stopniu zależność liniowa jest spełniona, informuje współczynnik korelacji  $r$ , którego wartość jest zawarta w przedziale  $[-1, 1]$ . Im większa jest wartość bezwzględna  $r$ , tym silniejsza jest korelacja, czyli tym ściślej jest spełniona zależność liniowa.

#### Rodzaje regresji

Wyniki pomiarów składają się z  $n$  par liczb  $(x_i, y_i)$  oraz ich niepewności pomiarowych  $S_x$  i  $S_y$ . W zależności od informacji o niepewnościach pomiarowych stosuje się różne rodzaje regresji liniowej i różne wzory do obliczania średnich wartości współczynników regresji  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$ , ich odchyleń standardowych  $S_{\bar{a}}$ ,  $S_{\bar{b}}$  oraz współczynnika korelacji  $r$ .

**Regresja klasyczna** – stosowana wtedy, gdy nie mamy żadnej informacji o niepewnościach pomiarowych lub są to niepewności systematyczne.

$$\bar{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{C} \quad \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (\text{A.1.17})$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{b} \sum_{i=1}^n y_i}{n-2}} \quad S_{\bar{b}} = S_{\bar{a}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (\text{A.1.18})$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{CD}} \quad (\text{A.1.19})$$

$$C = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad D = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \quad (\text{A.1.20})$$

**Regresja zwyczajna** - stosowana wtedy, gdy niepewnością pomiarową obciążone są wartości tylko jednej zmiennej ( $x$  lub  $y$ ) i dodatkowo niepewności mają te same wartości dla wszystkich punktów pomiarowych. Można ją również stosować w przypadku, gdy niepewność względna jednej zmiennej jest dużo mniejsza (przynajmniej 10 razy) niż drugiej np.  $\frac{\bar{S}_x}{x_i} \leq 10 \frac{\bar{S}_y}{y_i}$ , wtedy niepewności zmiennej  $x$  pomijamy. Wzory do obliczania średnich wartości współczynników regresji  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$  oraz współczynnika korelacji  $r$  pozostają takie same, jak przy regresji klasycznej, natomiast zmienia się tylko sposób obliczania odchyłeń standardowych  $S_{\bar{a}}$ ,  $S_{\bar{b}}$ :

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{n \bar{S}_y^2}{C}} \quad S_{\bar{b}} = S_{\bar{a}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \quad (\text{A.1.21})$$

**Regresja ważona** - stosowana wtedy, gdy niepewnością pomiarową obciążone są wartości tylko jednej zmiennej ( $x$  lub  $y$ ) lecz niepewności mają różne wartości przynajmniej dla niektórych punktów pomiarowych. Można ją również stosować w przypadku, gdy niepewność względna jednej zmiennej jest dużo mniejsza (przynajmniej 10 razy) niż drugiej np.  $\frac{\bar{S}_x}{x_i} \leq 10 \frac{\bar{S}_y}{y_i}$ , wtedy niepewności zmiennej  $x$  pomijamy. Dla każdego punktu wprowadza się wagi statystyczne zdefiniowane następująco:

$$w_i = (\bar{S}_{x_i})^{-2} \quad \text{lub} \quad w_i = (\bar{S}_{y_i})^{-2} \quad (\text{A.1.22})$$

Oczywiście wybieramy definicję związaną z tą wielkością, której niepewność względna jest większa. W tym przypadku współczynnik korelacji, współczynniki regresji i ich odchylenia standardowe obliczane są według wzorów:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \sum_{i=1}^n w_i y_i}{C} \quad \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (\text{A.1.23})$$

$$S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i}{C}} \quad S_{\bar{b}} = S_{\bar{a}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n w_i}} \quad (\text{A.1.24})$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^n w_i x_i \sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sqrt{CD}} \quad (\text{A.1.25})$$

$$C = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n w_i x_i \right)^2 \quad D = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{i=1}^n w_i y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n w_i y_i \right)^2 \quad (\text{A.1.26})$$

**Regresja efektywna** - stosowana wtedy, gdy niepewnościami pomiarowymi obciążone są wartości obydwu zmiennych i niepewności są różne przynajmniej dla niektórych punktów pomiarowych. Odpowiednie wzory można znaleźć w literaturze [42].

Przy badaniu wielkości liniowo zależnych, po analizie niepewności pomiarowych, należy wybrać właściwą metodę analizy regresji. Oczywiście największą wartość posiada regresja efektywna, a najmniejszą klasyczna, jednakże w laboratorium studenckim, ta ostatnia jest najczęściej stosowana. Po obliczeniu parametrów prostej wraz z jednostkami, należy wykonać wykres rysując prostą o nachyleniu  $\bar{a}$  przecinającą oś  $Y$  w punkcie  $\bar{b}$  oraz nanieść punkty pomiarowe i ich niepewności. Należy podać równanie prostej i dokonać stosownej do danego doświadczenia analizy współczynników regresji  $\bar{a}$  i  $\bar{b}$ . W analizie można korzystać z gotowych programów komputerowych, należy jednak podać jakiego programu się używa i co on właściwie liczy.

## A.2 Jak prowadzić zeszyt laboratoryjny

Notatki w zeszycie laboratoryjnym należy prowadzić tak, aby przy minimum wysiłku i poświęconego czasu zapis był jasny, pełny i dokładny. Wszystkie notatki powinny być datowane. Nie wolno prowadzić notatek „na brudno” na luźnych kartkach z zamiarem późniejszego starannego przepisania ich do zeszytu pomiarowego.

Dane nie mogą być notowane ołówkiem. Nie należy używać korektora, błędny zapis należy skreślić pojedynczą linią tak, aby można go było odczytać w przyszłości. Zeszyt laboratoryjny nie musi być ładny – notatki mają być przejrzyste, czytelne i kompletne.

Wynik każdego pomiaru należy zapisać natychmiast i bez żadnej obróbki. Jeśli to możliwe dobrze jest sprawdzać zapis przez powtórne odczytanie przyrządu. Należy pamiętać o zapisaniu jednostki mierzonej wielkości i zakresu, gdy używamy przyrządów wielozakresowych.

Notować należy wszystko, co może być istotne dla prowadzonych badań tzn. nie tylko wyniki pomiarów i dane pozwalające zidentyfikować używane przyrządy (numery fabryczne, inwentarzowe lub naniesione osobiście), ale również cytaty z tablic i różnorodnych odnośników literaturowych i innych (koniecznie z adresem cytowania), notatki

z dyskusji, własne przemyślenia, luźne uwagi, nazwiska współpracowników, obliczenia, wykresy, schematy, . . . .

W zeszycie laboratoryjnym powinny być odnotowane wyniki eksperymentu zarejestrowane na innych nośnikach (np. klisze, fotografie, wydruki z rejestratora, pliki zapisane na dysku, . . .). Z kolei wyniki te powinny być opisane w sposób trwały, czytelny i zgodny z zapisem w zeszycie laboratoryjnym.

### A.3 Zasada działania noniusza

W wielu przyrządach, w celu zwiększenia dokładności pomiarów, oprócz skali głównej użyty jest noniusz. Jest to dodatkowa skala, na której podziałki mają inną długość niż podziałki skali głównej. Najprościej można to wytłumaczyć na przykładzie suwmiarki z noniuszem, pozwalającej na pomiary z dokładnością  $0.1\text{ mm}$ . W tym przypadku skala główna posiada podziałkę milimetrową, a skala noniusza wykonana jest w ten sposób, że odcinek  $9\text{ mm}$  podzielony jest na 10 części. Oznacza to, że działki noniusza są o  $0.1\text{ mm}$  krótsze od działek skali głównej. Gdy przesuniemy noniusz wzdłuż skali głównej o  $0.1\text{ mm}$  pierwsza działka noniusza pokryje się z jakąś działką skali głównej. Podobnie, przesuając noniusz o  $0.5\text{ mm}$  widać, że piąta działka noniusza jest przedłużeniem działki skali głównej itd. Zatem wkładając jakieś ciało pomiędzy szczęki suwmiarki można w następujący sposób odczytać jego długość:

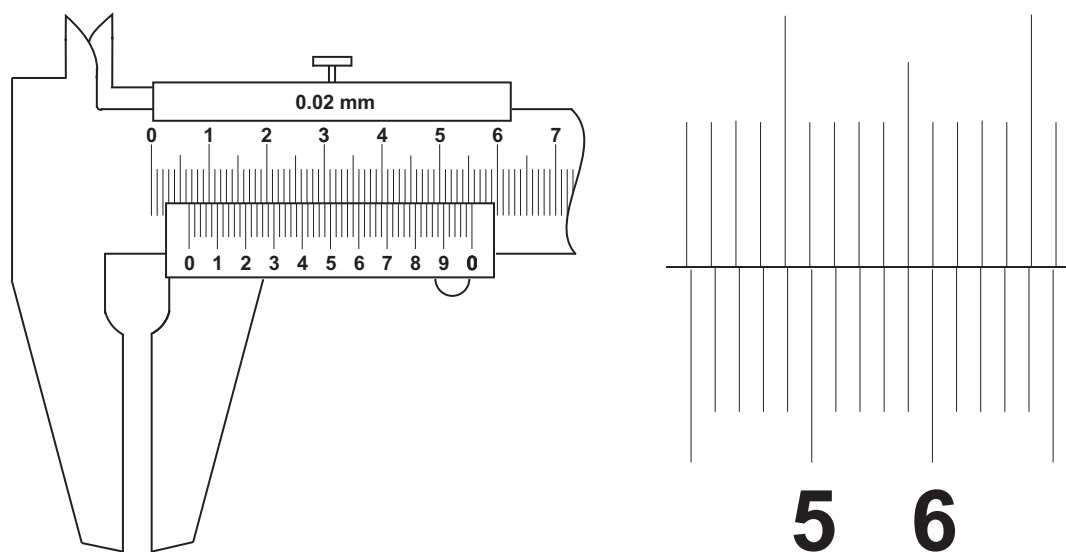
- położenie zera noniusza pozwala odczytać na skali głównej ilość milimetrów,
- ilość dziesiętnych części milimetra wyznacza numer działki noniusza stanowiącej przedłużenie działki skali głównej.

W ogólnym przypadku dokładność pomiaru przy użyciu przyrządu z noniuszem równa jest stosunkowi długości najmniejszej działki na skali głównej do ilości działek na skali noniusza.

Rysunek A.3.1 przedstawia skalę z noniuszem. Najmniejsza działka skali głównej wynosi  $1\text{ mm}$ . Noniusz posiada 50 działek. Zatem dokładność tego przyrządu wynosi  $1\text{ mm}/50$ , czyli  $0.02\text{ mm}$ . Na rysunku zero noniusza wskazuje wartość ponad  $6\text{ mm}$ . Korzystając z noniusza można dokładniej wyznaczyć mierzoną długość. Jedna duża, numerowana działka noniusza równa się  $0.1\text{ mm}$  ( $5 \times 0.02\text{ mm}$ ). Czwarta działka, po piątej działce numerowanej pokrywa się z kreską na skali głównej a to oznacza, że dodatkowa długość ponad  $6\text{ mm}$  równa się  $(5 \times 0.1\text{ mm}) + (4 \times 0.02\text{ mm}) = 0.58\text{ mm}$ . Odległość pokazana na rysunku wynosi zatem  $6.58\text{ mm}$ . Ten sam wynik otrzymamy mnożąc  $29 \times 0.02\text{ mm}$ , bo 29-ta działka skali noniusza jest przedłużeniem działki skali głównej.

W noniusze zaopatrzone są także kątomierze np. skala spektrometru siatkowego. W tym przypadku należy jednak pamiętać, że skala główna jest w stopniach, a  $1^\circ = 60'$  oraz  $1' = 60''$ . Na podobnej zasadzie działa śruba mikrometryczna z tą różnicą, że skala noniusza znajduje się na ruchomej, obrotowej części śruby.





Rys. A.3.1: Skala suwmiarki z noniusem. W powiększeniu przedstawiony jest zakres skali, w którym działka noniusza pokrywa się z kreską na skali głównej.

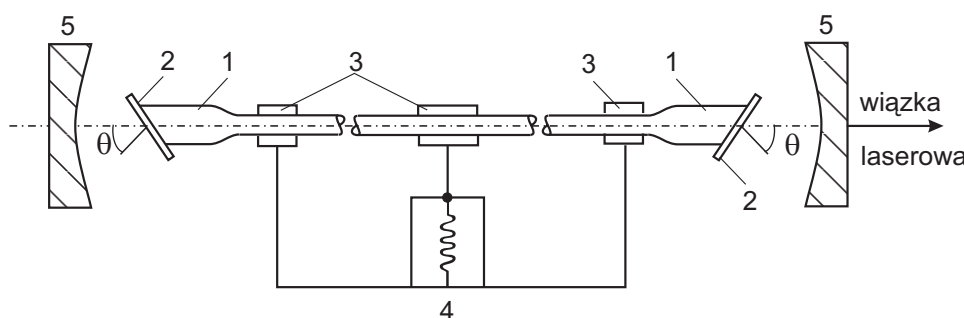
## A.4 Lasery

Nazwa pochodzi od pierwszych liter angielskiej nazwy – **L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation, czyli wzmocnienie światła poprzez wymuszoną emisję promieniowania.

Jeżeli różnica energii pomiędzy stanem podstawowym i pierwszym wzbudzonym atomu jest równa  $E$ , może on zaabsorbować foton o energii  $E = h\nu$ , gdzie  $\nu$  jest częstotliwością padającego promieniowania. Po zaabsorbowaniu takiej energii, atom znajduje się w stanie wzbudzonym i po krótkim czasie powraca do stanu podstawowego, emitując taką samą energię, jaką wcześniej zaabsorbował. Taki rodzaj emisji określamy mianem emisji spontanicznej. W zbiorowisku atomów (lub cząsteczek) emisja spontaniczna ma rozkład statystyczny zarówno ze względu na kierunek, częstość jak i fazę emitowanego promieniowania. W 1917 roku Albert Einstein opublikował rozprawę, w której wykazał, że oprócz emisji spontanicznej istnieje emisja wymuszona. Występuje ona, gdy foton oddziałuje z atomem w stanie wzbudzonym i zmusza go do emisji fotonu o tej samej częstości, w tym samym kierunku i w tej samej fazie. Te dwa fotony, wymuszający i wymuszony poruszają się razem, tworząc promieniowanie spójne.

W komórce absorpcyjnej zawierającej wiele atomów, zdecydowana większość atomów znajduje się w stanie podstawowym, a tylko nieliczne w stanie wzbudzonym. Jeżeli taką komórkę oświetlimy promieniowaniem o energii  $E$ , będącej różnicą energii wyżej wymienionych stanów, wzrośnie liczba atomów w stanie wzbudzonym. Gdy natężenie padającego promieniowania jest dostatecznie duże, liczba atomów w sta-

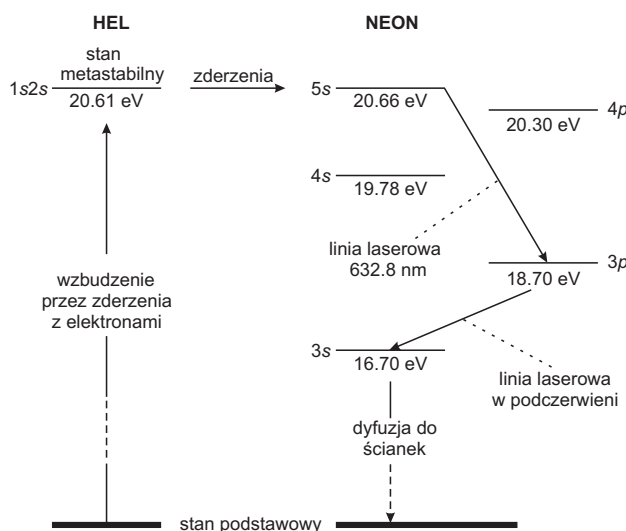
nie wzbudzonym może przekroczyć liczbę atomów w stanie podstawowym. Taki efekt nazywamy inwersją obsadzeń. Wtedy część energii padającego promieniowania zużywana na absorpcję przez atomy w stanie podstawowym jest dużo mniejsza niż energia oddawana w wyniku emisji wymuszonej. Fotony wysyłane dzięki emisji wymuszonej mają taką samą energię, fazę, polaryzację i kierunek rozchodzenia się. W rezultacie, promieniowanie wywołane przez emisję wymuszoną jest dużo bardziej spójne niż nieskoordynowana emisja spontaniczna wielu atomów. Zjawiska inwersji obsadzeń i emisji wymuszonej wykorzystane są w laserach do otrzymywania światła spójnego.



Rys. A.4.1: Schemat budowy lasera gazowego.

Podstawą działania lasera jest uzyskanie inwersji obsadzeń. Efekt ten można uzyskać różnymi metodami. Pierwszy laser gazowy, helowo–neonowy, został zbudowany w 1960 roku. Schemat budowy takiego lasera przedstawiony jest na rysunku A.4.1. Ośrodkiem czynnym była mieszanina helu i neonu (w stosunku 10:1) pod ciśnieniem około  $10^2 \text{ Pa}$  ( $10^{-3} \text{ atm}$ ), zamknięta w rurze kwarcowej (1) o średnicy około  $1 \text{ cm}$  i długości około  $1 \text{ m}$ , do której doprowadzono elektrody (3) połączone z generatorem wysokiej częstotliwości (4). Rura z dwóch stron zamknięta jest okienkami Brewstera (2). Są to szklane okienka nachylone pod kątem Brewstera (kątem całkowitego wewnętrznego odbicia) względem osi rury. Okienka Brewstera minimalizują straty światła wskutek odbicia a dodatkowo powodują, że opuszczająca laser wiązka światła jest spolaryzowana liniowo. Na zewnątrz rury znajduje się para płaskich, równoległych lusterek (5) tworzących rezonator. Obecnie, zamiast generatora wysokiej częstotliwości stosuje się inne metody wzbudzenia

Laser He-Ne jest laserem trójpoziomowym. Układ poziomów energetycznych helu i neonu wykorzystywanych w akcji laserowej przedstawia schematycznie rysunek A.4.2. Atomy helu zostają wzbudzone wyładowaniami wysokiej częstotliwości lub innymi metodami do poziomu  $1s2s$ . Jest to poziom metastabilny, tzn. jest on długożyciowy ponieważ z tego poziomu niemożliwe jest przejście promieniste (z emisją fotonu) do poziomu podstawowego. Wzbudzone atomy helu, zderzając się z atomami neonu, przekazują im energię powodując wzbudzenie atomów neonu do stanu  $5s$  z równoczesnym powrotem atomów He do stanu podstawowego. Poziom  $5s$  neonu jest również poziomem metastabilnym. W ten sposób, istnieją warunki do osiągnięcia inwersji obsadzeń stanów

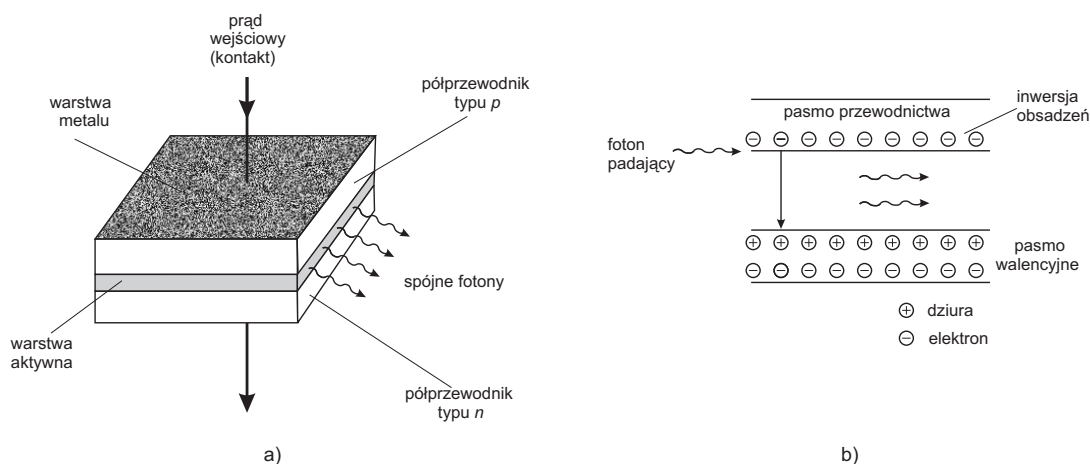


Rys. A.4.2: Schemat poziomów energetycznych helu i neonu.

energetycznych atomów Ne. Emisja wymuszona z poziomu 5s neonu daje światło spójne o długości fali 632.8 nm. Wiązka światła wielokrotnie przechodzi przez mieszanie helu i neonu, dzięki parze lusterek tworzących rezonator. Lustra te są tak dobrane aby ich zdolność odbijająca była duża tylko dla fali, dla której ma zachodzić akcja laserowa. Dzięki temu wzrasta natężenie wiązki światła, będącego wynikiem emisji wymuszonej. Jedno z tych lusterek jest częściowo przepuszczalne (ma zdolność odbijającą około 99%) co pozwala na wyjście na zewnątrz niewielkiej liczbie padających fotonów tworzących wiązkę laserową. Otrzymana w ten sposób wiązka światła charakteryzuje się:

- monochromatycznością - szerokość linii nie przekracza 10 kHz;
- dużym natężeniem - w przeliczeniu na 1 kHz jego natężenie spektralne jest rzędu  $1 \text{ mW/cm}^2 \text{ kHz}$ . Dla porównania, natężenie światła słonecznego na powierzchni Ziemi w przeliczeniu na 1 kHz dla światła zielonego jest rzędu  $10^{-12} \text{ mW/cm}^2 \text{ kHz}$ ;
- równoległością – rozbieżność wiązki laserowej jest rzędu ułamka stopnia;
- spójnością przestrzenną – w dowolnym miejscu wiązki, wszystkie promienie są w tej samej fazie.

Zasada działania laserów została omówiona na przykładzie lasera gazowego helowo – neonowego. W chwili obecnej do otrzymywania akcji laserowej wykorzystuje się ciała stałe, w szczególności różnego rodzaju materiały półprzewodnikowe. Najprostszym przykładem lasera półprzewodnikowego jest dioda laserowa, której schemat przedstawia rysunek A.4.3a. Zasadniczym elementem diody laserowej jest złącze  $p-n$ . Powstaje ono w wyniku zetknięcia ze sobą dwóch rodzajów materiałów półprzewodnikowych: typu  $p$  i typu  $n$ . Półprzewodniki typu  $p$  lub  $n$  uzyskuje się przez domieszkowanie czystych kryształów obcymi atomami, zwiększając odpowiednio ilość elektronów (typ  $n$ ) lub dziur (typ  $p$ ) w sieci krystalicznej.



Rys. A.4.3: a) Schemat budowy diody laserowej, b) akcja laserowa w złączu p-n.

Podobnie jak w laserze gazowym, w celu otrzymania akcji laserowej należy uzyskać inwersję obsadzeń poziomów energetycznych. Różnica pomiędzy tymi dwoma typami laserów polega na tym, że zamiast dyskretnych poziomów atomowych występują szerokie pasma energetyczne i inwersja obsadzeń sprowadza się do przeniesienia dużej liczby elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa (rysunek A.4.3b). W praktyce realizowane jest to przez przepuszczanie przez diodę prądów przewodnictwa o dużym natężeniu i wstrzykiwanie nośników ładunku do obszaru złącza, czyli tzw. pompowanie elektryczne. Elektrony i dziury rekombinują w obszarze złącza, emitując w sposób spontaniczny fotony, które dają początek emisji wymuszonej.

Długość fali emitowanego światła zależy od szerokości energetycznej pasma wzbudzonego zastosowanych półprzewodników i leży w zakresie od podczerwieni aż do obszaru widzialnego. Można ją też zmieniać poprzez zmianę temperatury użytych kryształów. Rolę rezonatora pełnią zwykle naturalnie łupane, niepolerowane ścianki kryształu.

Lasery półprzewodnikowe najnowszej generacji zbudowane są zazwyczaj z podwójnych, niejednakowych złączy (np. GaAs-GaAlAs). Cechuje je wysoka wydajność, małe rozmiary, prosta budowa (co obniża koszty wytwarzania) i długi czas życia. Jednakże lasery te mają też pewne wady w porównaniu do laserów gazowych. Wiązka światła wychodząca z diody laserowej ma przekrój w przybliżeniu eliptyczny. Spowodowane to jest różnicą wymiarów obszaru aktywnego w kierunku równoległym i prostopadłym do złącza. Wiązka laserowa jest spolaryzowana liniowo, ale ponieważ nie można całkowicie wyeliminować emisji spontanicznej, zawiera pewien przyczynek od światła niespolaryzowanego.

## A.5 Przydatne tablice i widma spektralne

*Jednostki podstawowe układu SI*

Wielkość	Jednostka	Symbol
czas	sekunda	s
długość	metr	m
ilość substancji	mol	mol
masa	kilogram	kg
natężenie prądu	amper	A
temperatura	kelwin	K
światłość	kandela	cd

*Przedrostki jednostek*

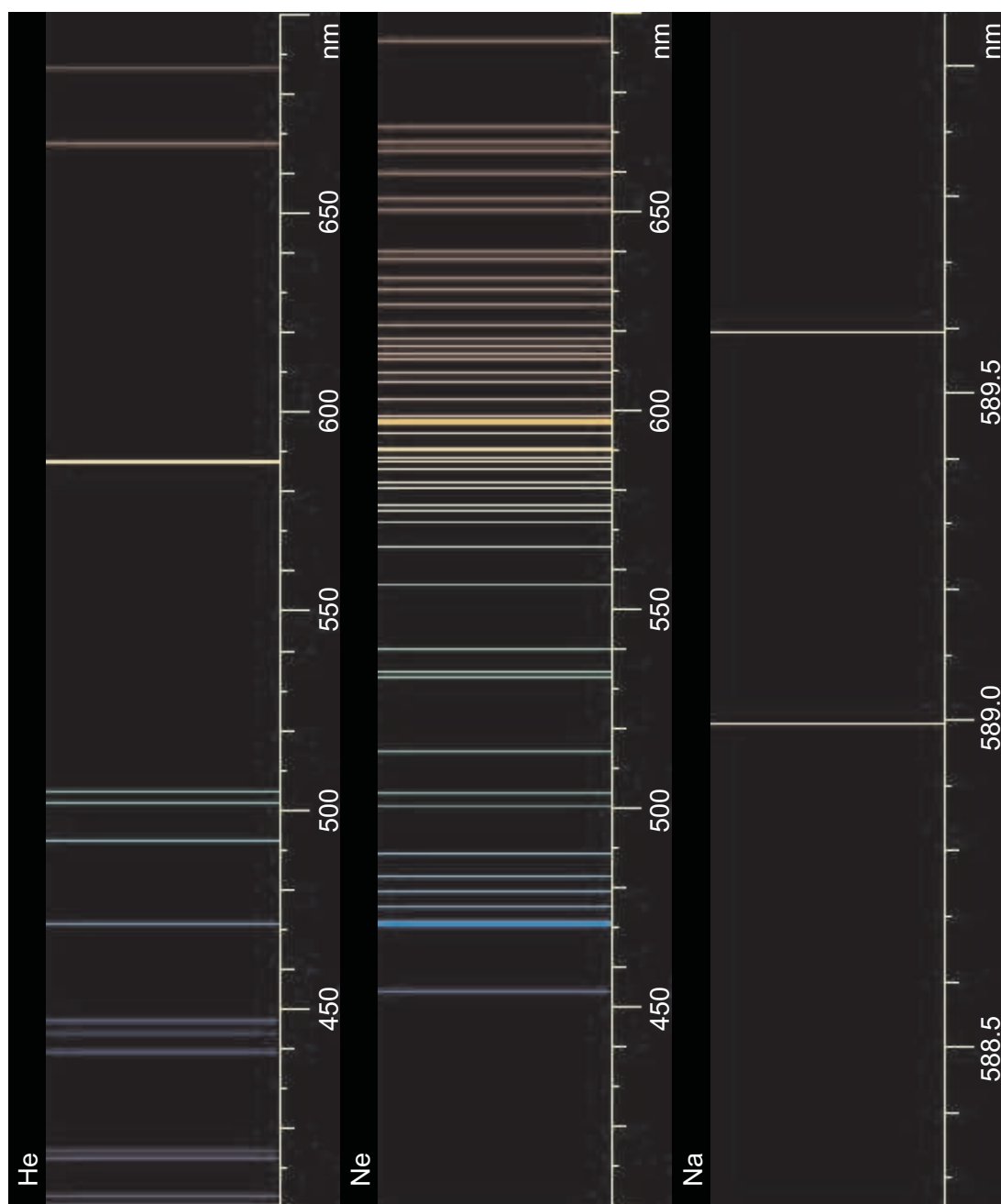
Przedrostek	Skrót	Mnożnik
femto	f	$10^{-15}$
piko	p	$10^{-12}$
nano	n	$10^{-9}$
mikro	$\mu$	$10^{-6}$
mili	m	$10^{-3}$
centy	c	$10^{-2}$
decy	d	$10^{-1}$
deka	da	10
hekto	h	$10^2$
kilo	k	$10^3$
mega	M	$10^6$
giga	G	$10^9$

*Jednostki pochodne układu SI*

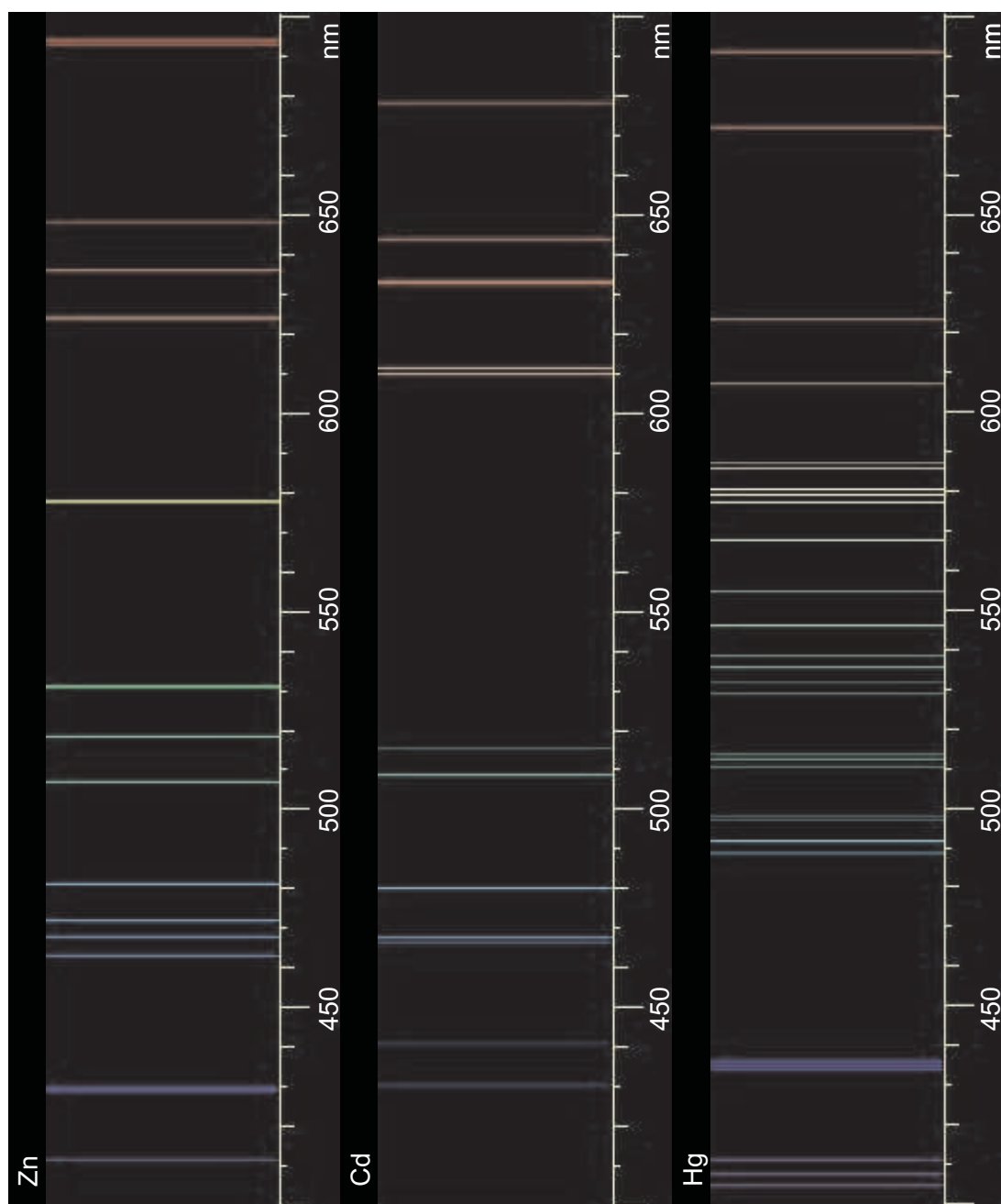
Nazwa wielkości	Nazwa jednostki	Symbol
ciśnienie	paskal	$\text{Pa} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
częstotliwość	herc	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$
energia, praca	dżul	$\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
ładunek elektryczny	kulomb	$\text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$
indukcja magnetyczna	tesla	$\text{T} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$
moc	wat	$\text{W} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-3}$
napięcie elektryczne	wolt	$\text{V} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
opór elektryczny	om	$\Omega = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$
pojemność elektryczna	farad	$\text{F} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$
siła	niuton	$\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
temperatura Celsiusa	stopień Celsiusa	$^{\circ}\text{C} = \text{K}$

Wybrane współczynniki Studenta-Fishera  $t_{n,\alpha}$  w zależności od ilości pomiarów  $n$  i poziomu ufności  $\alpha$

$n$	$\alpha=0,6826$	$\alpha=0,9$	$\alpha=0,95$	$\alpha=0,99$	$\alpha=0,999$
2	1,837	6,314	12,706	63,657	636,619
3	1,321	2,920	4,303	9,925	31,599
4	1,197	2,353	3,182	5,841	12,924
5	1,141	2,312	2,776	4,604	8,610
6	1,110	2,015	2,580	4,032	6,869
7	1,090	1,943	2,447	3,707	5,959
8	1,077	1,895	2,365	3,500	5,408
9	1,066	1,860	2,306	3,355	5,401
10	1,059	1,833	2,252	3,250	4,781
11	1,052	1,813	2,228	3,169	4,587
12	1,047	1,796	2,021	3,106	4,437
13	1,043	1,782	2,179	3,055	4,318
14	1,040	1,771	2,160	3,012	4,220
15	1,037	1,761	2,145	2,977	4,141
16	1,034	1,753	2,131	2,921	4,073
17	1,032	1,746	2,120	2,892	4,015
18	1,030	1,740	2,110	2,878	3,965
19	1,028	1,734	2,100	2,861	3,922
20	1,027	1,729	2,093	2,845	3,883



Rys. A.5.1: Widma w zakresie widzialnym dla He, Ne oraz dublet żółtych linii dla Na. Widma otrzymane przy użyciu programu SPEKTRUŚ [43].



Rys. A.5.2: Widma w zakresie widzialnym dla Zn, Cd oraz Hg. Widma otrzymane przy użyciu programu SPEKTRUŚ [43].



# Spis literatury

- [1] T. Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, PWN, Warszawa 1980.
- [2] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa 1999.
- [3] Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. III - Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa 1980.
- [4] C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1975.
- [5] Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. I - Mechanika i akustyka*, PWN, Warszawa 1980.
- [6] A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki, tom 1*, PWN, Warszawa 1984.
- [7] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki, tom II, cz. 2*, PWN, Warszawa 2005.
- [8] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki, tom I, cz. 2*, PWN, Warszawa 2005.
- [9] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *Podstawy fizyki, tom I*, PWN, Warszawa 2004.
- [10] J. Halaunbrenner, M. Kmieciak, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Politechnika Krakowska, Kraków 1997.
- [11] F.S. Crawford, *Fale*, PWN, Warszawa 1975.
- [12] M. Rusek, R. Ćwirko, W. Marciniak, *Przewodnik po elektronice*, WNT, Warszawa 1986.
- [13] Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna, cz. II - Ciepło i fizyka cząsteczkowa*, PWN, Warszawa 1976.
- [14] Sz. Szczęniowski, *Fizyka doświadczalna, tom IV - Optyka*, PWN, Warszawa 1983.
- [15] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki, tom III*, PWN, Warszawa 2005.

- [16] K. Siegel, K. Sokalski, *Postępy Fizyki* 36, 161 (1985).
- [17] M. Reif, *Fizyka statystyczna*, PWN, Warszawa 1975.
- [18] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, Edward Arnold (Publishers) Ltd, 1980.
- [19] A. Sukiennicki, A. Zagórski, *Fizyka ciała stałego*, WNT, Warszawa 1984.
- [20] E. M. Purcel, *Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa 1971.
- [21] W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, tom II*, PWN, Warszawa 1976.
- [22] J. Obraz, *Ultradźwięki w technice pomiarowej*, WNT, Warszawa 1983.
- [23] M. Bojarski, K. Sokalski, *Postępy fizyki* 39, 553 (1988).
- [24] *Słownik fizyczny*, Wiedza Powszechna, Warszawa 1984.
- [25] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker *Podstawy fizyki, tom II*, PWN, Warszawa 2005.
- [26] C. Kittel, *Wstęp do fizyki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1999.
- [27] A. N. Zajdel, *Tablice linii widmowych*.
- [28] M. Kwiek, A. Śliwiński, E. Hojan, *Akustyka Laboratoryjna, cz. II*, PWN, Poznań 1971.
- [29] R. Wyrzykowski, *Ultradźwięki*, PWN, Warszawa 1957.
- [30] J. Matauschek, *Technika ultradźwięków*, WNT, Warszawa 1961.
- [31] A. Śliwiński, *Oddziaływanie pomiędzy światłem i falą ultradźwiękową w ośrodku z fluktuacjami gęstości*, Uniwersytet Adama Mickiewicza w Poznaniu, Prace wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii, Seria Fizyka nr 3, Poznań 1964.
- [32] M. van Meerssche, J. Feneau-Dupont, *Krystalografia i chemia strukturalna*, PWN, Warszawa 1984.
- [33] <http://komkryst.int.pan.wroc.pl/pop.htm> i podane tam linki.
- [34] <http://www.if.uj.edu.pl/pl/ZINM/wyklady/AB/2005/zakres05.htm> (A. Budkowski, *Podstawy fizyki materii skondensowanej*, wykład II i III).
- [35] S. Pieńkowski, *Fizyka Doświadczalna, Optyka*, PWN, Warszawa 1955.
- [36] A. Staruszkiewicz, *Algebra i geometria*, skrypt wydany nakładem NKF, Kraków 1993.

- 
- [37] H. Margenau, G.M. Murphy, *Matematyka w fizyce i chemii*, PWN, Warszawa 1962;
- [38] *Fizyka ciała stałego. Laboratorium*, pod redakcją K. Kropa, AGH, Kraków.
- [39] J.R. Taylor, *Wstęp do analizy błęd pomiarowego*, PWN, Warszawa, 1995.
- [40] B. Oleś, M Duraj, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, Politechnika Krakowska, Kraków, 2000.
- [41] G. L. Squires, *Praktyczna fizyka*, PWN, Warszawa, 1992.
- [42] H. Szydłowski, *Wstęp do pracowni fizycznej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1996.
- [43] <http://klub.chip.pl/mpytel/spektrus.htm>.
- [44] A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki, tom 2*, PWN, Warszawa 1991.
- [45] J. R. Taylor, *Mechanika klasyczna*, PWN, Warszawa 2006.