

Witam !



Nazywam się Jacek Golak

Pracuję w Zakładzie Teorii Układów Jądrowych Instytutu Fizyki UJ

Moja dziedzina to teoretyczna fizyka jądrowa

Numer pokoju: B-2-32

e-mail: jacek.golak@uj.edu.pl

strona WWW: <http://users.uj.edu.pl/~golak/zestawyNOF.html>

Przedmiot **Narzędzia Obliczeniowe Fizyki** ma charakter pomocniczy.

Ma ułatwić studiowanie fizyki - dziedziny wiedzy, w której matematyka odgrywa kluczową rolę.

Wykłady i ćwiczenia mają pomóc w zrozumieniu analizy matematycznej, algebry z geometrią, mechaniki klasycznej i kwantowej. Omawiane narzędzia z pewnością przydadzą się także przy opracowaniu

wyników doświadczeń na pracowniach fizycznych.

Zasadnicza część wykładu dotyczy programu *Mathematica*[®].

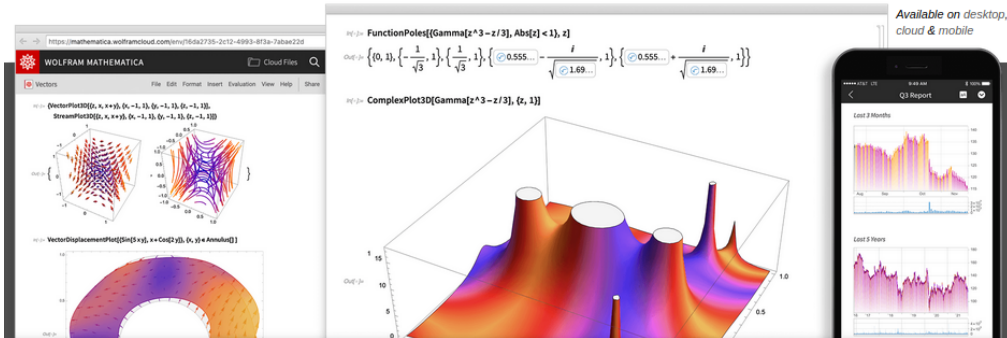
Czym jest *Mathematica*[®] ?

<https://www.wolfram.com/mathematica/>



WOLFRAM MATHEMATICA

The world's definitive system for modern technical computing



JUST RELEASED

MATHEMATICA 14.1

Coverage

Symbolic Language, Numerics, Mathematical Computation,
 Algebraic Manipulation, Number Theory, Function Visualization,
 Data Manipulation & Analysis, Machine Learning, Data Visualization & Graphics,
 Strings & Text, Graphs & Networks, Images, Geometry,
 Sound & Video, Knowledge Representation & Natural Language,
 Time-Related Computation, Geographic Data & Computation,
 Scientific and Medical Data & Computation, Engineering Data & Computation,
 Financial Data & Computation, Social, Cultural & Linguistic Data,
 Notebook Documents & Presentations, User Interface Construction,
 System Operation & Setup, External Interfaces & Connections,
 Cloud & Deployment

<http://www.mathematica.pl>

Wolfram Mathematica®

GAMBIT®



“Program dla każdego!

Mathematica jest środowiskiem pracy, które pozwala na obliczenia od prostej arytmetyki po najbardziej zaawansowane obliczenia matematyki wyższej. Zakres procedur obliczeniowych pozwala na wykorzystywanie jej tak przez uczniów i studentów jak i pracowników naukowych, stosujących w pracach badawczych zaawansowany aparat matematyczny.”

Jak zdobyć licencję

<http://www.fais.uj.edu.pl/dla-studentow/studia-z-mathematica>

Wybrana literatura

LITERATURA DO WYKŁADU I ĆWICZEŃ

Wykład i ćwiczenia będą w dużej mierze oparte o program *Mathematica*. Ze względu na ograniczony czas, jestem w stanie jedynie zaproponować wprowadzenie w niektóre aspekty tego programu, szczególnie przydatne dla studentów fizyki. Tym, którzy chcą lepiej poznać środowisko *Mathematica* polecam

(a) “kanoniczny” podręcznik tego produktu:

Stephen Wolfram,

The Mathematica Book, Wolfram Media, wiele wydań

(b) zestaw poradników ze strony producenta programu

<http://www.wolfram.com/mathematica/resources/>

(c) Wspaniałym źródłem przykładów, jest

“WOLFRAM DEMONSTRATIONS PROJECT”, gdzie pokazane są zastosowania środowiska *Mathematica* w bardzo wielu dziedzinach wiedzy. Dla nas najważniejsze są te dotyczące fizyki.

<http://demonstrations.wolfram.com/>

(d) **bardzo wiele materiałów** dostępnych w internecie, skrypty do wykładów, porady dla początkujących itp.

Nic nie zastąpi jednak praktyki

Przedstawiam **notatnik** (notebook), w którym pokazane są proste przykłady pracy z programem *Mathematica*.

Możliwa jest praca w tzw. linii komend, ale praca w notatniku jest znacznie bardziej wygodna i efektywna.

Kalkulator

Ta komórka, tak samo jak komórka powyżej, ma charakter tekstowy. Tworzymy ją, wybierając z menu u góry

Format → Style → Text

Poniższe komórki służą do wpisywania poleceń. Są to tzw. input cells.

In[1]:= 2+2 (* wyrażenie jest liczone po jednoczesnym naciśnięciu Shift i Enter ! *)

Out[1]= 4

In[2]:= (* *) (* W ten sposób zapisujemy komentarze, które nie mają wpływu na przebieg obliczeń, ale powinny być przydatne w zrozumieniu tego, co robimy ! *)

In[3]:= 1/17 + 5/37

Out[3]= $\frac{122}{629}$

In[4]:= (1/9 - 2*5)/(-9 + 3/76)^4 (* a^n oznacza a do potęgi n *)

Out[4]= $-\frac{2\,969\,233\,664}{1\,935\,668\,386\,089}$

In[5]:= **sina**

Out[5]= sina

In[6]:= **a**

Out[6]= a

In[7]:= **Cos[Sin[2 + 2 - 17/3 + 12 * 4 * 9^(1/3)/(2 - Sqrt[2])]]**

[co · sinus] [pierwiastek kwadratowy]

(* tu pojawi się nie tylko potęgowanie, ale także znane funkcje matematyczne *)

Out[7]= $\text{Cos}\left[\text{Sin}\left[\frac{5}{3} - \frac{48 \times 3^{2/3}}{2 - \sqrt{2}}\right]\right]$

In[8]:= **N[Cos[Sin[2 + 2 - 17/3 + 12 * 4 * 9^(1/3)/(2 - Sqrt[2])]], 100]**

[co · sinus] [pierwiastek kwadratowy]

(* wartość przybliżona z dokładnością to 100 miejsc znaczących *)

Out[8]= 0.7226235917366384772931388285850524980272195462298253333193371525169682873282455089.
281418517161379825

In[9]:= **2 ^ 34 / 234**

Out[9]= $\frac{8\,589\,934\,592}{117}$

In[10]:= **2 ^ 45 / 789**

Out[10]= $\frac{35\,184\,372\,088\,832}{789}$

In[11]:= **N[$\frac{35\,184\,372\,088\,832}{789}$]**

[przybliżenie numeryczne]

Out[11]= 4.45936×10^{10}

In[12]:= (* Mamy do dyspozycji stałe matematyczne *)

In[13]:= **Pi (* liczba pi *)**

[pi]

Out[13]=

π

In[14]:= **N[Pi, 200] (* jeśli chcemy poznać wartość**

[pi]

numeryczna pi z (niemal) dowolną dokładnością *)

Out[14]= 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986.
2803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410.
27019385211055596446229489549303820

In[15]:= **E**(* podstawa logarytmu naturalnego *)

[liczba Eulera](#)

Out[15]=

e

In[16]:= (* Uwaga: nie mylić e z e !!! *)

In[17]:= **N[E, 200]**(* wartość numeryczna e z (bardzo) dużą dokładnością *)

[liczba Eulera](#)

Out[17]=

2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945`
7138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232`
86279434907632338298807531952510190

In[18]:= **100!**(* silnia *)

Out[18]=

93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993`
229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000`
000 000 000

In[19]:= **Factorial[100]**(* to samo w innym zapisie *)

[silnia](#)

Out[19]=

93 326 215 443 944 152 681 699 238 856 266 700 490 715 968 264 381 621 468 592 963 895 217 599 993`
229 915 608 941 463 976 156 518 286 253 697 920 827 223 758 251 185 210 916 864 000 000 000 000 000`
000 000 000

In[20]:= (* Mathematica podaje DOKŁADNY WYNIK, jeśli to tylko możliwe *)

BARDZO WAŻNE : uwaga na zapis wyrażeń z funkcjami !!!

In[21]:= **Sin[Pi/6]**(* argument funkcji sinus w radianach ! *)

[si...](#) [pi](#)

Out[21]=

$\frac{1}{2}$

In[22]:= **Sin[30 Degree]**(* argument funkcji sinus w stopniach *)

[sinus](#) [stopień](#)

Out[22]=

$\frac{1}{2}$

In[23]:= **Cos[Pi/4]**

[co...](#) [pi](#)

Out[23]=

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

```

In[24]:= Tan[14] (* tangens *)
Out[24]= Tan[14]

In[25]:= N[Tan[14]]
Out[25]= 7.24461

In[26]:= Cot[14] (* cotangens ! *)
Out[26]= Cot[14]

In[27]:= Tan[x] * Cot[x]
Out[27]= 1

In[28]:= (* Mathematica używa często funkcji secans i cosecans,
które w polskiej literaturze są rzadko spotykane *)

In[29]:= Sec[x] * Cos[x] (* secans Sec[x]= 1/Cos[x] *)
Out[29]= 1

In[30]:= Csc[x] * Sin[x] (* cosecans Csc[x]=1/Sin[x] *)
Out[30]= 1

In[31]:= a = (Sqrt[1/200] + Sqrt[3/101])^5 / Sin[Pi/8]
Out[31]= 
$$\left( \sqrt{\frac{3}{101}} + \frac{1}{10\sqrt{2}} \right)^5 \operatorname{Csc}\left[\frac{\pi}{8}\right]$$


In[32]:= (* przypisaliśmy zmiennej a pewna wartość
i możemy to wykorzystać w dalszych obliczeniach *)

In[33]:= b = 13 * a - 234 * a^6
Out[33]= 
$$13 \left( \sqrt{\frac{3}{101}} + \frac{1}{10\sqrt{2}} \right)^5 \operatorname{Csc}\left[\frac{\pi}{8}\right] - 234 \left( \sqrt{\frac{3}{101}} + \frac{1}{10\sqrt{2}} \right)^{30} \operatorname{Csc}\left[\frac{\pi}{8}\right]^6$$


```

Pamiętajmy: mała kropka, duża różnica!

In[34]:= **Sin[2]**
 |sinus

Out[34]=
 Sin[2]

In[35]:= **Sin[2.]**
 |sinus

Out[35]=
 0.909297

Gra w kolory !!!

In[36]:= **Sin[2, 5]** (* kolor czerwony oznacza nieprawidłową komendę ! *)
 |sinus

... Sin: Sin called with 2 arguments; 1 argument is expected. ⓘ

Out[36]=
 Sin[2, 5]

In[37]:= **abece** (* kolor niebieski oznacza niezdefiniowaną wcześniej wielkość ! *)

Out[37]=
 abece

Podstawowa zasada: nazwy komend programu *Mathematica* (N, Plot, ...) oraz wbudowanych funkcji (sinus, cosinus, tangens, cotangens, ...) zaczynają się od dużych liter; ich argument (lub argumenty) są zawarte w nawiasach KWADRATOWYCH !

Mathematica zna różne funkcje specjalne i pozwala nimi swobodnie operować.
 BARDZO WAŻNE DLA FIZYKA !

In[38]:= **Gamma[5]** (* Funkcja gamma Eulera to uogólnienie silni. Zachodzi $\text{Gamma}[n] = (n-1)!$ *)
 |funkcja Gamma

Out[38]=
 24

In[39]:= **Gamma[5] == 4!** (* To tylko sprawdzenie szczególnego przypadku *)
 |funkcja Gamma

Out[39]=
 True

In[40]:= **Gamma[7/3]**
 |funkcja Gamma

Out[40]=
 Gamma $\left[\frac{7}{3}\right]$


```

In[41]:= N[Gamma[7/3]]
Out[41]= 1.19064

In[42]:= FullSimplify[Gamma[n] == (n - 1)!, Element[n, Integers] && n > 0]
(* Teraz mamy sprawdzenie ogólnej zależności dla dowolnej liczby całkowitej większej od zera *)
Out[42]= True

In[43]:= BesselJ[1, 3] (* regularna (o skończonej wartości dla argumentu zero) funkcja Bessela *)
Out[43]= BesselJ[1, 3]

In[44]:= N[BesselJ[1, 3]]
Out[44]= 0.339059

In[45]:= LegendreP[12, x] (* wielomian Legendre'a o numerze 12 *)
Out[45]= 
$$\frac{231 - 18\,018 x^2 + 225\,225 x^4 - 1\,021\,020 x^6 + 2\,078\,505 x^8 - 1\,939\,938 x^{10} + 676\,039 x^{12}}{1024}$$


In[46]:= LegendreP[12, 3, x] (* stowarzyszone wielomiany Legendre'a, które w ogólnym przypadku nie są wielomianami :)) *)
Out[46]= 
$$-\frac{15\,015}{128} (1 - x^2)^{3/2} (45 x - 1020 x^3 + 5814 x^5 - 11\,628 x^7 + 7429 x^9)$$


In[47]:= SphericalHarmonicY[12, -10, theta, phi] (* Harmoniki sferyczne *)
Out[47]= 
$$\frac{5 e^{-10 i \phi} \sqrt{\frac{88\,179}{\pi}} (-1 + 23 \cos[\theta]^2) \sin[\theta]^{10}}{2048}$$


```

Uwaga na nazwy funkcji, które składają się z kilku słów (arcus sinus, arcus tangens, arcus tangens hiperboliczny, ...)

In[48]:= **ArcSin[1 / 2]**

|arcus sinus

Out[48]=

$$\frac{\pi}{6}$$

In[49]:= **?? Arc***

Out[49]=

System`				
ArcCos	ArcCoth	ArcLength	ArcSinDegrees	ArcTanh
ArcCosDegrees	ArcCsc	ArcSec	ArcSinDistribution	
ArcCosh	ArcCscDegrees	ArcSecDegrees	ArcSinh	
ArcCot	ArcCsch	ArcSech	ArcTan	
ArcCotDegrees	ArcCurvature	ArcSin	ArcTanDegrees	

In[50]:= **ArcTan[1]**

|arcus tangens

Out[50]=

$$\frac{\pi}{4}$$

In[51]:= **ArcTanh[99 / 100]**

|arcus tangens hiperboliczny

Out[51]=

$$\text{ArcTanh}\left[\frac{99}{100}\right]$$

Dlatego najlepiej jest używać nazw zmiennych i nazw funkcji pisanych małymi literami. Nie radzę próbować instrukcji typu:

C=123.7;

D=13*Pi;

E=-1;

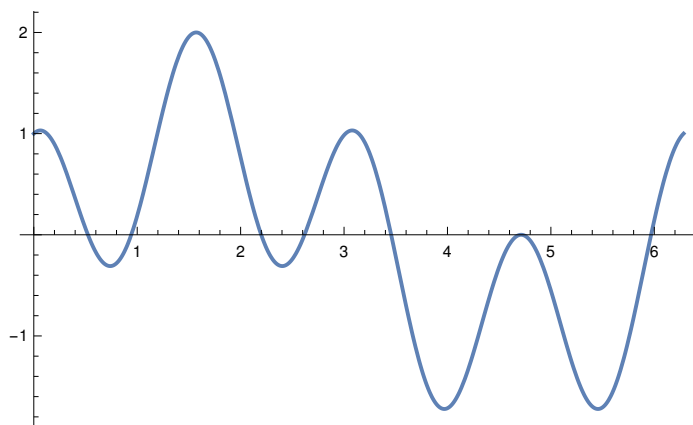
I=5;

Rysowanie wykresów 2D

In[52]:= `Plot[Sin[x] + Cos[4 * x], {x, 0, 2 * Pi}]`

`|wy...` `|sinus` `|cosinus` `|pi`

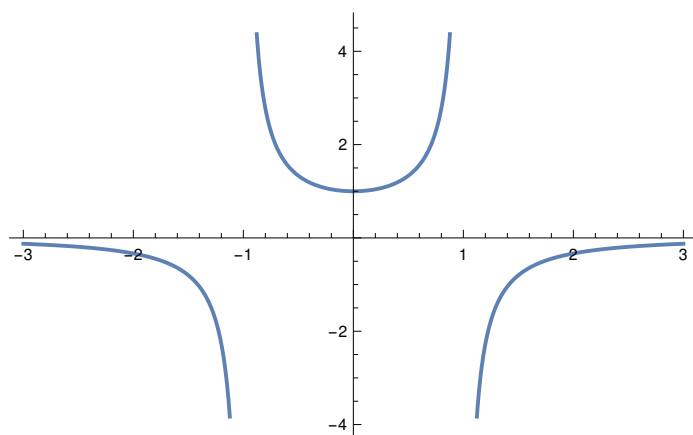
Out[52]=



In[53]:= `Plot[1/(1 - x ^ 2), {x, -3, 3}]`

`|wykres`

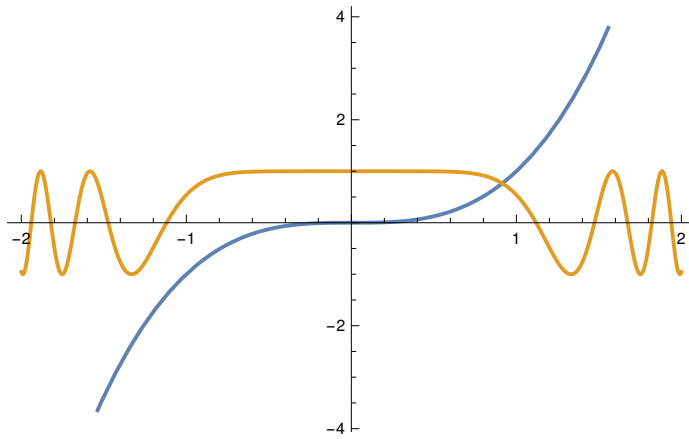
Out[53]=



```
In[54]:= Plot[{x^3, Cos[x^4]}, {x, -2, 2}]
```

[wykres](#) [cosinus](#)

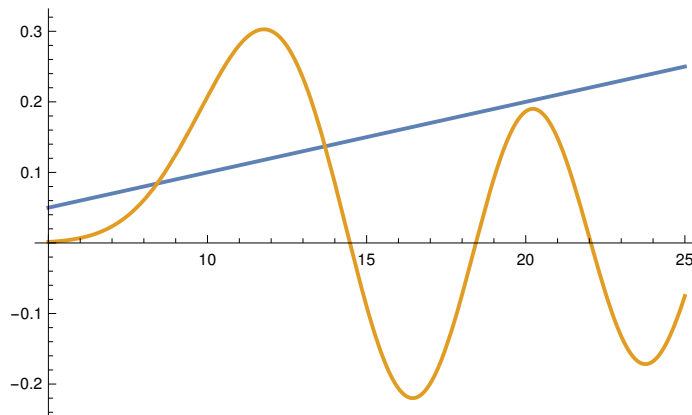
Out[54]=



```
In[55]:= Plot[{x/100, BesselJ[10, x]}, {x, 5, 25}]
```

[wykres](#) [funkcja J Bessela](#)

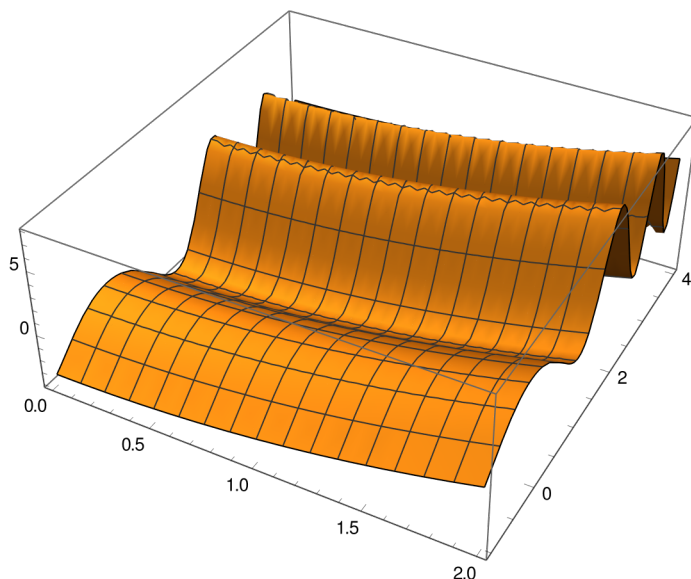
Out[55]=



```
In[56]:= Plot3D[x^2 - 4*Sin[y^2], {x, 0, 2}, {y, -1, 4}]
```

[wykres trójwymia...](#) [sinus](#)

```
Out[56]=
```



Listy

```
In[57]:= (* Uporządkowany zbiór, w zasadzie dowolnych, elementów *)
```

```
In[58]:= {1, 2, 3, x, Sin[p], {y, z}, "napis"}
```

[sinus](#)

```
Out[58]=
```

```
{1, 2, 3, x, Sin[p], {y, z}, napis}
```

```
In[59]:= (* zmienna ma wartość, która jest listą *)
```

```
In[60]:= dziwnalista = {1, x, Sin[beta], {p, q}, {11, 12, z}}
```

[sinus](#)

```
Out[60]=
```

```
{1, x, Sin[beta], {p, q}, {11, 12, z}}
```

```
In[61]:= dziwnalista[[1]] (* pierwszy element listy; konieczne podwójne nawiasy ! *)
```

```
Out[61]=
```

```
1
```

```
In[62]:= (* to samo inaczej ... *)
```

```
In[63]:= Part[dziwnalista, 1]
```

[część](#)

```
Out[63]=
```

```
1
```

```

In[64]:= (* ... i jeszcze inaczej *)

In[65]:= First[dziwnalista]
|_pierwszy
Out[65]=
1

In[66]:= dziwnalista[2]
Out[66]=
x

In[67]:= dziwnalista[4] (* ten element listy sam jest listą ... *)
Out[67]=
{p, q}

In[68]:= dziwnalista[4][[1]] (* ... i można zapytać, jaki jest jego pierwszy element *)
Out[68]=
p

In[69]:= (* Elementy listy w odwrotnej kolejności *)

In[70]:= dziwnalistaszcz = Reverse[dziwnalista]
|_odwróć kolejność
Out[70]=
{{11, 12, z}, {p, q}, Sin[beta], x, 1}

In[71]:= (* Listy można ze sobą łączyć *)

In[72]:= lista1 = {1, 4, 2, 5};

In[73]:= lista2 = {10, 4, 5, 7, 3, 11};

In[74]:= lista3 = Join[lista1, lista2]
|_połącz
Out[74]=
{1, 4, 2, 5, 10, 4, 5, 7, 3, 11}

In[75]:= (* Proszę zwrócić uwagę na powtarzające się elementy !
Można je usunąć przy pomocy komendy DeleteDuplicates *)
|_usuń kopie

In[76]:= lista4 = DeleteDuplicates[lista3]
|_usuń kopie
Out[76]=
{1, 4, 2, 5, 10, 7, 3, 11}

In[77]:= (* Prosta komenda zlicza elementy listy *)

In[78]:= Length[lista4]
|_długość
Out[78]=
8

```

In[79]:= (* Jeszcze inne instrukcje sortują listę *)

In[80]:= lista5 = Sort[lista4]
|sortuj

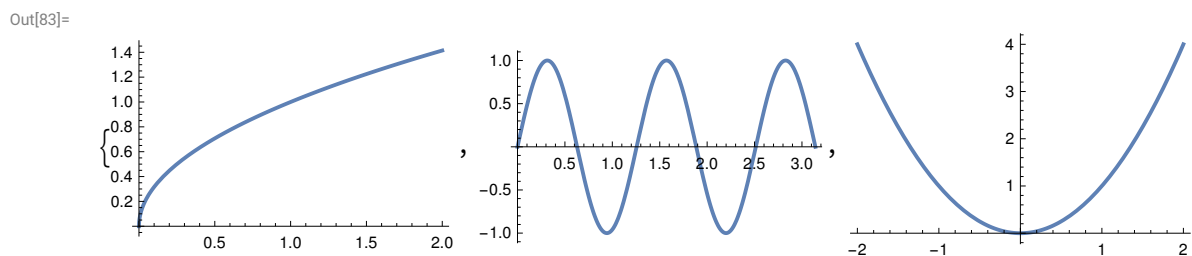
Out[80]=
 {1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11}

In[81]:= lista6 = ReverseSort[lista5]
|sortuj odwrotnie

Out[81]=
 {11, 10, 7, 5, 4, 3, 2, 1}

In[82]:= (* lista, której elementami są wykresy *)

In[83]:= {Plot[Sqrt[x], {x, 0, 2}], Plot[Sin[5*x], {x, 0, Pi}], Plot[x^2, {x, -2, 2}]}
|wy... |pierwiastek kwadratowy |wy... |sinus |pi |wykres



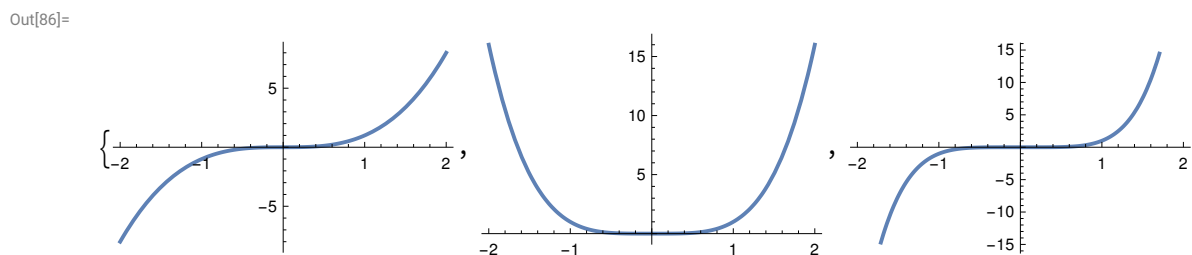
Niektóre komendy z definicji dają listy

In[84]:= Table[n^3, {n, 1, 7}]
|tabela

Out[84]=
 {1, 8, 27, 64, 125, 216, 343}

In[85]:= (* teraz dostaniemy listę rysunków *)

In[86]:= Table[Plot[x^n, {x, -2, 2}], {n, 3, 5, 1}]
|tabela |wykres



In[87]:= (* prosta lista kolejnych liczb naturalnych od 1 do 10 *)

In[88]:= Range[10]
|zakres

Out[88]=
 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

In[89]:= (* lista liczb naturalnych od 2 do 10 *)

In[90]:= **Range[2, 10]**
zakres

Out[90]=
{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

In[91]:= (* lista liczb naturalnych od 2 do 10, ale z krokiem 5 *)

In[92]:= **Range[2, 10, 5]**
zakres

Out[92]=
{2, 7}

In[93]:= **? Range**
zakres

Out[93]=

Symbol i

Range[i_{max}] generates the list {1, 2, ..., i_{max} }.
 Range[i_{min} , i_{max}] generates the list { i_{min} , ..., i_{max} }.
 Range[i_{min} , i_{max} , di] uses step di .

v

In[94]:= **?? Range**

Out[94]=

Symbol i

Range[i_{max}] generates the list {1, 2, ..., i_{max} }.
 Range[i_{min} , i_{max}] generates the list { i_{min} , ..., i_{max} }.
 Range[i_{min} , i_{max} , di] uses step di .

Documentation [Local »](#) | [Web »](#)

Attributes {Listable, Protected}

Full Name System`Range

^

In[95]:= **CharacterRange["A", "Z"]**
zakres znaków

Out[95]=
{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z}

In[96]:= **CharacterRange["α", "ω"]**
zakres znaków

Out[96]=
{α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω}

Dla list z liczbami mamy bardzo użyteczne komendy:


```

In[97]:= l1 = {2, 4, 1, 17, -3, 8, 95, -34, 0}
Out[97]=
{2, 4, 1, 17, -3, 8, 95, -34, 0}

In[98]:= Length[l1]
Out[98]=
9

In[99]:= Total[l1]
Out[99]=
90

In[100]:= Mean[l1]
Out[100]=
10

In[101]:= Max[l1]
Out[101]=
95

In[102]:= Min[l1]
Out[102]=
-34

In[103]:=
(* Bardzo ważne: można zadziałać funkcją na CAŁĄ LISTĘ ! *)

In[104]:= l1^2
Out[104]=
{4, 16, 1, 289, 9, 64, 9025, 1156, 0}

In[105]:= Sin[l1]
Out[105]=
{Sin[2], Sin[4], Sin[1], Sin[17], -Sin[3], Sin[8], Sin[95], -Sin[34], 0}

In[106]:= N[Cos[l1]]
Out[106]=
{-0.416147, -0.653644, 0.540302, -0.275163, -0.989992, -0.1455, 0.730174, -0.84857, 1.}

```

Rozwiązania równań występują w postaci list ! Dopiero odpowiednia składnia pozwala na

"wyłuskanie" wyniku

In[107]:=

```
sol = Solve[x^2 == 4, x]
      |rozwiąż równanie
```

Out[107]:=

```
{{x -> -2}, {x -> 2}}
```

In[108]:=

```
sol[[1]]
```

Out[108]:=

```
{x -> -2}
```

In[109]:=

```
sol[[2]]
```

Out[109]:=

```
{x -> 2}
```

In[110]:=

```
FullForm[sol]
      |pełna forma
```

Out[110]//FullForm=

```
List[List[Rule[x, -2]], List[Rule[x, 2]]]
```

In[111]:=

(* Jak wydostać wartość -2, by użyć ją na przykład w dalszych rachunkach ? *)

In[112]:=

```
sol[[1]][[1]][[2]]
```

Out[112]:=

```
-2
```

In[113]:=

(* tego można już używać jak zwykłej wartości liczbowej i przypisać ją zmiennej *)

In[114]:=

```
x11 = sol[[1]][[1]][[2]]
```

Out[114]:=

```
-2
```

In[115]:=

```
x12 = sol[[2]][[1]][[2]]
```

Out[115]:=

```
2
```

In[116]:=

(* Inny sposob wykorzystuje ogólny zapis PODSTAWIENIA *)

In[117]:=

```
x21 = x /. sol[[1]]
```

Out[117]:=

```
-2
```

```
In[118]:=
x22 = x /. sol[[2]]
```

```
Out[118]=
2
```

```
In[119]:=
(* Podstawienie działa tak: *)
```

```
In[120]:=
(z + z ^ 2) /. {z -> 11}
```

```
Out[120]=
132
```

=, czy ==, czy może === ?

```
In[121]:=
q = 90; (* jeden znak "=" przypisanie zmiennej wartości *)
```

```
In[122]:=
1/2 == Sin[Pi/6] (* dwa znaki "=" sprawdzenie równości liczb lub wyrażeń *)
      |si... |pi
```

```
Out[122]=
True
```

```
In[123]:=
Solve[x^2 + 3*x + 6 == 0, x] (* dwa znaki "=" konieczne przy równaniach *)
      |rozwiąż równanie
```

```
Out[123]=
{{x -> 1/2 (-3 - i Sqrt[15]), {x -> 1/2 (-3 + i Sqrt[15])}}
```

```
In[124]:=
x = Tan[c];
      |tangens
```

```
In[125]:=
y = Sin[c]/Cos[c];
      |sinus |cosinus
```

```
In[126]:=
x === y (* sprawdzenie identycznego znaczenia wyrażeń *)
```

```
Out[126]=
True
```

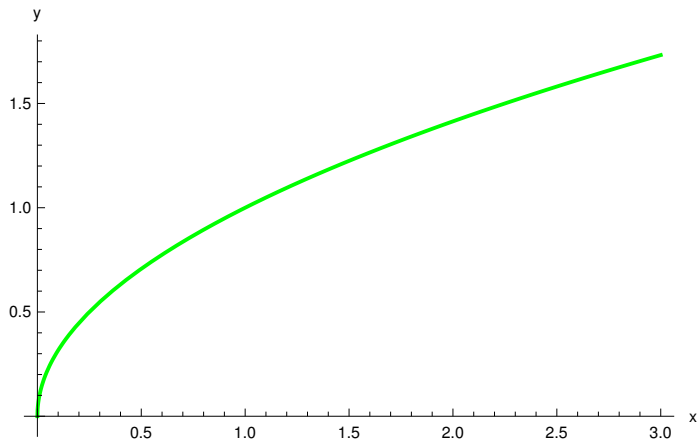
Uzyskiwanie pomocy

Wiele komend posiada opcje, niekiedy bardzo wiele opcji

In[127]:=

```
Plot[Sqrt[x], {x, 0, 3}, AxesLabel -> {"x", "y"}, PlotStyle -> Green]
|wy... |pierwiastek kwadrat... |oznaczenia osi |styl grafiki |zielony
```

Out[127]:=



In[128]:=

```
Options[Plot]
```

```
|opcje |wykres
```

Out[128]:=

```
{AlignmentPoint -> Center, AspectRatio ->  $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ , Axes -> True,
  AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> {}, Background -> None,
  BaselinePosition -> Automatic, BaseStyle -> {}, ClippingStyle -> None,
  ColorFunction -> Automatic, ColorFunctionScaling -> True, ColorOutput -> Automatic,
  ContentSelectable -> Automatic, CoordinatesToolOptions -> Automatic,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, Epilog -> {}, Evaluated -> Automatic,
  EvaluationMonitor -> None, Exclusions -> Automatic, ExclusionsStyle -> None,
  Filling -> None, FillingStyle -> Automatic, FormatType -> TraditionalForm,
  Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle -> {}, FrameTicks -> Automatic,
  FrameTicksStyle -> {}, GridLines -> None, GridLinesStyle -> {}, ImageMargins -> 0.,
  ImagePadding -> All, ImageSize -> Automatic, ImageSizeRaw -> Automatic,
  LabelingSize -> Automatic, LabelStyle -> {}, MaxRecursion -> Automatic, Mesh -> None,
  MeshFunctions -> {#1 &}, MeshShading -> None, MeshStyle -> Automatic, Method -> Automatic,
  PerformanceGoal -> $PerformanceGoal, PlotHighlighting -> Automatic, PlotLabel -> None,
  PlotLabels -> None, PlotLayout -> Automatic, PlotLegends -> None, PlotPoints -> Automatic,
  PlotRange -> {Full, Automatic}, PlotRangeClipping -> True, PlotRangePadding -> Automatic,
  PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, PlotTheme -> $PlotTheme,
  PreserveImageOptions -> Automatic, Prolog -> {}, RegionFunction -> (True &),
  RotateLabel -> True, ScalingFunctions -> None, TargetUnits -> Automatic,
  Ticks -> Automatic, TicksStyle -> {}, WorkingPrecision -> MachinePrecision}
```

In[129]=

? N[przybliżenie numeryczne](#)

Out[129]=

Symbol i

N[*expr*] gives the numerical value of *expr*.

N[*expr*, *n*] attempts to give a result with *n*-digit precision.

▼

In[130]=

(* krotka informacja o funkcji Plot *)[wykres](#)**? Plot**[wykres](#)

Out[130]=

Symbol i

Plot[*f*, {*x*, *x_{min}*, *x_{max}*}] generates a plot of *f* as a function of *x* from *x_{min}* to *x_{max}*.

Plot[{*f*₁, *f*₂, ...}, {*x*, *x_{min}*, *x_{max}*}] plots several functions *f_i*.

Plot[{..., *w*[*f_i*], ...}, ...] plots *f_i* with features defined by the symbolic wrapper *w*.

Plot[..., {*x* ∈ *reg*} takes the variable *x* to be in the geometric region *reg*.

▼

In[131]=

(* bardziej rozbudowana informacja o funkcji Plot *)[wykres](#)**?? Plot**

Out[131]=

Symbol i

Plot[*f*, {*x*, *x_{min}*, *x_{max}*}] generates a plot of *f* as a function of *x* from *x_{min}* to *x_{max}*.

Plot[{*f*₁, *f*₂, ...}, {*x*, *x_{min}*, *x_{max}*}] plots several functions *f_i*.

Plot[{..., *w*[*f_i*], ...}, ...] plots *f_i* with features defined by the symbolic wrapper *w*.

Plot[..., {*x* ∈ *reg*} takes the variable *x* to be in the geometric region *reg*.

Documentation [Local »](#) | [Web »](#)

Options > [AlignmentPoint](#) → [Center](#) ... (65 total)

Attributes {HoldAll, Protected, ReadProtected}

Full Name System`Plot

▲

(* pomoc na temat wszystkich funkcji lub poleceń zaczynających się od "Plot"[wykres](#)**niestety w wersji 14.1 już nie działa! Lepsze jest wrogiem dobrego ... *)****? Plot***[wykres](#)

Nasze własne funkcje

Puszczamy wodze fantazji i definiujemy NOWĄ funkcję

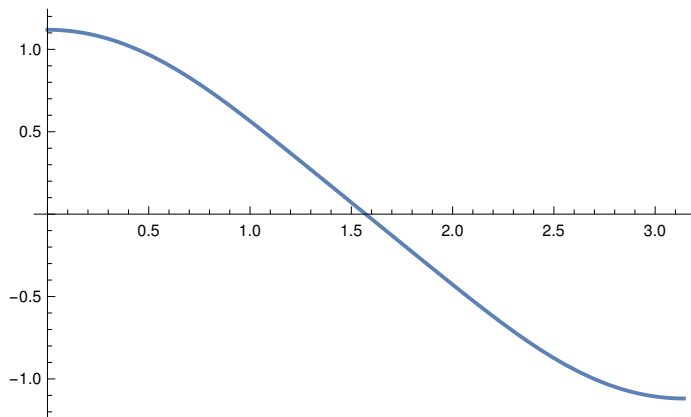
In[132]:=

```
f[x_] := Tan[Sin[Cos[x]]] (* to nie jest jedyny sposób, ale na razie wystarczy;
    [t... [si... [cosinus
    więcej informacji o tzw. natychmiastowej i opóźnionej
    definicji funkcji można znaleźć na mojej stronie w noteboku
    natychmiastowa_i_opozniona_definicja_funkcji.nb
    *)
```

In[133]:=

```
Plot[f[x], {x, 0, Pi}]
    [wykres [pi
```

Out[133]:=



In[134]:=

```
f[1]
```

Out[134]:=

```
Tan[Sin[Cos[1]]]
```

In[135]:=

```
N[f[1], 20]
    [przybliżenie numeryczne
```

Out[135]:=

```
0.56514343133040975986
```

In[136]:=

(* Jeszcze jeden ważny przykład: funkcję można zdefiniować KAWAŁKAMI *)

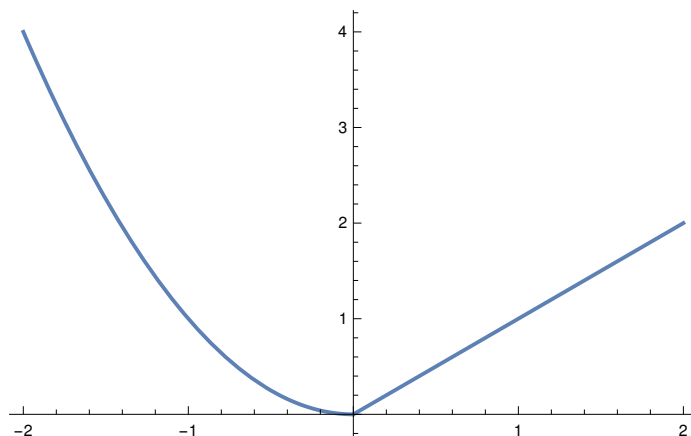
In[137]:=

```
w[x_] := Piecewise[{{x^2, x < 0}, {x, x >= 0}}] (* uwaga na składnię *)
    [funkcja odcinkowa
```

In[138]:=

Plot[w[x], {x, -2, 2}][wykres](#)

Out[138]:=



In[139]:=

w[0]

Out[139]:=

0

Zapis z '@'

In[140]:=

ClearAll[f, g, h];[wyczyść wszystko](#)

In[141]:=

f@x

Out[141]:=

f[Tan[c]]

In[142]:=

f@g@h@x

Out[142]:=

f[g[h[Tan[c]]]]

Czyste funkcje (pure functions = anonymous functions)

In[143]:=

(2 #) & (* ta czysta funkcja zwraca podwojoną wartość argumentu *)

Out[143]:=

2 #1 &

In[144]:=

(2 #) &[5]

Out[144]:=

10

In[145]:=

(* Może być aplikowana do listy *)

In[146]:=

```
(2 #) &{{2, 6}}
```

Out[146]=

```
{4, 12}
```

In[147]:=

```
(* i zapisana także w ten sposób *)
```

In[148]:=

```
Function[x, 2 x]  
|_funkcja
```

Out[148]=

```
Function[x, 2 x]
```

In[149]:=

```
Function[x, 2 x][r]  
|_funkcja
```

Out[149]=

```
2 r
```

In[150]:=

```
(* Nadajmy funkcji nazwę *)
```

In[151]:=

```
f1 = Function[x, 2 x];  
|_funkcja
```

In[152]:=

```
f1[r]
```

Out[152]=

```
2 r
```

In[153]:=

```
f1@r
```

Out[153]=

```
2 r
```

In[154]:=

```
(* Użyjmy funkcji Map *)  
|_zastosuj
```

In[155]:=

```
Map[f1, r] (* Tak jest NIEPOPRAWNIE *)  
|_zastosuj do
```

Out[155]=

```
r
```

In[156]:=

```
Map[f1, {r}] (* Tak jest POPRAWNIE *)  
|_zastosuj do
```

Out[156]=

```
{2 r}
```



```
In[157]:=
ClearAll[f1, a, b, c, d];
|wyczyść wszystko
```

```
In[158]:=
Map[f1, {a, b, c, d}]
|zastosuj do
```

```
Out[158]:=
{f1[a], f1[b], f1[c], f1[d]}
```

```
In[159]:=
(* To samo inaczej *)
```

```
In[160]:=
f1 /@ {a, b, c, d}
```

```
Out[160]:=
{f1[a], f1[b], f1[c], f1[d]}
```

```
In[161]:=
(* Teraz Map działa na listę list na poziomie 1 *)
|zastosuj do
```

```
In[162]:=
Map[f1, {{a, b}, {c, d}}]
|zastosuj do
```

```
Out[162]:=
{f1[{a, b}], f1[{c, d}]}
```

```
In[163]:=
(* Teraz Map działa na listę list na poziomie 2 *)
|zastosuj do
```

```
In[164]:=
Map[f1, {{a, b}, {c, d}}, {2}]
|zastosuj do
```

```
Out[164]:=
{{f1[a], f1[b]}, {f1[c], f1[d]}}
```

```
In[165]:=
f1 @ {{a, b}, {c, d}}
```

```
Out[165]:=
f1[{{a, b}, {c, d}}]
```

```
In[166]:=
f1 /@ {{a, b}, {c, d}}
```

```
Out[166]:=
{f1[{a, b}], f1[{c, d}]}
```

```
In[167]:=
f1 @@ {{a, b}, {c, d}}
```

```
Out[167]:=
f1[{a, b}, {c, d}]
```

```
In[168]:= f1 @@@ {{a, b}, {c, d}}
```

```
Out[168]:= {f1[a, b], f1[c, d]}
```

Operator %

```
In[169]:= v = 24 * 5 / (6!)
```

```
Out[169]:=  $\frac{1}{6}$ 
```

```
In[170]:= N[%] (* % zastępuje wynik poprzedniego obliczenia. Ponieważ obliczenia
|przybliżenie numeryczne
| w poszczególnych komórkach mogą być wykonywane w dowolnej kolejności,
| % nie oznacza automatycznie wyniku z poprzedniej komórki ! *)
```

```
Out[170]:= 0.166667
```

```
In[171]:= w = % + 11
```

```
Out[171]:= 11.1667
```

```
In[172]:= t1 = %% * 6 (* %% teraz wykorzystujemy przedostatnio uzyskany wynik *)
```

```
Out[172]:= 1.
```

```
In[173]:= t2 = %%% * 6 (* a teraz jeszcze wcześniejszy *)
```

```
Out[173]:= 1.
```

```
In[174]:= (* wynik z komórki numer 126 *)
```

```
t3 = (%126) * 6
```

```
Out[174]:= 6 True
```

```
In[175]:=
```

Nadawanie wartości zmiennym i ich

odwoływanie

W jednej komórce można podać wiele komend

```
In[176]:=
a1 = 23
a2 = 3
a3 = 7
```

```
Out[176]=
23
```

```
Out[177]=
3
```

```
Out[178]=
7
```

Jeśli nie chcemy widzieć outputu (na przykład przy prostych instrukcjach przypisania), wtedy dajemy średniki

```
In[179]:=
b1 = 23; b2 = 3; b3 = 7; b4 = -9.0; b5 = 76; b6 = 0;
```

```
In[180]:=
Clear[b1]; (* wartość b1 stanie się z powrotem nieokreślona;
wyczyść
proszę zwrócić uwagę na zmianę koloru na niebieski ! *)
```

```
In[181]:=
b1
```

```
Out[181]=
b1
```

```
In[182]:=
b2=.; (* to działa tak samo. UWAGA na zmianę koloru nazwy b2 z czarnego na niebieski *)
```

```
In[183]:=
Clear[b3, b4, b5]; (* to wyczyści trzy zmienne naraz *)
wyczyść
```

```
In[184]:=
(* poniższa instrukcja wyczyści WSZYSTKIE PRZYPISANE WARTOŚCI i DEFINICJE *)
```

```
In[185]:=
ClearAll["Global`*"]
wyczyść wszystko
```

```
In[186]:=
a1
```

```
Out[186]=
a1
```

```
In[187]:=
f
Out[187]=
f
```

Inne

```
In[188]:=
s1 = Sum[n ^ 2, {n, 1, 10}]
sumowanie
```

```
Out[188]=
385
```

```
In[189]:=
(* łatwo użyć opcji Insert → Input from above i potem zmienić , by uzyskać ... *)
wstaw wejście
```

```
In[190]:=
s2 = Sum[n ^ 5, {n, 1, 10}]
sumowanie
```

```
Out[190]=
220 825
```

```
In[191]:=
(* podobnie można wykorzystać output z poprzedniej komórki *)
```

```
In[192]:=
Sum[ii ^ 3, {ii, 1, n}]
sumowanie
```


```
Out[192]=

$$\frac{1}{4} n^2 (1 + n)^2$$

```

```
In[193]:=
g[n_] :=  $\frac{1}{4} n^2 (1 + n)^2$  (* użyłem opcji Insert → Output from above *)
wstaw
```

```
In[194]:=
(* Insert → Picture → From file *)
wstaw
```

```
In[195]=
 ;
```

In[196]:=

```
Blur[, 5]
```

Out[196]=



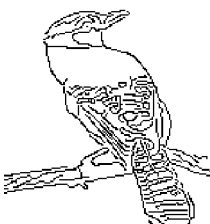
In[197]:=

```
bird =  ;
```

In[198]:=

```
ColorNegate[EdgeDetect[bird]]
```

Out[198]=



Jak unikać podstawowych błędów

(0) Notatnik zbudowany jest z komórek. Na początku warto zapisywać polecenia w odrębnych komórkach, bo łatwiej jest zlokalizować błędy ! Polecenia wprowadzamy przy pomocy **SHIFT+ENTER**

(1) Nawiasy () są używane wyłącznie dla zaznaczenia kolejności operacji. Nie należy używać { } oraz [] w wyrażeniach matematycznych !

(2) Polecenia programu *Mathematica* oraz wbudowane funkcje mają nazwy zaczynające się z dużej litery !

(3) Nawiasy kwadratowe są używane dla argumentów poleceń i funkcji !

(4) Nawiasy { } są używane wyłącznie w listach !

(5) Przy definiowaniu własnych funkcji (na razie) trzymać się wzoru: $f[x_]:=x^5$

(6) Równania (i porównywania) wymagają dwóch znaków ==

Przypominam: należy zwracać uwagę na kolory !

Kolor czerwony oznacza zwykle błędną składnię !

Kolor niebieski zmiennej oznacza, że nie nadano jej żadnej wartości, co może mieć wpływ na dalsze obliczenia z wykorzystaniem tej zmiennej !