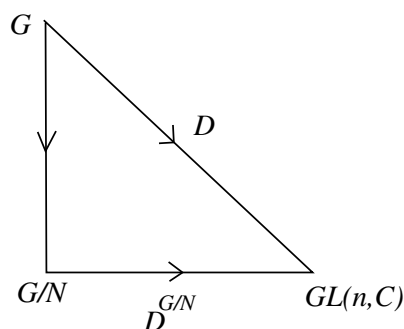


### Zestaw 4

1. Dana jest normalna podgrupa  $N$  grupy  $G$  oraz reprezentacja  $D^{G/N}$  grupy ilorazowej  $G/N$ . Pokazać, że reprezentacja  $D^{G/N}$  może być “podniesiona” do reprezentacji  $D^G$  grupy  $G$  za pomocą definicji

$$D^G(g) := D^{G/N}(gN).$$



2. Pokazać, że jeśli  $D(g)$  jest nieredukowalną reprezentacją grupy  $G$  (w sensie grupy macierzy), to reprezentacją grupy  $G$  jest także grupa macierzy  $D^*(g)$ . Reprezentacje  $D^*(g)$  i  $D(g)$  mogą być równoważne lub nierównoważne. Udowodnić ponadto, że jeśli reprezentacje  $D^*(g)$  i  $D(g)$  są równoważne, tzn.  $\exists C \forall g \in G : D^*(g) = C^{-1} D(g) C$ , to macierz  $CC^*$  jest proporcjonalna do macierzy jednostkowej.
3. Znaleźć wszystkie nierównoważne reprezentacje grupy  $D_4$  i zbudować dla niej tabelę charakterów. Przy pomocy tej tabeli dokonać redukcji reprezentacji działającej w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej.
4. Znaleźć wszystkie nierównoważne reprezentacje grupy kwaternionów rozważanej w drugim zestawie zadań i zbudować dla niej tabelę charakterów. Porównać tabele charakterów grupy  $D_4$  i grupy kwaternionów.
5. Znaleźć wszystkie nierównoważne reprezentacje grupy  $D_6$  i zbudować dla niej tabelę charakterów. Przy pomocy tej tabeli dokonać redukcji reprezentacji działającej w trójwymiarowej przestrzeni wektorowej.
6. Eksponentą macierzy zespolonej  $A$  o wymiarze  $n \times n$  jest macierz oznaczona jako  $e^A$  lub  $\exp(A)$  wyrażona przez szereg potęgowy:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Udowodnić przy pomocy iloczynu Cauchy’ego szeregów, że dla dowolnej macierzy  $A$  o wymiarze  $n \times n$  zachodzi  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ . Iloczynem Cauchy’ego szeregów  $\sum a_n$  i  $\sum b_n$  jest szereg  $\sum c_n$ , gdzie

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

7. Pokazać, że  $(e^A)^* = e^{A^*}$ ,  $(e^A)^T = e^{A^T}$ ,  $(e^A)^\dagger = e^{A^\dagger}$ .
8. Pokazać, że  $e^{iH}$  jest macierzą unitarną, jeśli macierz  $H$  jest hermitowska tzn.  $A^\dagger = A$ .
9. Pokazać, że  $e^A$  jest macierzą ortogonalną, jeśli macierz  $A$  jest antysymetryczna tzn.  $A^T = -A$ .
10. Ograniczając się do macierzy diagonalizowalnych  $A$  o wymiarze  $n \times n$ , pokazać, że  $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$ , gdzie  $\det(B)$  oznacza wyznacznik macierzy  $B$ , a  $\text{tr}(B) \equiv \sum_{k=1}^n B_{kk}$  jest śladem macierzy  $B$ .
11. Pokazać, że dla macierzy Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

zachodzi

$$\exp\left(-\frac{1}{2}i\phi\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\right) = I \cos\left(\frac{1}{2}\phi\right) - i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)$$

dla dowolnego kąta  $\phi$  i wektora jednostkowego  $\vec{n}$ .