

Statystyczne Metody Opracowania Pomiarów I

B. Kamys; Instytut Fizyki UJ

Spis treści

1	Elementy teorii prawdopodobieństwa	2
1.1	Definicje podstawowych pojęć	2
1.2	Własności prawdopodobieństwa	3
2	Podstawowe pojęcia teorii estymacji	5
3	Ilościowy opis zmiennych losowych	7
4	Funkcje zmiennej losowej	9
5	Charakterystyki rozkładu prawdopodobieństwa	11
6	Rozkład normalny (Gaussa)	15
7	Podstawy rachunku niepewności pomiarowych	17
7.1	Rozkład pomiarów	20
7.2	Estymator wartości oczekiwanej	22
7.3	Estymator odchylenia standardowego	23
7.4	Zapis wyników pomiarów	24
7.5	Rozkład liczby pozytywnie zakończonych doświadczeń	26
7.6	Niepewność statystyczna	27
7.7	Pomiary pośrednie	29
7.7.1	Estymator $E(Y)$ dla pomiaru pośredniego Y	29
7.7.2	Niepewność pomiaru pośredniego	29
7.7.3	Błąd maksymalny	30
8	Regresja liniowa	31
9	Indeks	34

1 ELEMENTY TEORII PRAWDOPODOBIENSTWA

1.1 DEFINICJE PODSTAWOWYCH POJEŃ

DEFINICJA: Zbiór zdarzeń elementarnych - zbiór takich zdarzeń, które się wzajemnie wykluczają oraz wyczerpują wszystkie możliwości (tzn. w każdym możliwym przypadku przynajmniej jedno z nich musi zachodzić).

DEFINICJA: Zdarzeniem jest dowolny podzbiór zdarzeń elementarnych \mathcal{E} .

DEFINICJA: Zdarzeniem pewnym jest zdarzenie zawierające wszystkie elementy zbioru \mathcal{E} (zachodzi zawsze).

DEFINICJA: Zdarzeniem niemożliwym jest zdarzenie nie zawierające żadnego elementu zbioru \mathcal{E} tj. zbiór pusty \emptyset .

DEFINICJA: Zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B jeżeli każde zdarzenie elementarne należące do zbioru A należy do B: ' $A \subset B$ '

DEFINICJA: Zdarzenia A i B są równe
gdy $A \subset B$ i $B \subset A$.

DEFINICJA: Suma zdarzeń A+B

to zdarzenie zawierające te i tylko te zdarzenia elementarne, które należą do któregośkolwiek ze zdarzeń A, B,... (suma logiczna zbiorów zdarzeń elementarnych ' $A \cup B \cup \dots$ ').

DEFINICJA: Różnica zdarzeń A-B

to zdarzenie zawierające te i tylko te zdarzenia elementarne, które należą do zdarzenia A a nie należą do zdarzenia B.

DEFINICJA: Iloczyn zdarzeń A.B

to zdarzenie zawierające te i tylko te zdarzenia elementarne, które należą do wszystkich zdarzeń A, B (tzn. w języku zbiorów ' $A \cap B$ ').

DEFINICJA: Zdarzeniem przeciwnym do A: \bar{A} nazywamy różnicę ' $\mathcal{E}-A$ '

DEFINICJA: Zdarzeniem losowym - nazywamy zdarzenie spełniające poniższe warunki:

1. W zbiorze zdarzeń losowych znajduje się **zdarzenie pewne** oraz **zdarzenie niemożliwe**.
2. Jeżeli zdarzenia A_1, A_2, \dots w ilości skończonej lub przeliczalnej są zdarzeniami losowymi to ich **iloczyn** i ich **suma** są również zdarzeniami losowymi.

3. Jeżeli A_1 i A_2 są zdarzeniami losowymi to ich **różnica** jest również zdarzeniem losowym.

INTUICYJNE OKREŚLENIE: *Zdarzenie losowe* to takie, o którym nie możemy powiedzieć czy zajdzie w danych warunkach czy też nie zajdzie.

DEFINICJA: *Zmienną losową* nazywamy jednoznacznie funkcję rzeczywistą $X(e)$ określoną na zbiorze \mathcal{E} zdarzeń elementarnych taką, że każdemu przedziałowi wartości funkcji X typu $(-\infty, x)$ odpowiada zdarzenie losowe.

DEFINICJA: Zmienna losowa *typu skokowego (dyskretnego)* to taka, która przyjmuje tylko co najwyżej przeliczalny zbiór wartości. Zmienna losowa *typu ciągłego* - może przyjmować dowolne wartości od minus do plus nieskończoności.

DEFINICJA: Definicja prawdopodobieństwa

Aksjomat 1: Każdemu zdarzeniu losowemu przyporządkowana jest jednoznacznie nieujemna liczba rzeczywista zwana prawdopodobieństwem.

Aksjomat 2: Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe jedności.

Aksjomat 3: Jeżeli zdarzenie losowe Z jest sumą skończonej lub przeliczalnej liczby rozłącznych zdarzeń losowych Z_1, Z_2, \dots to prawdopodobieństwo zrealizowania się zdarzenia Z jest równe sumie prawdopodobieństw zdarzeń Z_1, Z_2, \dots

Aksjomat 4: *Prawdopodobieństwo warunkowe* zdarzenia A pod warunkiem, że zachodzi zdarzenie B ; ' $P(A|B)$ ' wyraża się wzorem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo to jest nieokreślone, gdy prawdopodobieństwo zdarzenia B wynosi zero.

1.2 WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1.) Zdarzenie przeciwne do A :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Dowód:

$A + \bar{A} = \mathcal{E}$ a więc $P(A + \bar{A}) = P(\mathcal{E}) = 1$,

z drugiej strony A i \bar{A} wykluczają się więc

$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$.

Stąd $P(\bar{A}) = P(\mathcal{E}) - P(A)$ czyli $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ c.b.d.o.

2.) Zdarzenie niemożliwe :

$$P(\emptyset) = 0$$

Dowód:

\mathcal{E} i \emptyset wykluczają się więc $P(\mathcal{E} + \emptyset) = P(\mathcal{E}) + P(\emptyset)$ oraz $\mathcal{E} + \emptyset = \mathcal{E}$ a więc $P(\mathcal{E} + \emptyset) = P(\mathcal{E})$, czyli

$$P(\emptyset) = 0$$

c.b.d.o.

3.) Zdarzenie A zawiera się w B :

$$P(A) \leq P(B)$$

Dowód: $P(B) = P(A + (\overline{A}.B)) = P(A) + P(\overline{A}.B) \geq P(A)$ c.b.d.o.

4.) Dowolne zdarzenie losowe :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Dowód: Dla każdego zdarzenia jest prawdziwe:

$$\emptyset \subset A + \emptyset = A = A.\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$$

a więc prawdopodobieństwa zdarzeń \emptyset, A i \mathcal{E} spełniają:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ c.b.d.o.}$$

5.) Suma dowolnych zdarzeń A+B :

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$$

Dowód:

Zarówno $A+B$ jak i B możemy zapisać jako sumy rozłącznych (wykluczających się) zdarzeń:

$$\begin{aligned} A + B &= A + (B - A.B) \text{ oraz} \\ B &= A.B + (B - A.B), \end{aligned}$$

stosujemy aksjomat nr 3 definicji prawdopodobieństwa,

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) + P(B - A.B), \\ P(B) &= P(A.B) + P(B - A.B) \end{aligned}$$

odejmujemy stronami: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$ c.b.d.o.

6.) Iloczyn zdarzeń A.B :

$$P(A.B) = P(B).P(A|B) = P(A).P(B|A)$$

Dowód:

Wynika to automatycznie z 4 aksjomatu definicji prawdopodobieństwa.

DEFINICJA: Zdarzenie A jest niezależne od B gdy $P(A|B) = P(A)$.

7.) **Jeżeli A nie zależy od B to B nie zależy od A .** Dowód:

Korzystamy z dwu wzorów na prawdopodobieństwo $A.B$ podanych wyżej, przy czym w pierwszym z nich uwzględniamy, że A jest niezależne od B . Wówczas z porównania obu wzorów dostajemy $P(B|A) = P(B)$.

c.b.d.o.

8.) **WKW niezależności: $P(A.B) = P(A).P(B)$** Dowód:

Wynika to automatycznie ze wzoru na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń.

c.b.d.o.

9.) **Formuła 'całkowitego prawdopodobieństwa':** Jeżeli istnieje zbiór zdarzeń A_1, A_2, \dots wykluczających się wzajemnie i wyczerpujących wszystkie możliwości wówczas prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia B może być zapisane następująco:

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

Dowód:

$B = \sum_i B.A_i$ (suma rozłącznych zdarzeń) a więc $P(B) = \sum_i P(B.A_i)$ a każdy składnik można zapisać jako $P(A_i) \cdot P(B|A_i)$. c.b.d.o.

2 PODSTAWOWE POJĘCIA TEORII ESTYMACJI

DEFINICJA: W statystyce skończony zespół doświadczeń nazywamy próbą a wnioskowanie na podstawie próby o własnościach nieskończonego (zwykle) zespołu wszystkich możliwych doświadczeń zwanego populacją generalną, nazywamy estymacją.

DEFINICJA: Przez próbę prostą rozumiemy ciąg niezależnych doświadczeń odnoszących się do tej samej populacji generalnej.

DEFINICJA: Statystyką nazywamy taką funkcję zmiennych losowych obserwowanych w próbie, która sama jest zmienną losową.

DEFINICJA: Estymatorem $T_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n; \theta)$ parametru θ lub w skrócie $T_n(\theta)$ nazywamy statystykę o rozkładzie prawdopodobieństwa zależnym od θ . Tu $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ oznaczają wyniki pomiarów próby a przez rozkład prawdopodobieństwa rozumiemy przyporządkowanie

prawdopodobieństw różnym wartościom statystyki T_n .

DEFINICJA: Estymacja punktowa to taka estymacja, która polega na oszacowaniu wartości danego parametru θ przez wartość jego estymatora.

DEFINICJA: Estymacja przedziałowa polega na szukaniu przedziału liczbowego, wewnątrz którego z założonym prawdopodobieństwem leży prawdziwa wartość parametru.

DEFINICJA: Estymator $T_n(\theta)$, jest zgodny jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ jest spełniony warunek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n(\theta) - \theta| < \epsilon) = 1$$

W takim przypadku używa się często określenia, że estymator spełnia prawo wielkich liczb.

PRZYKŁAD: TWIERDZENIE (Bernoulli): Względna częstość pojawiania się zdarzenia 'A' w ciągu 'n' doświadczeń spełnia prawo wielkich liczb czyli jest zgodnym estymatorem prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|n_A/n - P(A)| < \epsilon) = 1$$

DEFINICJA:

Estymator spełniający mocne prawo wielkich liczb to taki, który jest zbieżny do estymowanego parametru z prawdopodobieństwem równym jedności.

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\theta) = \theta) = 1$$

PRZYKŁAD:

TWIERDZENIE: F.P.Cantelli udowodnił w 1917 roku, że względna częstość pozytywnego zakończenia doświadczenia; n_A/n jest zbieżna do prawdopodobieństwa zdarzenia A; $P(A)$ z prawdopodobieństwem równym jedności:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n) = P(A)) = 1$$

czyli względna częstość spełnia mocne prawo wielkich liczb.

3 ILOŚCIOWY OPIS ZMIENNYCH LOSOWYCH

Ilościowy opis zmiennych losowych uzyskujemy stosując

- Dystrybuantę (Zwaną często przez statystyków funkcją rozkładu)
- Rozkład prawdopodobieństwa (Tylko dla zmiennych dyskretnych)
- Funkcję gęstości prawdopodobieństwa (Tylko dla zmiennych ciągłych) oraz wielkości charakteryzujące te powyżej wymienione twory.

DEFINICJA: Dystrybuantą $F(x)$ nazywamy prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmie wartość mniejszą od x . (' X ' - to symbol zmiennej losowej a ' x ' to jej konkretna wartość). Oczywiście dystrybuanta jest funkcją x .

$$F(x) \equiv P(X < x)$$

Własności dystrybuanty:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(-\infty) = 0$
3. $F(+\infty) = 1$
4. $F(x)$ jest niemalejącą funkcją
5. $F(x)$ nie posiada wymiaru

Przykład:

Dla rzutu kostką do gry, gdzie jako zmienną losową przyjęto liczbę wyrzuconych punktów:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 0 \text{ dla } x \leq 1, \\
 &= 1/6 \text{ dla } 1 < x \leq 2, \\
 &= 2/6 \text{ dla } 2 < x \leq 3, \\
 &= 3/6 \text{ dla } 3 < x \leq 4, \\
 &= 4/6 \text{ dla } 4 < x \leq 5, \\
 &= 5/6 \text{ dla } 5 < x \leq 6, \\
 &= 1 \text{ dla } x > 6
 \end{aligned}$$

DEFINICJA: Rozkład prawdopodobieństwa : Jeżeli x_i ($i=1,2,\dots$) są wartościami dyskretnej zmiennej losowej to rozkładem prawdopodobieństwa nazywamy zespół prawdopodobieństw:

$$P(X=x_i) = p_i, \quad \sum_i p_i = 1$$

Przykład:

Rozkład prawdopodobieństwa dla rzutu kostką do gry omawianego powyżej: $p_i = 1/6$ dla $i = 1, 2 \dots 6$.

DEFINICJA:

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$

$$f(x)dx \equiv P(x \leq X < x+dx)$$

Własności funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

1. $f(x) \geq 0$,

2. $f(x)$ jest unormowana tj. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

4. Wymiar $f(x) =$ wymiar $(1/x)$

Przykład:

Rozkład jednorodny w przedziale $[a,b]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 && \text{dla } x < a \\ &= 1/(b-a) && \text{dla } a \leq x \leq b \\ &= 0 && \text{dla } b < x \end{aligned}$$

4 FUNKCJE ZMIENNEJ LOSOWEJ

Funkcja Y zmiennej losowej X : $Y = Y(X)$ jest również zmienną losową. Dlatego też można dla niej określić dystrybuantę, rozkład prawdopodobieństwa lub funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Są one prosto związane z odpowiednimi wielkościami dla zmiennej X . Należy rozpatrzyć niezależnie przypadek, gdy funkcja $Y(X)$ jest monotoniczna oraz gdy nie posiada tej własności.

a) Funkcja $Y = Y(X)$ jest monotoniczna.

Można wówczas jednoznacznie określić funkcję odwrotną $X=X(Y)$.

1. Dystrybuanta funkcji $Y(X)$: $G(y)$

$Y(X)$ jest rosnąca :

$$\boxed{G(y) = F(x(y))}$$

$Y(X)$ jest malejąca :

$$\boxed{G(y) = 1 - F(x(y)) - P(x; y=y(x))}$$

Dowód: Wychodząc z definicji dla $Y(X)$ rosnącej:

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) \\ &= P(X(Y) < x) \\ &= F(x(y)) \end{aligned}$$

dla $Y(X)$ malejącej:

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y < y) \\ &= P(X(Y) > x) \\ &= 1 - P(X(Y) \leq x) \\ &= 1 - P(X(Y) < x) - P(X(Y) = x) \\ &= 1 - F(x(y)) - P(x; Y = y(x)) \text{ c.b.d.o.} \end{aligned}$$

2. Rozkład prawdopodobieństwa $P(y)$:

$$\boxed{P(y_i) = P(x_i; y_i=Y(x_i))}$$

3. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $g(y)$:

$$g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|$$

gdzie $X(Y)$ jest funkcją odwrotną do $Y(X)$.

Z definicji: $f(x) dx = P(x \leq X < x+dx)$ a to prawdopodobieństwo przy jednoznacznym związku między X i Y wynosi $P(y \leq Y < y+dy) = g(y) dy$.

Znak modułu przy pochodnej pojawia się stąd, że przy malejącej funkcji $Y(X)$ pochodna będzie ujemna co powodowałoby, że $g(y)$ byłaby ujemna a zgodnie z definicją musi być nie-ujemna.

Przykład dla funkcji monotonicznej:

$$Y(X) = a X + b; \text{ a i b to rzeczywiste stałe}$$

1. Rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(Y=y_i) = P(a x_i + b = y_i) = P(x_i = \frac{y_i - b}{a})$$

2. Dystrybuanta:

$$\text{dla } a > 0, G(y) = F(x = \frac{y-b}{a}),$$

$$\text{dla } a < 0, G(y) = 1 - F(x = \frac{y-b}{a}) = P(x = \frac{y-b}{a})$$

3. Gęstość prawdopodobieństwa:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f(x = \frac{y-b}{a})$$

b.) Funkcja $Y(X)$ nie jest monotoniczna .

Wówczas dzielimy obszar zmienności X na przedziały, w których $Y(X)$ jest monotoniczna i powtarzamy powyższe rozważania sumując przyczynki od rozłącznych przedziałów.

Przykład dla funkcji niemonotonicznej:

$$Y(X)=X^2$$

1. Rozkład prawdopodobieństwa:

$$P(y_i) = P(X^2=y_i) = P(X=-\sqrt{y_i})+P(X=+\sqrt{y_i})$$

2. Dystrybuanta:

$$G(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = \\ P(-\sqrt{y} < X < +\sqrt{y})$$

$$G(y) = 0 \text{ dla } y \leq 0$$

$$G(y) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \text{ dla } y \geq 0$$

3. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa:

$$g(y) = 0 \text{ dla } y < 0$$

$$g(y) = \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| f(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f(-\sqrt{y}) \\ = \frac{1}{2\sqrt{y}} (f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})) \text{ dla } y \geq 0$$

5 CHARAKTERYSTYKI ROZKŁADU PRAWDOPODOBIENSTWA

W praktycznych zastosowaniach często wystarcza poznanie wartości pewnych wielkości, które charakteryzują rozkład prawdopodobieństwa zamiast pełnej informacji o rozkładzie.

Oto najczęściej stosowane:

DEFINICJA: fraktyl \mathbf{x}_q (zwany również kwantylem) jest to wartość zmiennej losowej, dla której dystrybuanta przyjmuje wartość 'q'.

$$F(\mathbf{x}_q) = q$$

Najważniejsze fraktyle to dolny kwartył: $\mathbf{x}_{0.25}$, górnny kwartył: $\mathbf{x}_{0.75}$ oraz mediana: $\mathbf{x}_{0.5}$.

DEFINICJA: Moda (zwana również wartością modalną jest to taka wartość zmiennej losowej, dla której rozkład prawdopodobieństwa (lub funkcja gęstości prawdopodobieństwa) przyjmuje maksimum.

DEFINICJA: Rozkłady prawdopodobieństwa posiadające jedną modę zwane są jednomodalnymi a te, które mają więcej niż jedną - wielomodalnymi.

DEFINICJA: Momentem rozkładu rzędu 'k' względem punktu x_0 , nazywamy następującą wielkość:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k(\mathbf{x}_0) &\equiv \int (x - x_0)^k f(x) dx \\ \mathbf{m}_k(\mathbf{x}_0) &\equiv \sum_i (x_i - x_0)^k p(x_i) \end{aligned}$$

dla zmiennych ciągłych i dyskretnych odpowiednio.

Najważniejszymi momentami są te, które liczone są względem początku układu współrzędnych tj. $x_0=0$ - (będziemy je oznaczali przez ' \mathbf{m}_k ') oraz momenty liczone względem $X_0 = \mathbf{m}_1$ tj. względem pierwszego momentu względem początku układu współrzędnych. Te ostatnie momenty nazywa się momentami centralnymi (będziemy je oznaczać przez ' μ_k ').

DEFINICJA: \mathbf{m}_1 zwany wartością oczekiwaną, wartością średnią lub nadzieją matematyczną. Będziemy go oznaczali przez $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ (stosuje się również oznaczenie $\mathbf{M}(\mathbf{X})$ lub $\hat{\mathbf{X}}$).

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{X}) &\equiv \sum_i p_i x_i && \text{dla zmiennych dyskretnych,} \\ \mathbf{E}(\mathbf{X}) &\equiv \int f(x) x dx && \text{dla zmiennych ciągłych} \end{aligned}$$

Jeżeli powyższa całka (lub suma) są bezwzględnie zbieżne to mówimy, że istnieje wartość oczekiwana. W przeciwnym wypadku (nawet jeżeli całka jest zbieżna) mówimy, że wartość oczekiwana nie istnieje !

Interpretacja $\mathbf{E}(\mathbf{X})$:

$\mathbf{E}(\mathbf{X})$ jest współrzędną punktu, który byłby środkiem masy rozkładu prawdopodobieństwa (lub pola pod funkcją gęstości prawdopodobieństwa) gdyby prawdopodobieństwa poszczególnych wartości " x_i " traktować jako masy (lub odpowiednio gęstość prawdopodobieństwa jako zwykłą gęstość).

Własności E(X):

E(X) jest operatorem liniowym a więc:

$$1. \quad \boxed{E(\sum_i C_i X_i) = \sum_i C_i E(X_i)}$$

Co w szczególnych przypadkach daje:

$$(a) \quad E(C) = C$$

$$(b) \quad E(CX) = C \cdot E(X)$$

$$(c) \quad E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

2. Dla zmiennych niezależnych X_1, \dots, X_n

$$\boxed{E(\prod_i X_i) = \prod_i E(X_i)}$$

UWAGA: Warunkiem koniecznym i wystarczającym by zmiennie były niezależne jest aby wspólny rozkład prawdopodobieństwa faktoryzował się: $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_1(X_1) \cdot f_2(X_2) \dots f_n(X_n)$. Rozkłady wielu zmiennych losowych omówimy później.

3. Dla funkcji zmiennej X; $Y = Y(X)$

wartość oczekiwana E(Y) może być znaleziona przy pomocy rozkładu zmiennej X bez konieczności szukania rozkładu f(y):

$$\boxed{E(Y) = \sum_i y(x_i) p_i, \quad E(Y) = \int y(x) f(x) dx}$$

dla zmiennej dyskretnej i dla zmiennej ciągłej odpowiednio.

Korzystając z tej własności zauważamy natychmiast,

że dowolny moment $m_k(x_0)$ może być potraktowany jako wartość oczekiwana funkcji $Y(X) = (X - x_0)^k$:

$$\boxed{m_k(x_0) \equiv \int dx f(x) (x - x_0)^k = E((x - x_0)^k)}$$

DEFINICJA: μ_2 , zwany wariancją lub dyspersją

Będziemy go oznaczać przez ' $\sigma^2(X)$ ' lub ' $\text{var}(X)$ ' (stosuje się również oznaczenie ' $D(X)$ '). Pierwiastek z wariancji nazywany jest odchyleniem standardowym oznaczany ' $\sigma(X)$ ' ale czasami używa się również nazwy 'dyspersja'.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sigma^2(X) \equiv \sum_i p_i (x_i - E(x))^2 & \text{zmienna dyskretna} \\ \sigma^2(X) \equiv \int f(x) (x - E(x))^2 dx & \text{zmienna ciągła} \end{array}}$$

Własności wariancji:

1. Wariancja może być wyrażona przez momenty liczone względem początku układu współrzędnych:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= m_2 - m_1^2 \\ \sigma^2(X) &= E(X^2) - E^2(X)\end{aligned}$$

Dowód: Korzystamy z trzeciej własności wartości oczekiwanej tj.

$$\begin{aligned}m_2(E(X)) &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2X \cdot E(X) + E^2(X)) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X)\end{aligned}$$

c.b.d.o.

Posługując się tym przedstawieniem wariancji dostajemy natychmiast następujące własności:

(a) $\boxed{\text{var}(C)=0}$.

bo $E(C^2) - E^2(C) = C^2 - C^2 = 0$ c.b.d.o.

(b) $\boxed{\text{var}(CX) = C^2 \text{var}(X)}$

jest to następstwo liniowości $E(X)$, przez którą definiowaliśmy $\text{var}(X)$.

(c) $\boxed{\text{var}(C_1X + C_2) = C_1^2 \text{var}(X)}$

2. Dla zmiennych niezależnych

$$\boxed{\text{var}(\sum_i C_i X_i) = \sum_i C_i^2 \text{var}(X)}$$

Wzór ten łatwo wyprowadzić korzystając z 3 własności wartości oczekiwanej:

$$\text{var}(y = \sum_i C_i X_i) \equiv E((y - E(Y))^2).$$

Po wstawieniu do wzoru oraz podniesieniu do kwadratu otrzymamy sumę kwadratów wyrażeń ' $C_i(X_i - E(X_i))$ ' oraz iloczyny mieszane tych wyrażeń. Iloczyny mieszane znikną w chwili gdy podziela na nie zewnętrzny operator wartości oczekiwanej (ponieważ $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$). Założenie niezależności jest potrzebne przy liczeniu wartości oczekiwanej z iloczynów mieszanych (wówczas wartość oczekiwana iloczynu równa jest iloczynowi wartości oczekiwanych). Suma wartości oczekiwanych z kwadratów wyrażeń ' $C_i(X_i - E(X_i))$ ' jest właśnie oczekiwanym przez nas wyrażeniem.

Interpretacja wariancji wynika z nierówności Czebyszewa, którą można zapisać następująco:

$$P(|X - E(X)| \geq a \cdot \sigma(X)) \leq a^{-2}$$

TWIERDZENIE:

Prawdopodobieństwo odchylenia wartości zmiennej losowej od wartości oczekiwanej $E(X)$ o 'a' -krotną wartość odchylenia standardowego jest mniejsze lub równe od $\frac{1}{a^2}$.

Twierdzenie to jest słuszne dla wszystkich rozkładów, które posiadają wariancję (a więc, co za tym idzie i wartość oczekiwaną). Liczba 'a' jest dowolną dodatnią rzeczywistą liczbą.

Interpretacja wariancji

Korzystając z powyższego twierdzenia dochodzimy do wniosku, że **wariancja (lub odchylenie standardowe)** jest **miarą rozrzutu zmiennej losowej dokoła wartości oczekiwanej**.

Jest to bardzo ważny wniosek bo w analizie danych doświadczalnych **utożsamiamy wartość oczekiwaną pomiarów** wykonanych w obecności błędów przypadkowych z **wartością prawdziwą mierzonej wielkości**. Wtedy **miarą błędu przypadkowego jest odchylenie standardowe** bo ono określa rozrzut wyników dokoła wartości prawdziwej.

6 ROZKŁAD NORMALNY (Gaussa)

DEFINICJA:

Ciągła zmienna losowa X , której funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma następującą postać:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} B} \exp\left(-\frac{(X-A)^2}{2B^2}\right)$$

nazywa się zmienną o rozkładzie normalnym $N(A,B)$.

Własności rozkładu normalnego $f(X) \equiv N(A,B)$:

Wartość oczekiwana:	$E(X) = A$
Odchylenie standardowe:	$\sigma(X) = B$

Stąd łatwo widać, że $\underline{N(A,B)} \equiv N(E(X),\sigma(X))$

Dystrybuanta rozkładu normalnego nie wyraża się przez funkcje elementarne.

Warto zapamiętać następujące wartości prawdopodobieństwa znalezienia zmiennej X w danym przedziale:

$$P(E(X) - \sigma(X) \leq X < E(X) + \sigma(X)) = 0.6827$$

$$P(E(X) - 2\sigma(X) \leq X < E(X) + 2\sigma(X)) = 0.9545$$

$$P(E(X) - 3\sigma(X) \leq X < E(X) + 3\sigma(X)) = 0.9973$$

Uwaga:

Dowolną zmienną Y o rozkładzie normalnym można *standaryzować* tworząc wielkość Z o rozkładzie 'standardowym normalnym' $N(0,1)$:

$$Z = (Y - E(Y))/\sigma(Y).$$

Standaryzacja jest ważna ze względu na możliwość tablicowania zarówno funkcji gęstości prawdopodobieństwa, jak i dystrybuanty rozkładu $N(0,1)$ a potem wykorzystania faktu, że mając zmienną X o rozkładzie $N(0,1)$ możemy stworzyć zmienną Y o rozkładzie $N(A,B)$ przez prostą transformację: $Y = B \cdot X + A$.

Co więcej, przez standaryzację sprowadzamy wszystkie wartości oryginalnej zmiennej do obszaru w pobliżu zera a jednostką jest odchylenie standardowe. Dzięki temu można porównywać rozkłady wielkości różniące się znacznie położeniem centrum i skalą wartości.

Centralne Twierdzenie Graniczne (Intuicyjne sformułowanie)

Zmienna Z będąca standaryzowaną sumą niezależnych zmiennych losowych będzie miała standardowy rozkład normalny gdy liczba składników w sumie dąży do nieskończoności oraz w sumie nie występują zmienne o wariancjach dominujących w stosunku do reszty składników.

Właśnie to twierdzenie powoduje, że rozkład normalny jest wyróżnionym rozkładem - bardzo często stosowanym w statystyce.

7 PODSTAWY RACHUNKU NIEPEWNOŚCI POMIAROWYCH

Wynik pomiaru bez podania dokładności doświadczenia (niepewności pomiaru) jest bezwartościowy.

DEFINICJA: *Pomiarem bezpośrednim* nazywamy doświadczenie, w którym przy pomocy odpowiednich przyrządów mierzymy (porównujemy z jednostką) interesującą nas wielkość fizyczną.

Przykład:

- Pomiar długości przedmiotu przy pomocy linijki
- Pomiar długości odcinka czasu przy pomocy zegara

DEFINICJA: *Pomiarem pośrednim* nazywamy doświadczenie, w którym wyznaczamy wartość interesującej nas wielkości fizycznej przez pomiar innych wielkości fizycznych związanych z daną wielkością znanym związkiem funkcyjnym.

Przykład:

- Pomiar oporu elektrycznego przewodnika: mierzymy spadek napięcia 'U' na przewodniku i prąd 'I' przez niego płynący a opór 'R' wyznaczamy z prawa Ohma: $R=U/I$.
- Pomiar gęstości stopu, z którego zbudowany jest prostopadłościan: mierzymy bezpośrednio długość krawędzi 'a', 'b' i 'c' prostopadłościanu i jego masę 'm' a gęstość wyznaczamy ze wzoru: $\rho = m/(a \cdot b \cdot c)$.

DEFINICJA: Tradycyjnie *błędem pomiaru* 'e' nazywano różnicę pomiędzy wartością 'X' uzyskaną w doświadczeniu a prawdziwą (nieznaną) wartością 'X₀' danej wielkości:

$$e = X - X_0$$

Błędy dzielono na grube, systematyczne i przypadkowe

Zgodnie z NORMĄ ISO (Międzynarodowej Organizacji Normalizacyjnej) wprowadzoną w 1995 roku należy unikać słowa "błąd" zastępując go słowami "**niepewności pomiarowe**". "Błąd" należy zarezerwować tylko dla pomyłek eksperymentatora (tj. do błędów grubych) lub niewłaściwej metody pomiarowej (tj. do błędów systematycznych) - patrz poniżej. Norma zaleca używanie symbolu $u(x)$ dla niepewności pomiaru zmiennej x . Symbol ten pochodzi od angielskiego słowa "uncertainty" \equiv "niepewność".

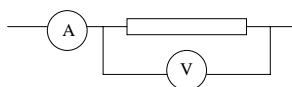
DEFINICJA: *Błędy grube* to błędy, które pojawiają się w wyniku pomyłki eksperymentatora (np. odczyt na niewłaściwej skali przyrządu) lub w wyniku niesprawności aparatury pomiarowej. Zwykle są one na tyle duże, że można je łatwo zauważyć.

Dla uniknięcia tych błędów należy starannie zorganizować proces pomiaru i używać do doświadczeń tylko właściwie wytestowanych przyrządów.

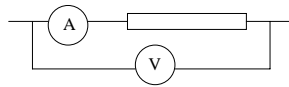
DEFINICJA: *Błędy systematyczne* to takie, które podczas wykonywania pomiaru systematycznie przesuwają wyniki pomiarów w jedną stronę w stosunku do prawdziwej wartości.

Przykład: Przy pomiarze oporu możemy zastosować dwa różne schematy podłączenia woltomierza i amperomierza:

1. Woltomierz podłączony równolegle do oporu a szeregowo do nich amperomierz. Wówczas spadek napięcia mierzony jest rzeczywiście na oporniku ale prąd mierzony przez amperomierz odpowiada nie samemu prądowi płynącemu przez przewodnik lecz sumie prądów - opornika i woltomierza. Systematycznie zawyżamy wartość prądu 'I' co w przypadku gdy opór woltomierza nie jest wielokrotnie większy od oporu przewodnika może prowadzić do znaczącego błędu.



2. Woltomierz podłączony jest równolegle do układu szeregowo połączonych opornika i amperomierza. Wówczas woltomierz mierzy spadek napięcia na przewodniku oraz na amperomierzu równocześnie. Systematycznie zawyżamy napięcie 'U' co w przypadku gdy opór wewnętrzny amperomierza nie jest wielokrotnie mniejszy od oporu przewodnika może prowadzić do znaczącego błędu.



Błędy systematyczne są trudne do zauważenia i oszacowania. Dla ich uniknięcia stosuje się:

- *staranne przemyślenie metody pomiaru* w poszukiwaniu możliwych źródeł błędów systematycznych i rezygnacja z metod, które prowadzą do takich błędów,
- *zmianę metody pomiaru* np. opór w powyższym przykładzie można mierzyć metodą mostka, która nie wprowadza takich systematycznych błędów jak omówione najprostsze schematy pomiaru. Ważne stałe fizyczne takie jak prędkość światła 'c' były wielokrotnie mierzone różnymi metodami, głównie po to by upewnić się, że uniknięto błędów systematycznych,
- *unikanie oczywistych źródeł błędu* jak np. "błąd paralaksy" polegający na odczytaniu skali nie patrząc na nią z kierunku prostopadłego,
- *pomiary względne* polegające na tym, że mierzymy równocześnie, tą samą metodą dwie wielkości - jedną dobrze znaną a drugą - tę, którą chcemy zmierzyć. Odnosząc wynik pomiaru nieznaney wielkości do wyniku pomiaru znanej wielkości zwykle możemy wyeliminować błędy systematyczne.

DEFINICJA: Przypadkowe niepewności pomiarowe (zwane tradycyjnie "błędami przypadkowymi") to niepewności, które zmieniają się od pomiaru do pomiaru, powodując odchylenia od wartości prawdziwej zarówno w dół jak i w górę. Zakłada się, że spowodowane są one przez wiele niezależnych przyczyn o porównywalnym znaczeniu.

Metody statystyki pozwalają na oszacowanie tego typu niepewności zarówno jakościowo jak i ilościowo. Nie mówią jednak nic o błędach systematycznych czy grubych. Dlatego dalsze rozważania dotyczyć będą tylko niepewności przypadkowych.

Jeżeli mamy do czynienia tylko z niepewnościami przypadkowymi to są spełnione założenia centralnego twierdzenia granicznego a więc:

Rozkład niepewności przypadkowej u to rozkład $N(0, \sigma(u))$.

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(u)} \exp\left(\frac{-u^2}{2\sigma^2(u)}\right)$$

7.1 ROZKŁAD POMIARÓW

Ponieważ wartość oczekiwana niepewności przypadkowej jest z definicji równa zero i rozrzut niepewności dokoła wartości oczekiwanej niepewności jest określony przez odchylenie standardowe $\sigma(u)$ a wynik pomiaru 'X' różni się od niepewności pomiarowej 'u' tylko przesunięciem skali współrzędnych o 'X₀' (wartość prawdziwą mierzonej wielkości) to rozkład wartości mierzonej 'X' jest rozkładem Gaussa $N(X_0, \sigma(u))$:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(u)} \exp\left(\frac{-(X-X_0)^2}{2\sigma^2(u)}\right).$$

WAŻNE WNIOSKI:

- *Wartość prawdziwa mierzonej wielkości jest równa wartości oczekiwanej pomiarów (jeżeli są tylko niepewności przypadkowe).*
- *Rozrzut pomiarów dokoła wartości prawdziwej jest określony przez odchylenie standardowe $\sigma(e)$ rozkładu niepewności przypadkowych.*
- *Miarą niepewności pojedynczego pomiaru jest odchylenie standardowe pomiarów.*

Z powyższych faktów wynika, że:

Szukanie prawdziwej wartości mierzonej wielkości i jej niepewności to estymacja wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego pomiarów

DEFINICJA: *Estymatorem nieobciążonym* $T_n(\theta)$ parametru θ nazywamy taki estymator, którego wartość oczekiwana równa jest wartości estymowanego parametru niezależnie od rozmiarów próby:

$$E(T_n(\theta)) = \theta$$

DEFINICJA: Obciążeniem estymatora ' B_n ' nazywamy różnicę jego wartości oczekiwanej i wartości estymowanego parametru:

$$B_n = E(T_n(\theta)) - \theta$$

DEFINICJA: Estymatorem obciążonym nazywamy taki estymator, którego obciążenie jest różne od zera.

DEFINICJA: Estymatorem asymptotycznie nieobciążonym nazywamy taki estymator obciążony, którego obciążenie zmierza do zera gdy rozmiary próby nieskończenie rosną:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

TWIERDZENIE:

Jeżeli wariancja estymatora nieobciążonego lub asymptotycznie nieobciążonego dąży do zera gdy rozmiary próby rosną nieograniczenie wówczas estymator ten jest zgodny.

TWIERDZENIE:

Jeżeli $T_n(\theta)$ jest zgodnym estymatorem θ i jeżeli $h(\theta)$ jest wielomianem lub ilorazem wielomianów to estymator $h(T_n(\theta))$ jest estymatorem zgodnym dla $h(\theta)$.

DEFINICJA:

Jeżeli mamy zbiór estymatorów tego samego parametru θ : $T_n^{(1)}(\theta), T_n^{(2)}(\theta), \dots, T_n^{(k)}(\theta)$, wówczas ten spośród nich nazywany jest najbardziej efektywnym, który ma najmniejszą wariancję.

OD 'DOBREGO' ESTYMATORA ŻĄDAMY ABY:

- spełniał mocne prawo wielkich liczb lub był zgodny
- O ile to możliwe chcemy by był:
 - Nieobciążony,
 - Najbardziej efektywny.

7.2 ESTYMATOR WARTOŚCI OCZEKIWANEJ

Jako *estymator wartości oczekiwanej* $T_n(E(X))$ przyjmuje się średnią arytmetyczną niezależnych pomiarów wielkości X . Będziemy ją oznaczać przez \bar{X} :

$$T_n(E(X)) \equiv \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Estymator ten posiada optymalne własności:

1. Kołmogorow pokazał, że \bar{X} spełnia mocne prawo wielkich liczb a więc oczywiście jest zgodny,
2. Estymator \bar{X} jest nieobciążony.
 $E\left(\frac{1}{n} \sum_i X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_i E(X_i) = \frac{1}{n} (n \cdot E(X)) = E(X)$ c.b.d.o.
 Tu wykorzystano fakt, że wszystkie wartości oczekiwane są równe $E(X_i)=E(X)$.
3. Można pokazać, że \bar{X} jest najbardziej efektywnym estymatorem $E(X)$.

TWIERDZENIE:

Estymator \bar{X} wartości oczekiwanej $E(X)$ ma rozkład normalny $N(E(X), \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}})$ gdzie 'n' jest liczbą pomiarów w próbie.

WNIOSKI:

1. Odchylenie standardowe średniej arytmetycznej \bar{X} jest \sqrt{n} - krotnie mniejsze od odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru.
2. Odchylenie standardowe $\sigma(\bar{X})$ czyli *standardowa niepewność pomiaru średniej arytmetycznej* $u(\bar{X})$ (wg tradycyjnej nomenklatury *błąd średni kwadratowy średniej arytmetycznej*) charakteryzuje dokładność wyznaczenia prawdziwej wartości X w danym pomiarze składającym się z n niezależnych doświadczeń.
3. Aby charakteryzować dokładność metody pomiarowej należy jako miarę dokładności podać *standardową niepewność pojedynczego pomiaru* $u(X) \equiv \sigma(X)$ (wg tradycyjnej nomenklatury - *błąd pojedynczego pomiaru*) .
4. W granicach wyznaczonych przez $\sigma(X)$ powinno leżeć 68.27% wszystkich pomiarów a nie wszystkie pomiary.

7.3 ESTYMATOR ODCHYLENIA STANDARDOWEGO

$$(1) \quad S(X) \equiv \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Jest to zgodny, asymptotycznie nieobciążony estymator.

UWAGA: zaleca się używać tego estymatora odchylenia standardowego.

$$(2) \quad s(X) \equiv \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Jest to zgodny, asymptotycznie nieobciążony i najbardziej efektywny estymator

$$(3) \quad \underline{S}(X) \equiv k_n S(X)$$

gdzie $k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}}$

Jest to zgodny i nieobciążony estymator $\sigma(X)$.

Współczynnik " k_n " można zastąpić z niezłym przybliżeniem przez wstawienie do wzoru na $S(X)$ zamiast $1/(n-1)$ czynnika $1/(n-1.45)$.

Poniżej podajemy w tabelce przykładowe wartości współczynnika k_n dla różnych 'n':

n	k_n	$\sqrt{\frac{n-1}{n-1.45}}$
3	1.1284	1.1359
4	1.0853	1.0847
5	1.0640	1.0615
6	1.0506	1.0482
7	1.0423	1.0397
10	1.0280	1.0260
15	1.0181	1.0165
20	1.0134	1.0121
25	1.0104	1.0095
50	1.0051	1.0046

7.4 ZAPIS WYNIKÓW POMIARÓW

Ponieważ z doświadczenia nie uzyskujemy prawdziwej wartości oczekiwanej $E(X)$ oraz odchylenia standardowego $\sigma(X)$ a tylko ich estymatory więc nie podaje się ich wartości z pełną (uzyskaną z obliczeń) liczbą cyfr znaczących.

KONWENCJA: Stosuje się następującą **konwencję zapisu wyników**, gdzie jako miarę niepewności pomiaru podaje się **niepewność standardową** $u(x) \equiv S(x)$.

- Pozostawia się tylko **dwie cyfry znaczące** standardowej niepewności pomiarowej, np. 0,023.
- Wynik pomiaru obliczamy tak aby wyznaczyć jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono niepewność pomiarową, a następnie zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego wyznaczono niepewność pomiarową, np. zamiast 1,9024 bierzemy 1,902.
- Wynik wraz z niepewnością pomiarową podajemy w ten sposób, że **po wypisaniu wyniku dopisujemy w nawiasie dwie cyfry znaczące reprezentujące niepewność pomiaru i podajemy jednostkę**, np.

$$\underline{m = 1,902(23) \text{ kg}} \quad \text{lub} \quad \underline{m = 1,902(0,023) \text{ kg}}$$

INNA FORMA ZAPISU:

Stosuje się również zapis:

$$x = (\text{wynik}(x) \pm U(x)) \text{ jednostka}(x), \text{ gdzie } U(x) \equiv k \cdot u(x)$$

tzw. **niepewność rozszerzona**.

- **Współczynnik rozszerzenia "k"** przyjmuje wartości $2 \leq k \leq 3$ przy czym domyślnie, tzn. jeżeli nie podaje się tego jawnie, przyjmuje się $k = 2$.
- **UWAGA:** ten zapis jest identyczny jak zapis stosowany dawniej (przed przyjęciem aktualnej konwencji zapisu) ale wtedy podawało się **standardową niepewność** $u(x)$ zamiast **rozszerzonej niepewności** $U(x) \equiv k \cdot u(x)$.

Zapis przykładowy przytaczanego

- powyżej wyniku:

$$\underline{\text{masa} = (1,902 \pm 0.046) \text{ kg} .}$$

UWAGA: Zastosowanie formy zapisu: (wynik \pm niepewność pomiaru) może prowadzić do nieporozumienia, gdy nie napiszemy wyraźnie, że stosujemy nową konwencję i że jako współczynnik rozszerzenia niepewności bierzemy $k = 2$.

Zaleca się więc stosowanie zapisu, w którym podaje się w nawiasie 2 cyfry znaczące standardowej niepewności pomiarowej. W przeciwnym wypadku należy wyraźnie zaznaczyć, że podajemy rozszerzoną niepewność standardową oraz wypisać wartość k .

UWAGA: Ponieważ omawiana metoda szacowania niepewności opiera się o statystyczny rozrzut pomiarów rządzony rozkładem Gaussa, to

- **Niepewność standardowa** pomiaru określa przedział wartości mierzonej wielkości gdzie z prawdopodobieństwem ≈ 0.68 znajduje się prawdziwa wartość mierzonej wielkości.
- **Rozszerzona niepewność z czynnikiem rozszerzenia $k=2$** określa przedział, gdzie z prawdopodobieństwem ≈ 0.95 znajduje się prawdziwa wartość.

Norma ISO określania niepewności pomiarowych proponuje zastosowanie dwu metod do tego celu:

Metoda A szacowania niepewności pomiarowych to opisane powyżej wnioskowanie o niepewności pomiaru z rozrzutu statystycznego wyników pomiaru

Metoda B stosuje się, gdy nie możemy takiego rozrzutu zaobserwować, np. gdy

- Działka skali przyrządu pomiarowego jest większa od obserwowanego rozrzutu,
- Pomiar można wykonać tylko jednokrotnie bo, np. towarzyszy mu zniszczenie badanego obiektu, itp.

W metodzie B: postępujemy następująco:

- Szukamy takiego przedziału $[a, b]$ wartości mierzonej wielkości x , że wszystkie wartości $x \in [a, b]$ (np. długość $[a, b]$ to wielkość działki skali przyrządu).
- Zakładamy funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej x ; najczęściej zakłada się jednostajny rozkład: $f(x) = 1/(b - a)$.
- Odchylenie standardowe tej wielkości bierzemy jako wartość niepewności standardowej, np. dla rozkładu jednostajnego

$$u(x) \equiv \sigma(x) = (b - a)/(2\sqrt{3}).$$

UWAGA: Ponieważ $(b - a)/2 \equiv \Delta x$, gdzie Δx to (tradycyjnie) tzw. **błąd maksymalny** więc wtedy **standardowa niepewność**

$$u(x) = \Delta x/\sqrt{3}.$$

7.5 ROZKŁAD LICZBY POZYTYWNIIE ZAKOŃCZONYCH DOŚWIADCZEŃ

TWIERDZENIE: Jeżeli prawdopodobieństwo zrealizowania się danego zdarzenia losowego w pojedynczym doświadczeniu jest równe ' p ' to liczba ' k ' zrealizowanych zdarzeń w ' N ' niezależnych doświadczeniach rządzona jest rozkładem Bernoulliego (*dwumianowym, binomialnym*):

$$P(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}; k = 0, 1, \dots, N$$

Łatwo można pokazać, że

$$\begin{aligned} E(k) &= N \cdot p \\ \sigma(k) &= \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)} \end{aligned}$$

W fizyce często zdarza się sytuacja gdy ' N ' jest bardzo duże, ' p ' bardzo małe a wartość oczekiwana rejestrowanych zdarzeń $E(k) \equiv N \cdot p$ jest stała. np. N - liczba radioaktywnych jąder w badanej próbce, p - prawdopodobieństwo rozpadu pojedynczego radioaktywnego jądra w jednostce czasu, k - liczba rejestrowanych rozpadów w jednostce czasu

W takiej sytuacji rozkład Bernoulliego przechodzi w rozkład Poissona:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe wyrażają się wzorem:

$$\begin{aligned} E(k) &= \lambda \\ \sigma(k) &= \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

Można pokazać, że dla $N \Rightarrow \infty$ rozkład Bernoulliego i rozkład Poissona dążą do rozkładu normalnego $N(N.p, \sqrt{N.p.(1-p)})$ i $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$ odpowiednio.

7.6 NIEPEWNOŚĆ STATYSTYCZNA

Liczba rejestrowanych w danym okresie czasu zdarzeń ' k ' rządzonych powyższymi prawami jest zmienną losową a więc "prawdziwa" liczba zdarzeń to $E(k)$ a jej niepewność to $\sigma(k)$. Tę niepewność nazywana jest "niepewnością statystyczną" (tradycyjnie "błędem statystycznym").

ESTYMATOR prawdziwej liczby zdarzeń i jej niepewności statystycznej.

Jako **estymator prawdziwej liczby zdarzeń** przyjmuje się liczbę " k " zarejestrowanych zdarzeń podczas pojedynczego pomiaru:

$$T_n(E(k)) = k$$

a jako **estymator niepewności statystycznej** pierwiastek z tej liczby:

$$T_n(\sigma(k)) = \sqrt{k}$$

POZORNY PARADOKS: Im dłużej mierzymy tym statystyczna niepewność liczby zarejestrowanych zdarzeń jest większa.

WYTŁUMACZENIE: Istotna jest statystyczna niepewność względna a nie bezwzględna:

$$T_n\left(\frac{\sigma(k)}{E(k)}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

NOMENKLATURA: Pomiar z małą statystyczną niepewnością względną to pomiar z **DOBRA** a z dużą statystyczną niepewnością względną to pomiar ze **ZŁĄ STATYSTYKĄ**.

W praktyce do opisu rejestracji liczby zdarzeń stosujemy rozkład Poissona. Interesuje nas jednak nie tylko odpowiedź na pytanie:

'Ile zdarzeń zachodzi w określonym czasie?'

ale również odpowiedź na inne pytanie:

'Ile zachodzi zdarzeń DANEGO TYPU?'

PRZYKŁAD: Rejestrujemy produkty reakcji jądrowej. Chcemy wiedzieć nie tylko ile reakcji zachodzi ale także ile jest produktów posiadających określoną energię.

PYTANIA:

1. Jakim rozkładem rządzona jest liczba zdarzeń w każdym przedziale ("kanale") energii?
2. Co by się stało gdybyśmy dodali liczby zdarzeń z kilku sąsiednich kanałów (dla poprawienia "statystyki" liczby zdarzeń) ?

ODPOWIEDZI:

ad 1 Liczba zdarzeń w każdym kanale jest rządzona rozkładem Poissona ale każdy z tych rozkładów ma zwykle różny parametr λ .

ad 2 Korzystając z poniższego twierdzenia:

TWIERDZENIE

Rozkład prawdopodobieństwa sumy skończonej liczby niezależnych składników, z których każdy rządzony jest rozkładem Poissona o parametrze λ_i jest również rozkładem Poissona ale o nowym parametrze $\lambda = \sum_i \lambda_i$.

stwierdzamy, że liczba zdarzeń w kilku wysumowanych kanałach $k = \sum_i k_i$ będzie dalej rządzona rozkładem Poissona z parametrem λ , którego estymator jest równy $T_n(E(k)) = \sum_i k_i$.

7.7 POMIARY POŚREDNIE

Jeżeli w doświadczeniu mierzymy wielkości X_1, X_2, \dots, X_N a następnie wyliczamy wartość funkcji $Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_N)$ to taką procedurę nazywamy pomiarem pośrednim.

7.7.1 ESTYMATOR $E(Y)$ POMIARU POŚREDNIEGO Y

Estymatorem $E(Y)$ jest wartość funkcji Y wyliczona dla argumentów, które są estymatorami X_1, X_2, \dots, X_N tzn. dla średnich arytmetycznych $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N$:

$$T_n(E(Y(X_1, X_2, \dots, X_N))) = Y(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$$

lub inaczej

$$E(Y(X_1, X_2, \dots, X_N)) \approx Y(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$$

7.7.2 NIEPEWNOŚĆ POMIARU POŚREDNIEGO

Przy założeniu, że pomiary X_1, X_2, \dots, X_N były wykonywane **niezależnie** odpowiednio n_1, n_2, \dots, n_N razy, niepewność pomiaru pośredniego nazywana wg NORMY ISO "niepewnością złożoną" (tradycyjnie *błędem średnim kwadratowym*) oszacowuje się następująco:

$$\sigma(Y) \approx \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)_{X_i=\bar{X}_i}^2 \cdot \sigma^2(\bar{X}_i)}$$

UWAGA:

1. X_1, X_2, \dots, X_N to różne wielkości a nie kolejne pomiary wielkości "X",
2. Pochodne liczone względem ' X_i ' to pochodne cząstkowe tzn. liczone przy założeniu, że pozostałe zmienne 'X' są ustalone,
3. Zamiast wariancji zmiennej $\sigma^2(\bar{X}_i)$ używa się jej estymatora tzn. $S^2(\bar{X}_i)$ N-krotnie mniejszego od estymatora $S^2(X_i)$.

Jeżeli pomiary wielkości mierzonych bezpośrednio były wykonywane jednokrotnie to nie możemy oszacować $\sigma(\bar{X})$ z rozrzutu (tj. metodą A wg NORMY ISO) lecz stosujemy metodę B oszacowania niepewności standardowej pomiaru bezpośredniego opisaną powyżej.

7.7.3 BŁĄD MAKSYMALNY

Błąd maksymalny pomiaru pośredniego to tradycyjne pojęcie, które stosowano, gdy nie można było oszacować niepewności pomiaru bezpośredniego z rozrzutu wyników. Liczono go wg poniższego wzoru, tzn. **metodą różniczki zupełnej**.

$$\Delta(Y) \approx \sum_i^N \left| \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right| \cdot \Delta(X_i)$$

Tu moduły pochodnych są wyliczane dla jednokrotnie zmierzonych wielkości X_i a symbol $\Delta(X_i)$ oznacza maksymalny błąd tej wielkości mierzonej bezpośrednio.

Zgodnie z NORMĄ ISO : **Nie należy używać pojęcia błędu maksymalnego** pomiaru pośredniego lecz liczyć niepewność pomiaru pośredniego jako **złożoną niepewność pomiarową** wstawiając zamiast niepewności pomiarów bezpośrednich otrzymanych "metodą A" (tzn. z rozrzutu pomiarów) niepewności oszacowane "metodą B".

Należy tak postępować bo:

- W odróżnieniu od złożonej niepewności standardowej *błąd maksymalny nie ma interpretacji statystycznej.*
- Łatwo można pokazać , że błąd maksymalny obliczony metodą różniczki zupełnej *jest zawsze większy od złożonej niepewności standardowej.*

8 REGRESJA LINIOWA

DEFINICJA **Regresja liniowa zmiennej Y względem zmiennej X** to linia prosta

$$Y = a \cdot X + b,$$

której parametry " a " i " b " dobiera się tak aby minimalizować sumę kwadratów odchyleń współrzędnych $(Y_i, i = 1, 2, \dots, n)$ zespołu 'n' punktów o współrzędnych $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ od linii.

UWAGA Regresja liniowa X względem Y tj. prosta $X = c \cdot Y + d$ pokrywa się z regresją liniową Y względem X tj. prostą $Y = a \cdot X + b$ znaną dla tego samego zespołu punktów doświadczalnych tylko wtedy gdy związek pomiędzy X i Y jest funkcyjnym związkiem liniowym (a nie zależnością statystyczną).

Rozważymy tu specyficzną sytuację polegającą na tym, że:

- zmienna X ma zanedbywalnie małe niepewności pomiarowe (mówimy wtedy, że ' X jest zmienną kontrolowaną')
- zmienna objaśniana Y jest zmienną losową o znanej niepewności standardowej $\sigma(y_i)$ dla każdego punktu o współrzędnych (x_i, y_i) .

Wtedy dostajemy następujące estymatory parametrów regresji:

$$T_n(a) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i (x_i - \bar{x}_w)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}_w)^2}$$

$$T_n(b) = \bar{y}_w - T_n(a) \cdot \bar{x}_w$$

gdzie

$$w_i \equiv 1/\sigma^2(y_i), \quad \bar{x}_w \equiv \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad \bar{y}_w \equiv \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Niepewności standardowe estymatorów parametrów a i b również wyrażają się analitycznymi wzorami:

$$\begin{aligned}\sigma(T_n(a)) &= 1/\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}_w)^2} \\ \sigma(T_n(b)) &= \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} + \frac{\bar{x}_w^2}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}_w)^2}}\end{aligned}$$

Niepewność standardowa wartości Y przewidzianej przez linię regresji (zależna od x):

$$\sigma(y(x)) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} + \frac{(x - \bar{x}_w)^2}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}_w)^2}}$$

Możemy spotkać się z jeszcze prostszą sytuacją polegającą na tym, że:

- Zmienna X jest zmienną kontrolowaną a niepewność standardowa zmiennej Y jest taka sama dla wszystkich punktów i wynosi $\sigma(Y)$.

Wtedy dostajemy proste, analityczne wzory na estymatory parametrów regresji:

$$\begin{aligned}T_n(b) &= \frac{(\sum_i X_i^2) \cdot (\sum_i Y_i) - (\sum_i X_i) \cdot (\sum_i X_i \cdot Y_i)}{W} \\ T_n(a) &= \frac{n \cdot (\sum_i X_i \cdot Y_i) - (\sum_i X_i) \cdot (\sum_i Y_i)}{W} \\ W &\equiv n \cdot \sum_i X_i^2 - (\sum_i X_i)^2\end{aligned}$$

Wskaźnik sumowania "i" przebiega wartości od 1 do "n".

Niepewności standardowe estymatorów parametrów "a" i "b" również wyrażają się analitycznymi wzorami:

$$\begin{aligned} u(b) &\equiv T_n(\sigma(b)) = \sigma(Y) \cdot \sqrt{\frac{\sum_i X_i^2}{W}} \\ u(a) &\equiv T_n(\sigma(a)) = \sigma(Y) \cdot \sqrt{\frac{n}{W}} \end{aligned}$$

Możemy również podać wzór na niepewność standardową wartości Y przewidzianej przez linię regresji (zależną od X):

$$u(Y(X)) \equiv T_n(\sigma(Y(X))) = \sigma(Y) \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - X)^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}}$$

Symbol \bar{X} oznacza tu średnią arytmetyczną.

- $T_n(\sigma(Y(X)))$ to estymator niepewności standardowej wartości $Y(X)$ przewidzianej przez regresję,
- $\sigma(Y)$ to niepewność pomiaru współrzędnej Y_i (z założenia taka sama dla wszystkich punktów).
Gdy jej nie znamy wpisujemy tu (i do wzorów na niepewności parametrów a i b) estymator $T_n(\sigma(Y))$,
- \bar{X} to średnia arytmetyczna wartości zmiennej kontrolowanej wyliczona ze współrzędnych punktów X_1, X_2, \dots, X_n ,
- X - to wartość zmiennej kontrolowanej X , dla której wyliczamy wartość regresji liniowej $Y(X)$ oraz estymator niepewności regresji liniowej $Y(X)$ dla tej wartości argumentu X .

9 INDEKS

- **Błąd**
 - definicja 17,
 - gruby 18,
 - maksymalny 30,
 - przypadkowy 19,
 - systematyczny 18,
 - statystyczny 27,
- **Centralne twierdzenie graniczne** 16
- **Dystrybuanta**
 - zmiennej losowej 7,
 - funkcji zmiennej losowej 9,
- **Estymacja**
 - punktowa 6,
 - przedziałowa 6
- **Estymator**
 - asymptotycznie nieobciążony 21,
 - standardowej niepewności pojedynczego pomiaru 24,
 - standardowej niepewności pomiaru pośredniego 29,
 - standardowej niepewności parametrów regresji liniowej 32,
 - standardowej niepewności regresji liniowej 33,
 - standardowej niepewności średniej arytmetycznej 22,
 - niepewności statystycznej 27,
 - najbardziej efektywny 21,
 - nieobciążony 20,
 - obciążony 21,
 - odchylenia standardowego 23,
 - prawdopodobieństwa 6,
 - spełniający mocne prawo wielkich liczb 6,
 - wartości oczekiwanej 22,
 - zgodny (spełniający prawo wielkich liczb) 6,
- **Kwantyl (fraktyl)**
 - dolny kwantyl 11,
 - górnny kwantyl 11,
 - mediana 11

- **Moda 12**
- **Moment 12**
- **Niepewność pomiarowa**
 - metoda A wyznaczania 25,
 - metoda B wyznaczania 25,
 - rozszerzona 24,
 - rozszerzona - zapis 24,
 - standardowa pomiaru bezpośredniego 20,
 - standardowa pomiaru pośredniego (niepewność złożona) 29,
 - standardowa - zapis 24,
 - statystyczna 27,
 - statystyczna - względna 27,
- **Prawdopodobieństwo**
 - definicja 3,
 - estymator 6,
 - gęstość 8,
 - rozkład 8,
 - własności 3,
- **Regresja liniowa 31**
- **Rozkład**
 - Bernoulliego (dwumianowy, binomialny) 26,
 - Gausa (normalny) 15,
 - Poissona 27,
- **Statystyka 5**
- **Wartość oczekiwana**
 - (nadzieja matematyczna, wartość średnia) 12
- **Wariancja**
 - (dyspersja, kwadrat odchylenia standardowego) 13
- **Współczynnik rozszerzenia (niepewności pomiarowej), 24**
- **Zapis wyników, 24**

- Zdarzenia 2

elementarne	2,
iloczyn zdarzeń	2,
losowe	2, 3,
niemożliwe	2,
niezależne	5,
pewne	2,
przeciwne	2,
różnica zdarzeń	2,
suma zdarzeń	2,

- Zmienna

losowa	3,
losowa skokowa	3

SZANOWNY CZYTELNIKU !

- Notatki, które czytasz nie mają zastąpić wykładu SMOP-I, co najlepiej wiadać po tym, że prawie nie zawierają komentarzy. Sądzę jednak, że mogą być pożyteczne dla tych, którzy chcą znaleźć w jednym miejscu podstawowe definicje i wzory niezbędne do analizy statystycznej danych na poziomie Pierwszej Pracowni Fizycznej. Mogą również stanowić wstęp do nauki bardziej zaawansowanych metod statystycznych - wykładanych w ramach wykładu SMOP-II.
- Mam nadzieję, że w tych notatkach jest stosunkowo mało pomyłek. Jednakże wielokrotnie przekonałem się, że błędów nie robią tylko ci co nic nie robią a więc z pewnością znajdą się tu błędy. Będę wdzięczny za powiadomienie mnie o tych błędach oraz za wszelkie uwagi, które pomogą poprawić te notatki oraz jakość wykładu na nich opartego.

(B. Kamys; boguslaw.kamys@uj.edu.pl)